13

Probabilidade

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Achar os sucesos dun experimento aleatorio e realizar operacións con eles.
- Determinar se dous sucesos son compatibles ou incompatibles.
- Calcular a probabilidade dun suceso mediante a regra de Laplace.
- Coñecer as propiedades da probabilidade.
- Calcular a probabilidade dun suceso nun experimento composto.
- Achar probabilidades de sucesos dependentes e independentes.
- Aplicarlles a probabilidade a situacións da vida cotiá.

Antes de empezar

Seguro que, dunha forma ou doutra, en moitas ocasións manexaches probabilidades e non sempre na escola. Expresións como "probablemente choverá mañá" ou como "é probable que o que diga sexa verdade" son bastante comúns na linguaxe cotiá.

Transmisión hereditaria. Por exemplo a xordeira, nunha parella de xordos, para cada fillo que teñan, a probabilidade de que sexa tamén xordo é de 0,25. O grupo sanguíneo dos fillos depende do dos pais cunhas probabilidades que se poden calcular. As enfermidades sanguíneas xenéticas superan as 3500, e continuamente descóbrense máis.

Probabilidade na linguaxe ordinaria: Casual, accidental, eventual, fortuíto, impensado, imprevisible, inesperado, inopinado, ocasional, por sorte, por chiripa, por rebote, ao chou, sen querer, sen intención.

Os xogos de azar. Ao xogar ao dominó, ás cartas, aos dados, hai moitas ocasións nas que “arriscamos", e de seguro barallamos se é máis ou menos probable que fagamos ben ou mal.

Investiga

Imaxina que estás nun concurso de televisión no que che ofrecen tres portas a elexir unha. Detrás dunha das puertas hai un coche e detrás de cada unha das outras un burro.

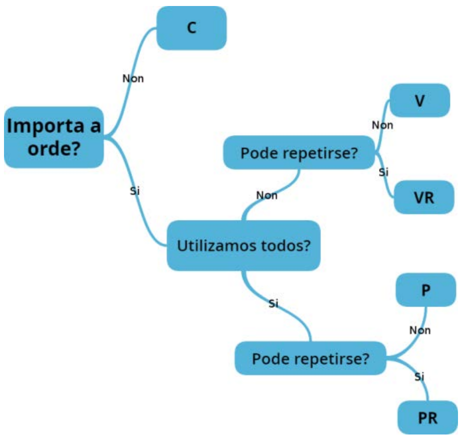
Elixes unha porta, pero antes de abrila, o presentador, que sabe o que hai detrás de cada unha, abre unha das duas que non has elixiches tras a que por soposto hai un burro, e entón dache a oportunidade de cambiar a tua elección.

Naturalmente queres levarte o coche, que farías, cambiar de porta ou non cambiar?

1. Introdución: Combinatoria

Ás veces a parte máis difícil do cálculo de probabilidades é contar o número de casos favorables e posibles. A **combinatoria** é a parte das matemáticas que se dedica ao reconto dos elementos dun conxunto.

- ✓ Se queremos determinar de cantas formas pódense ordenar todos os elementos dun conxunto falaremos de **Permutacións**. Se entre os elementos hai repetidos de forma que ao intercambiar entre eles segue sendo o mesmo caso, diremos **Permutacións con Repetición**.
- ✓ Cando, en lugar de querer ordenar todos os elementos dispoñibles, interésanos soamente ordenar algúns, por exemplo para asignar unha serie de tarefas distintas a un grupo de persoas, trátase de **Variacións**. Tamén hai dous casos, segundo se cada elemento pódese repetir ou se só pode utilizarse unha vez.
- ✓ Ás veces non nos importa a orde no que se elixen os elementos, simplemente queremos ver de cantas formas podemos seleccionar a uns cuantos de entre todos. Son as **Combinacións**.



Un aspecto importante cando estamos a utilizar a combinatoria para facer recontos é saber cal dos distintos tipos debemos utilizar. Para iso debemos pensar se importa a orde, se se utilizan todos os elementos e se se pode repetir segundo o esquema adxunto.

Permutacións

- **Permutacións de n elementos** son o número das distintas formas que temos para ordenar estes *n* elementos. Denotámolo $\mathbf{P_n}$.

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

- **Permutacións con repetición** de **n** elementos nas que o primeiro elemento repítese **a** veces, o segundo **b** veces, … ata o último que se repite **k** veces ($a+b+\dots+k=n$) son o número das distintas formas que hai de ordenar estes elementos de maneira que estes aparecen repetidos *a*, *b*, … *k* veces. Denótase $\mathbf{PR_{a,b,\dots k}}$

$$PR_{a,b,\dots k} = \frac{P_n}{P_a \cdot P_b \cdot \dots \cdot P_k} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot \dots \cdot k!}$$

Queremos contabilizar de cantas formas distintas pode sentarse o alumnado dunha clase de 9 persoas.

Temos m = *9* persoas que se deben sentar nas *9* mesas de clase, é dicir, debemos ordenar a ese alumnado. Se trata de **Permutacións** de *9* elementos. Vexamos como se calcula o número de formas distintas de sentarse na clase.

$$P_9 = 9 \cdot 8 \cdots 2 \cdot 1 = 9!$$

Para a primeira mesa temos *9* persoas distintas

Para a segunda mesa nos quedan *8* persoas distintas

Para as demais se van reducindo de 1 en 1 ata que a última persoa ten unha única mesa libre

Queremos descubrir de cantas formas distintas pode facerse un collar con contas de cores, se temos 4 contas vermellas, 3 verdes, 2 amarelas e 5 azuls.

Imos ordenar un total de 4 + 3 + 2 + 5 = 14 contas para formar un collar. Se todas as contas foran diferentes, as distintas formas de facer o collar serían Permutacións de 14 elementos, pero son moitas menos ao estar repetidos pois, por exemplo, é o mesmo comezar pola primeira conta vermella que pola segunda. Trátase de **Permutacións con Repetición** de *4*, *3*, *2* e *5* elementos. Vexamos como se calcula o número de posibles collares.

$$PR_{4,3,2,5} = \frac{P_{14}}{P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_5} = \frac{14!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 5!}$$

Por un lado consideramos todos os collares que se poderían facer se todas as contas foran distintas

E o dividimos entre as distintas formas que hai de ordear cada unha das cores.

Variacións

- **Variacións con repetición** de **m** elementos tomados de **n** en **n** son o número que indica cuantos son os distintos grupos de n elementos iguais ou distintos que se poden facer con os m elementos dispoñibles. Denotámolas $\mathbf{VR_{m,n}}$.

$$VR_{m,n} = m^n$$

Queremos contabilizar cantas palabras de 5 letras, con ou sen sentido, poderíamos crear cun alfabeto de 10 letras.

Temos un alfabeto formado por m = *10* letras distintas. Queremos formar palabras de tamaño n = *5*, podendo repetir cada letra todas as veces que queiramos. Trátase de **Variacións con Repetición** de *10* elementos tomados de *5* en *5*. Vexamos como se calcula o número de palabras.

$$VR_{10,5} = 10 \cdot 10 \cdots 10 = 10^5$$

Para a primeira letra temos *10* posibilidades distintas
Para a segunda letra tamén temos *10* posibilidades
Para as demais letras tamén temos *10* posibilidades

- **Variacións** de **m** elementos tomados de **n** en **n** (n≤m) son o número de formas distintas que temos de ordenar os *n* elementos tomados de entre un total de *m* sin repetir ningún. Denótanse $\mathbf{V_{m,n}}$.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Queremos contabilizar de cantas formas pode darse a clasificación dos 3 primeiros nunha carrera cun total de 16 atletas.

Temos unha carreira na que participan m = *16* atletas. Queremos determinar de cantas formas distintas pode ser a clasificación dos n = *3* primeiros. Trátase de **Variacións** de *16* elementos tomados de *3* en *3*. Vexamos como se calcula o número de posibles clasificacións.

$$V_{16,3} = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$$

Para o primeiro posto temos *16* posibilidades distintas
Para o segundo posto temos *15* posibilidades, pois o primeiro non pode quedar tamén segundo
Para a terceira posición son *14* as posibilidades, pois hai que descontar os dous primeiros

Combinacións

- Chamamos **Combinacións** de **m** elementos tomados de **n** en **n** ao número de formas distintas de seleccionar *n* elementos de entre un total de *m* sen que importe a orde en que foron seleccionados. As denotamos $\mathbf{C_{m,n}}$.

Se importase a orde trataríase de variacións, pero como non importa, para calcular cantos casos hai dividimos as variacións entre o número de formas de ordenar estes elementos, é dicir:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

Queremos contabilizar de cantas formas pódense elixir a 9 persoas para participar nunha actividade nun grupo de 32 persoas.

Temos un total de m = *32* persoas e de entre elas debemos elixir a n = 9. Nótese que non importa cales eliximos primeiro e cales despois. Todas as elixidas son participantes na actividade. É dicir, non importa a orde. Se trata de **Combinacións** de *32* elementos tomados de 9 en 9. Vexamos como se calcula o número de formas distintas de seleccionar a estas persoas.

$$C_{32,9} = \frac{V_{32,9}}{P_9} = \frac{32!}{23! \cdot 9!}$$

Se importara a orde o que teríamos serían $V_{32,9}$
Como non importa a orde, estamos contando cada caso moitas veces, tantas como formas de ordear teñamos para as 9 persoas elixidas, é dicir, P_9.

EXERCICIOS resoltos

1. Calcula:

a) P_5 Sol: $P_5 = 5! = 120$

b) P_{10} Sol: $P_{10} = 10! = 3628800$

c) $PR_{4,3,4,2}$ Sol: $PR_{4,3,4,2} = \dfrac{13!}{4! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2!} = 900900$

d) $PR_{2,4}$ Sol: $PR_{2,4} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$

2. Calcula:

a) $VR_{10,5}$ Sol: $VR_{10,5} = 10^5 = 100000$

b) $VR_{5,7}$ Sol: $VR_{5,7} = 5^7 = 78125$

c) $V_{10,5}$ Sol: $V_{10,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$

d) $V_{5,3}$ Sol: $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

3. Calcula:

a) $C_{17,5} =$ Sol: $C_{17,5} = \dfrac{17!}{12! \cdot 5!} = 6188$

b) $C_{13,3} =$ Sol: $C_{17,5} = \dfrac{13!}{10! \cdot 3!} = 286$

2. Experimentos aleatorios

Espazo mostral e sucesos.

Ao extraer unha carta dunha baralla, lanzar unha moeda, tirar un dado, e noutros exemplos análogos, non podemos saber de antemán o resultado que se vai obter. Son experimentos **aleatorios**, aqueles nos que non se pode predicir o resultado e deles fálase aquí.

O conxunto de todos os posibles resultados dun experimento aleatorio chámase **espazo mostral,** e cada un deses posibles resultados é un **suceso elemental**.

✓ Un **suceso** é calquera subconxunto do espazo mostral; verifícase cando ocorre calquera dos sucesos elementais que o forman.

Hai un suceso que se verifica sempre, o **suceso seguro,** que é o mesmo espazo mostral.

Operacións con sucesos

Cos sucesos dun experimento aleatorio pódense realizar distintas operacións. Dados dous sucesos A e B:

- A **unión** de A e B, **AUB**, é o suceso formado por todos os sucesos elementais de A e de B. Ocorre cando sucede A ou sucede B ou ambos os dous.
- A **intersección**, **A∩B**, é o suceso formado polos sucesos elementais comúns a A e a B. Verifícase cando acontecen A e B a un tempo.
- A **diferenza** de A e B, **$A \setminus B$**, é o suceso formado polos sucesos elementais de A que non están en B. Ocorre se sucede A pero non B.

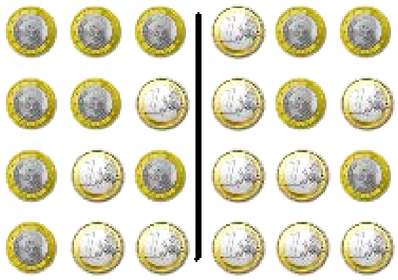
O suceso **contrario** a un dado A está formado por todos os sucesos do espazo mostral que non están en A. É o que ocorre cando non sucede A e indícase **$\bar{A}$**.

- O suceso **contrario** do **seguro** é o **suceso imposible**, que non se verifica nunca; indícase con **Ø**.

- Ao tirar unha moeda e un dado, un xeito de representar o espazo mostral é:

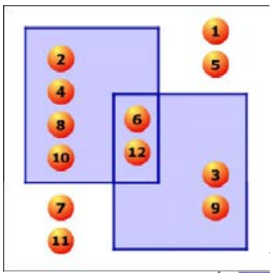
Ou ben: (cara, 1) (cara, 2),...

- Ao tirar tres moedas (ou unha moeda tres veces) o espazo mostral é:

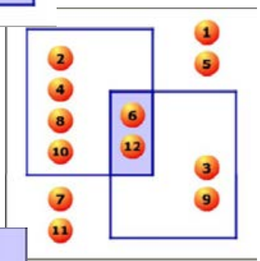


E={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

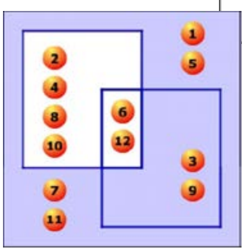
A∪B={2,3,4,6,8,9,10,12}



A∩B={6,12}



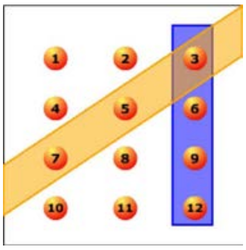
$\bar{A}$={1,3,5,7,9,11}



A= "saír par"

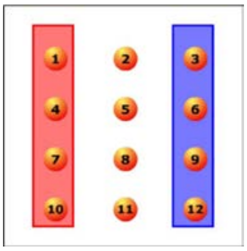
B="múltiplo de 3"

Sucesos compatibles



Cando sae 3 ocorren ambos os dous.

Sucesos incompatibles



Non ocorren a un tempo, pero no son contrarios

Sucesos compatibles e incompatibles

Nun experimento aleatorio hai sucesos que poden acontecer á vez e sucesos que non.

- Dise que dous sucesos son **compatibles** se teñen algún suceso elemental común. Neste caso **A∩B≠Ø**, poden ocorrer á vez.
- Dous sucesos dise que son **incompatibles** se non teñen ningún suceso elemental común, neste caso **A∩B=Ø,** e non poden ocorrer á vez.

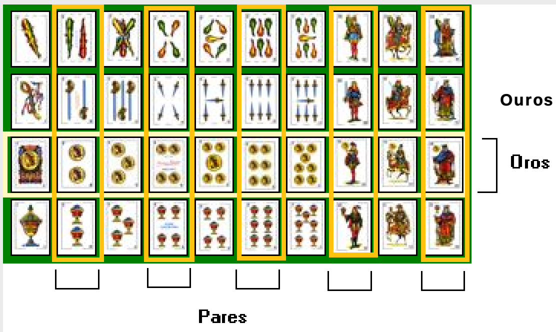
Un suceso e o seu contrario son sempre incompatibles, pero dous sucesos incompatibles non sempre son contrarios, como se pode ver no exemplo da esquerda.

EXERCICIOS resoltos

4. Nunha bolsa temos tres bólas numeradas como 1, 2 e 3. Consideramos o experimento de extraer unha bóla e anotar o seu número. Escribe todos os sucesos posibles. Indica cales deles son os elementais.

{},{1,2,3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1}, {2} e {3}. Os tres últimos son os elementais.

5. Nunha baralla, baixo o experimento de extraer unha carta, considera os sucesos a) par, b) ouros, c) par e ouros, d) par ou ouros, e) par menos ouros, f) ouros menos par e g) non par



Observa a imaxe,
a) hai 20 cartas rodeadas de laranxa, as pares,
g) outras 20 que non, as impares,
b) 10 ouros.
c) O 2, 4, 6,10 e 12 de ouros son pares.
d) Todos os ouros e pares xuntos son 25 cartas (todas as rodeadas por amarelo ou laranxa)
e) Aos 2, 4, 6, 10 e 12 hai que lles quitar o 2, 4, 6, 10 e 12 de ouros, a 20 cartas quítanlles 5 e quedan 15
f) O 1, 3, 5, 7 e 11 de ouros.

6. Ao tirar un dado, consideramos os sucesos: A={Par}, B={maior de 3}, e C={impar}. Dos tres pares de sucesos posibles AB, AC e BC, indica cales son compatibles e/ou incompatibles:

AB compatibles, cando saia o 4 ou o 6.
AC incompatibles, se é par non pode ser impar.
BC compatibles, cando saia o 5.

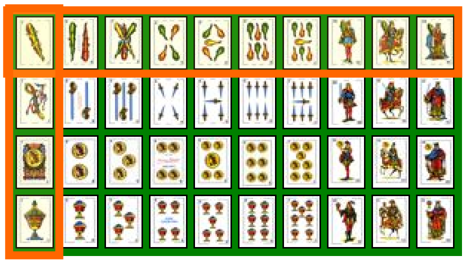
3. Probabilidade dun suceso

A regra de Laplace

Cando un experimento aleatorio é regular, é dicir, que todos os sucesos elementais teñen a mesma probabilidade de ocorrer ou son **equiprobables**, para calcular a probabilidade dun suceso calquera A, abonda con contar e facer o cociente entre o nº de sucesos elementais que compoñen A (**casos favorables**) e o nº de sucesos elementais do espazo mostral (**casos posibles**).

$$P(A) = \frac{n^{o}\,casos\,favorables}{n^{o}\,casos\,posibles}$$

Este resultado coñécese como **regra de Laplace**. Observa que para poder aplicala cómpre que todos os casos posibles sexan igualmente probables.



Extraemos unha carta dunha baralla de 40:

P(bastos)=10/40=0,25

P(as)=4/40=0,1

P(as de bastos)=1/40=0,025

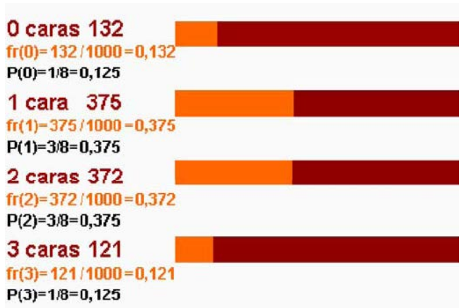
Frecuencia e probabilidade

Como sabes, a **frecuencia absoluta** dun suceso é o número de veces que aparece cando se repite un experimento aleatorio, e a **frecuencia relativa** é a frecuencia absoluta dividida polo número de veces, **n**, que se repite o experimento aleatorio.

Cando este número **n** é moi grande, a frecuencia relativa con que aparece un suceso tende a estabilizarse cara a un valor fixo.

Este resultado, coñecido como **lei dos grandes números**, lévanos a definir a probabilidade dun suceso como ese número cara ao que tende a frecuencia relativa ao repetirmos o experimento moitas veces.

Resultados obtidos na simulación do lanzamento de tres moedas 1000 veces



Sospeitamos que un dado está trucado e entretémonos en tiralo 100 veces e anotar os resultados, e obtemos:

	1	2	3	4	5	6
F	20	30	15	15	10	10
Fr	0.2	0.3	0.15	0.15	0.1	0.1

Concluiremos, P(1)=P(2)=··· xa non é 1/6, senón aproximadamente P(1)=0,2; P(2)=0.3 etc. Aquí estaremos a usar a frecuencia relativa como probabilidade, a partir deste momento terémolo en conta ao xogar con ese dado.

Propiedades da probabilidade

Vista a relación entre frecuencia relativa e probabilidade, cúmprese que:

- A probabilidade dun suceso é un número entre 0 e 1.
- A probabilidade do suceso seguro é 1 e a do suceso imposible 0.
- A probabilidade da unión de dous sucesos **incompatibles** A e B é **P(AUB)=P(A)+P(B)**.

E destas dedúcese ademais que:

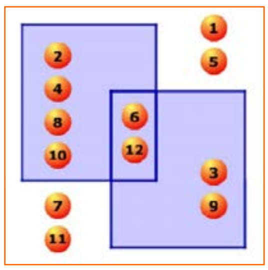
- A probabilidade do contrario é **p(A)=1-P(A)**
- A probabilidade da unión de dous sucesos compatibles é **p(AUB)=p(A)+p(B)-p(A∩B)**

A="par"   B="múltiplo de 3"

$P(A)=6/12=1/2$ **$P(B)=4/12=1/3$**

$P(\bar{A})=1/2$ **$p(\bar{B})=2/3$**

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$



EXERCICIOS resoltos

6. Temos un dado de 20 caras {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6} perfectamente equilibrado Cal é a probabilidade de obter cada un dos resultados posibles?

P(1)=1/20=0,05	P(2)=2/20=0,1	P(3)=3/20=0,15
P(4)=4/20=0,2	P(5)=5/20=0,25	P(6)=5/20=0,25

7. Se lanzamos o dado anterior 1000 veces, cantas veces espera que saia cada resultado aproximadamente?

O 1 sairá ao redor de 50 veces. O 2, ao redor de 100. O 3, ao redor de 150. O 4, ao redor de 200. O 5, ao redor de 250 e o 6, ao redor de 250.

8. Para o dado {1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5} de 20 caras calcula as probabilidades seguintes:

a) P(par)= 8/20 =0,4	Hai tres 2 e cinco 4, 8 pares
b) P(maior de 3)= 11/20=0,55	11 posibles entre 20
c) P(par e maior de 3)=5/20=0,25	Só o 4 é par e maior de 3, e hai 5
d) P(par ou maior de 3)=14/20=0,7	Se sae 2, 4 ou 5
e) P(par menos maior de 3)=3/20=0,15	Só se sae 2
f) P(maior de 3 menos par)=6/20=0,3	Se sae 5
g) P(non par)=12/20=0,6	Se sae 1, 3 ou 5

9. Nunha bolsa temos 7 bólas vermellas, 9 bólas azuis e 4 verdes. Extraemos unha bóla, calcula a probabilidade de que

a) Non sexa vermella	P(non R)=13/20=0,65	20 bólas: 7 vermellas e 13 non
b) Sexa verde	P(V)=4/20=0,2	4 verdes
c) Sexa verm. ou azul	P(RUA)=16/20=0,8	7+9=16 vermellas ou azuis

10. Nun grupo, o 40% xoga baloncesto e o 60% fútbol, sabendo que o 85% practica algún dos dous deportes, que porcentaxe xoga aos dous?

P(F)=0,60 P(B)=0,40 P(FUB)=0,85

P(FUB)= P(F)+P(B) - P(F∩B)

0,85=0,60+0,40-P(F∩B) P(F∩B)=0,15 15%

11. No grupo A hai 18 persoas, das que 10 falan inglés e 8 non; no B hai 12 persoas, das que 3 falan inglés e 9 non; no C hai 10 persoas, 3 que falan inglés e 7 que non. Elíxese ao chou unha persoa de cada grupo, calcula a probabilidade de que desas tres, polo menos unha fale inglés.

Nos sete sucesos da dereita hai polo menos unha persoa que fala inglés, en vez de mirar as súas probabilidades, é máis cómodo calcular a **do contrario**, **que ningún dos tres fale inglés**, para escoller ao do A conto con 8 persoas que non falan inglés, para o do B con 9 e para o do C con 7. Así os casos favorables de que ningún fale inglés son 8 · 9 · 7 e os casos posibles 18 · 12 · 10

P(polo menos un fale inglés)=

=**1-P(ningún** fala inglés)=

=1-8·9·7/18·12·10=1-7/30=**23/30**

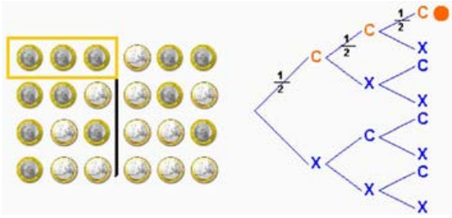
4. Experimentos compostos

Sucesos compostos

Un **experimento composto** é o que está formado por varios experimentos simples realizados de forma consecutiva.

Para calcular o espazo mostral dun experimento composto convén, en moitas ocasións, facer un diagrama de árbore que represente todas as opcións. Cada resultado vén dado por un camiño do diagrama. Observa no exemplo como construír o diagrama de árbore.

Tiramos unha moeda tres veces seguidas, cal é a probabilidade de obter tres caras?



8 casos posibles
1 caso favorable

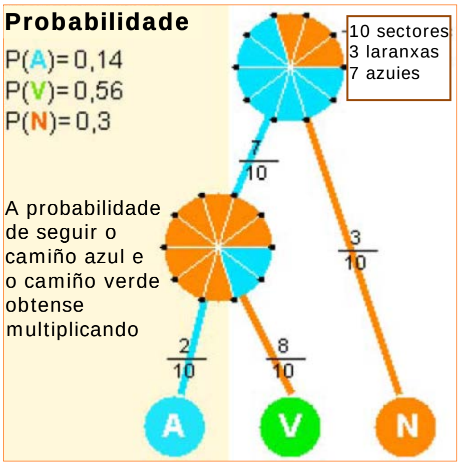
A probabilidade de C en cada moeda 1/2

$$P(CCC) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

Regra da multiplicación

Se te fixas no exemplo anterior, ao indicar a probabilidade de cada rama do camiño, obtense a probabilidade de cada suceso composto calculando o produto dos respectivos sucesos simples.

Para calcular a probabilidade dun suceso nun experimento composto, **multiplícanse as probabilidades** dos sucesos simples que o forman.



Extraccións con devolución e sen devolución

Un exemplo de experimento composto atopámolo na extracción sucesiva de cartas ou de bólas dunha urna, ... , nestes casos hai que considerar se se devolve a carta, a bóla, etc. antes de sacar a seguinte, ou non.

Sacamos sucesivamente dúas cartas dunha baralla de 40. Cal é a probabilidade de que as dúas sexan de copas?

A probabilidade de que a primeira carta sexa de copas é 10/40.

Para a segunda, a probabilidade depende de que devolvamos a primeira carta ao mazo ou non.

Con devolución

$$P(CC) = \frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40} = \frac{1}{16}$$

Sen devolución

$$P(CC) = \frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39} = \frac{3}{52}$$

5. Probabilidade condicionada

Sucesos dependentes e independentes

Cando se realizan observacións de varios sucesos pode que un dependa do outro.

A probabilidade de que ocorra un suceso B cando está a ocorrer outro, A, chámase **condicionada**, e exprésase **p(B/A)**.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dados dous sucesos, dise que son **independentes** se a presenza dun non inflúe na probabilidade do outro, é dicir, **se P(B/A)=P(B)**; no caso contrario son **dependentes**.

✓ A e B independentes: **P(B/A)=P(B)** e ao ter en conta a fórmula anterior para p(B/A),
A e B independentes: **P(A∩B)=P(A)·P(B)**

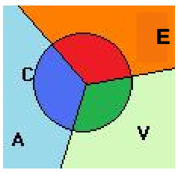
Probabilidade total

Como puideches ver, nos experimentos compostos pódese facer un diagrama en árbore, e cada resultado vén dado por un camiño nesa árbore. Para calcular unha probabilidade só hai que debuxar o camiño correspondente, e o produto das probabilidades de todas a ramas que o forman será o valor que buscamos.

Así se ocorre A e logo B: **P(A e B)=P(A)·P(B/A)**

✓ A suma das probabilidades de todos os camiños é igual a **1**

Consideremos os sucesos representados pola imaxe; E="Encarnado", V="Verde" e A="Azul" son tres sucesos incompatibles e tales que a unión forma todo o espazo mostral. Sexa C="círculo" un suceso calquera, daquela:



$$P(C)=P(E)\cdot P(C/E)+P(V)\cdot P(C/V)+P(A)\cdot P(C/A)$$

Este resultado é o que se coñece como **probabilidade total**.

Probabilidade "a posteriori"

En ocasións interesa coñecer la P(A/S), é dicir, cando xa sabemos que ocorreu S na segunda experiencia, preguntámonos a probabilidade de que se chegara a través de A.

É unha probabilidade condicionada:

$$P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{p(S)}$$

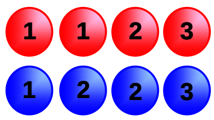
Expresión coñecida como **Fórmula de Bayes**.

$$P(B/A) = \frac{\text{Casos favorables de B ocorrendo A}}{\text{Casos posibles ocorrendo A}} = \frac{\text{Casos favorables de A e B}}{\text{Casos favorables de A}} = \frac{\dfrac{\text{Casos favorables de A e B}}{\text{Casos favorables en total}}}{\dfrac{\text{Casos favorables de A}}{\text{Casos favorables en total}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Os sucesos "o día está gris" e "levar paraugas" inflúen entre si. Os sucesos "estudar" e "aprobar", son sucesos que se favorecen; cando se estuda, aumenta a probabilidade de aprobar.

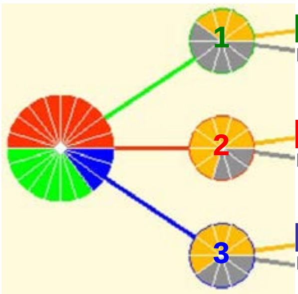
Nunha urna temos bólas vermellas e azuis numeradas como na figura. Cal é a probabilidade de sacar cada número?

P(1)=3/8
P(2)=3/8
P(3)=2/8



Se sabemos que a bóla é vermella

P(1/R)=2/4 (de 4 vermellas hai 2 con 1)
P(1)<P(1/R) favorécense
P(2/R)=1/4 (de 4 vermellas hai 1 con 2)
P(2)>P(2/R) desfavorécense
P(3/R)=1/4 (de 4 vermellas hai 1 con 3)
P(3)=P(3/R) son independentes.



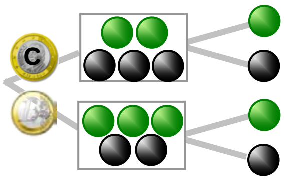
P(VN)=0,35·0,4
P(VG)=0,35·0,6
P(RN)=0,50·0,7
P(RG)=0,50·0,3
P(AN)=0,15·0,6
P(AG)=0,15·0,4

Suma = 1

P(N)=P(V)·P(N/V)+P(R)·P(N/R)+P(A)·P(N/A)=

=**0,35·0,4**+**0,50·0,7**+**0,15·0,6**=**0,58**

Tírase unha moeda e, segundo saia cara ou cruz, sácase unha bóla da urna indicada. Se a bóla saíu verde, cal é a probabilidade de que saíse cara?



0,5·0,4=0,20

0,5·0,6=0,30

P(V)=0,20+0,30=0,50

$$P(C/V) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}4}{0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}6} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$$

EXERCICIOS resoltos

12. Lanzamos un dado de 4 caras {1,2,3,4} e outro de 10 {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4}. Cal é a probabilidade de obter dous tres. E dous catros?

P(3 e 3) = 1/4 · 3/10 = 3/40 = 0.075
P(4 e 4) = 1/4 · 4/10 = 4/40 = 0.1

13. Nunha bolsa temos 5 bólas numeradas do 1 ao 5. Extraemos dúas bólas, a) Cal é a probabilidade de obter un 2 e un 3 se non devolvemos as bólas sacadas? b) E cal se as devolvemos?

Sen devolución P = 1/5 · 1/4 = 0.05
Con devolución P = 1/5 · 1/5 = 1/25 = 0.04

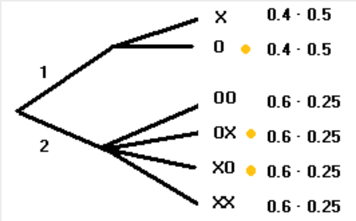
14. Ao tirar dous dados, cal é a probabilidade de obter polo menos 10 puntos?.

Obtéñense 10 ou máis puntos en 46 64 55 56 65 e 66.
Son 6 casos, cada un deles con probabilidade 1/6 · 1/6 = 1/36.
P(polo menos 10 puntos) = 6 · 1/36 = 1/6
Ou ben, hai seis casos favorables de entre os 36 posibles, P = 6/36 = 1/6

15. Tiramos unha moeda trucada na que P(C)=0,6 e P(X)=0,4. Se sae cara tiramos un dado {1,2,3,4} de 4 caras e, se sae cruz, un {1,2,3,4,5,6} de seis. Temos a mesma probabilidade de que saia 1 despois de que saia cara ou cruz? Canto vale en cada caso? Cal é a probabilidade de que saia 1?

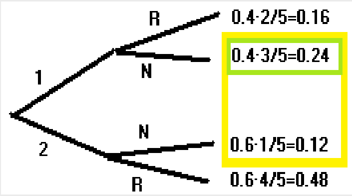
Non, P(C1)=0,6 · 1/4 = 3/20 P(X1) = 0,4 · 1/6 = 2/30
P(1) = P(C1) + P(X1) = 3/20 + 2/30 = 13/60

16. Temos un dado {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2} de 10 caras. Se sacamos un 1, tiramos unha moeda, e dous se sacamos un 2. Cal é a probabilidade de obter unha cara?



Os casos 1O, 2OX y 2XO teñen unha cara.
A suma das probabilidades é a solución:
P = 0.2 + 0.15 + 0.15 = 0.5

Temos un dado {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2} de 10 caras. Tiramos o dado, se sae 1, sacamos unha bóla de {RRNNN} e, se sacamos un 2, sacamos unha de {RRRRN}. Saíu N, cal é a probabilidade de que fose cun 1 do dado



Observa a figura, a probabilidade de que saíra 1N entre o que pode ser que saíra 1N ou 2N é:

$$P(1/N)=\frac{0.24}{0.24+0.12}=\frac{0.24}{0.36}=0.666$$

17. A probabilidade de atinar en amarelo na diana da figura é 0,3, en verde 0,4 e en laranxa 0,3. Ademais se se atina en amarelo a probabilidade de que sexa en brillo é 0,7; a probabilidade de brillo en verde é 0,6 e en laranxa 0,3.

a) Cal é a probabilidade de atinar na zona brillante?

P(Brillo)=P(A)·P(Brillo/A)+P(V)·(P(Brillo/V)+P(L)·P(Brillo/L)
P(Brillo)=0,3·0,7+0,4·0,6+0,3·0,5=0,21+0,24+0,15=0,60

b) Se se atinou na zona brillante, cal é a probabilidade de que fose en amarelo.

P(A/Brillo)=P(A e Brillo)/P(Brillo)=0,3·0,7/0,60=0,21/0,60=0,35

Para practicar

1. Unha clase ten 20 persoas. Se queremos dividila en 2 equipos col mesmo número de persoas, de cantas formas se pode facer?

2. Unha comunidade de veciños formada por 36 persoas debe elixir unha persoa para o posto de presidenta, outra de secretaria e outra de tesoreira. De cantas formas distintas pode facerse?

3. De cantas formas distintas podes cubrir unha quiniela?
Ten en conta que unha quiniela está formada por 14 partidos nos que se poden poñer 3 resultados (1 X 2) e un pleno ao 15 no que hai que adiviñar o número de goles de local e visitante entre 4 valores (0 1 2 M) para cada un.

4. Nunha proba ciclista con 53 participantes entregánse 3 maillots. De cantas formas se poden repartir tendo en conta que unha mesma persoa pode gañar varios?

5. Queremos colocar 12 libros nunha estantería. Descubre de cantas formas pode facerse si:
a) Todos os libros son distintos.
b) So hai tres libros distintos: 4 do 1º tipo, 3 del 2º e 5 del 3º.
c) Se ademais todos os iguales deben quedar xuntos.

6. Existen no mercado varios tipos de dados, aínda que o máis normal sexa o cúbico de seis caras. Hainos de 4, 6, 10, 12 e 20 caras. En xeral, van numerados do 1 ao nº de caras que teñen. Escribe o suceso "Par" para cada un deles.

7. Temos un dado de 4 caras numeradas do 1 ao 4. Tirámolo unha vez. Escribe o suceso seguro, o imposible, e todos os posibles clasificados polo seu tamaño.

8. Temos un dado de 6 caras branco, no que se escribiron nas súas caras os seguintes números {1,1,1,2,2,3}. Escribe todos os sucesos posibles.

9. Na escola municipal dunha vila hai clases para deportes de equipo de baloncesto, fútbol e voleibol. Hai 100 inscritos en deportes de equipo, 70 van a clases de fútbol, 60 de baloncesto e 40 a fútbol e baloncesto. Cantos van só a voleibol?

10. Determina o número de cartas, nunha baralla española de 40:
a) con numeración menor que 4.
b) de bastos e maiores que 4.
c) que sexan figuras de ouros o bastos.

11. Nunha baralla española, conta as cartas dos sucesos:
a) Ouros e setes
b) Ouros ou setes
c) Sete de ouros
d) Figuras
e) Ouros ou figuras
f) Ouros e figuras

12. Para un dado de seis caras {1,2,3,4,5,6}, escribe os sucesos:
a) Par
b) Non par
c) Par e maior que 3
d) Par ou maior que 3
e) Par menos maior que 3
f) O contrario de (par e maior que 3)

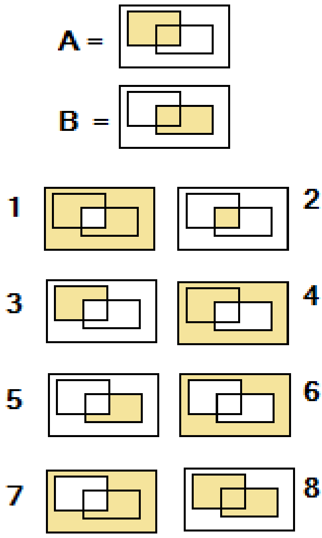
13. Temos un dado cos números {1,1,1,2}. Se o lanzamos 100 veces, arredor de que cantidade de veces sairá cada un dos posibles resultados?

14. Temos un dado de dez caras numeradas como {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4}. Cal é a probabilidade de cada un dos sucesos elementais?

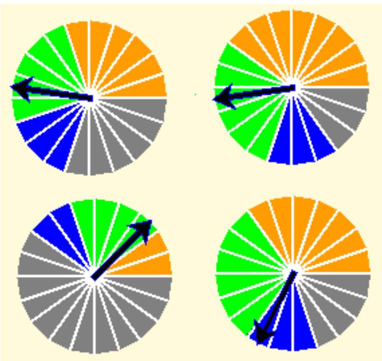
15. Temos unha ruleta de 10 posicións, 3 vermellas, 4 verdes, 2 negras e unha azul. Cal é a probabilidade de que ao xirala se obteña cada unha das cores?

16. Se lanzamos dúas moedas poderemos obter un destes 4 resultados {OO, XO, OX, XX}. Podes escribir desta forma os posibles para tres moedas. E para 4. Cal é a probabilidade de obter dúas caras en cada un dos experimentos?

17. Sabendo que P(A)=0.5 , p(B)=0.7 e P(2)=0.3, calcula P(1), P(3), P(4), P(5), P(6), P(7) e P(8),



18. Cal é a probabilidade de obter laranxa, verde, azul ou gris en cada unha das seguintes ruletas?



19. Temos un dado de 10 caras desta forma{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2}. E dúas urnas, unha A={E, E, E, V, V} e B={E, V, V, V, V}. Lanzamos o dado, se sae 1, extraemos unha bóla de A, e se sae 2, de B. Cal é a probabilidade de extraer unha encarnada de A? E unha encarnada de B? E unha verde de A?.

20. Nunha bolsa hai as seguintes bólas {1,2,2,3,3}. Extraemos primeiro unha bóla e devolvémola para extraer outra. Calcula a probabilidades seguintes: P(1,1), P(1,2), P(1,3).

21. Se para a segunda extracción do exercicio anterior non devolvemos a 1ª bóla, cal é o valor das probabilidades agora?

22. Calcula as probabilidades de obter 2 ouros ao extraer dúas cartas dunha baralla española nos casos de devolverlle e de non lle devolver a 1ª carta á baralla antes de extraer a 2ª.

23. Temos un dado de 10 caras da forma {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2}, e dúas urnas, unha A={R,R,R,V,V} e outra B={R,V,V,V,V}. Lanzamos o dado, se sae 1, extraemos unha bóla de A, e se sae 2, de B. Cal é a probabilidade de extraer un R? E un V?.

24. Temos unha urna con bólas numeradas como se indica {1,1,2,2,2} e dúas urnas I={R,V} e II={N,N,R,V}. Extraemos unha bóla para decidir de que urna escollemos outra. Cal é a probabilidade de obter R ou N?

25. Realizado o experimento do exercicio anterior, resultou ser V. Cal é a probabilidade de que fose extraído da urna A? E da B?

26. Lánzanse dúas moedas. Se saen dúas caras tírase o dado {1,1,1,2,2,2} e se non, o dado {1,1,2,2,3,3}. Cal é a probabilidade de obter un 1? Cando sae un, con que probabilidade saíron tamén dúas caras?

27. Dez amigos organizan unha viaxe e elixe o destino un deles por sorteo. Seis queren ir á costa e catro ao interior. Dos primeiros, dous queren ir ao norte e catro ao sur. Dos do interior, a metade prefiren o norte e a outra metade o sur.

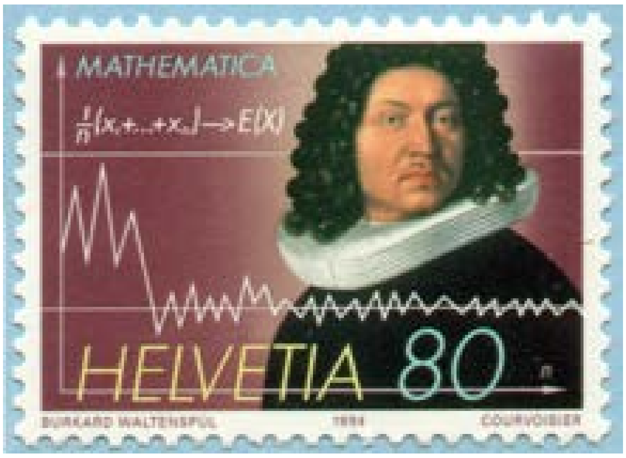
a) Acha a probabilidade de ir á costa do norte.

b) Cal é a probabilidade de ir ao norte?

c) Se van ao norte, cal é a probabilidade de que sexa á costa?

Para saber máis

Un pouco de historia

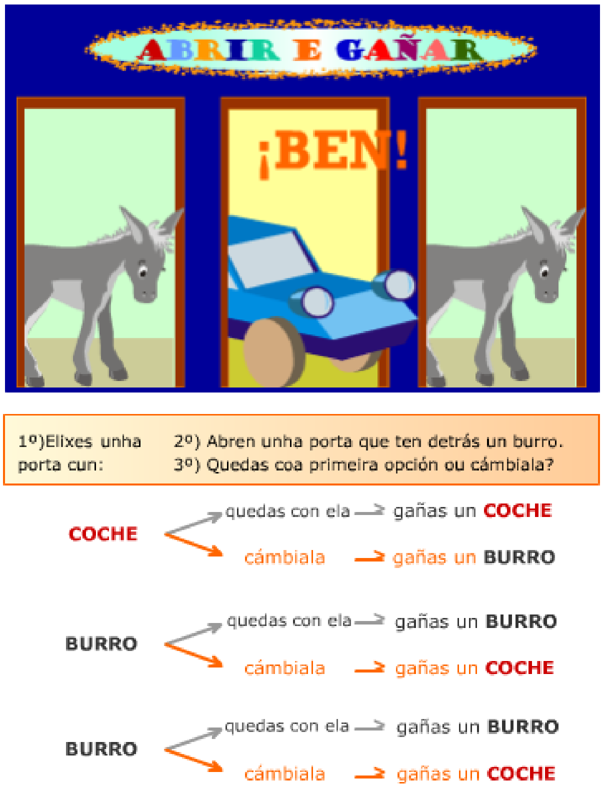


A probabilidade naceu ao redor dos xogos de azar. Nas civilizacións antigas (Exipto, Grecia, Roma) usábase un óso a xeito de dado para diversos xogos onde intervíña o azar (de aí provén un xogo tradicional: a chuca). Pero mesmo restos arqueolóxicos de hai máis de 40.000 anos interpretáronse como elementos de xogos de azar.

En Grecia e Roma practicábanse con verdadeiro celo e paixón. Homero (900 a. C.) conta que, cando Patroclo era pequeno, enfadouse tanto cun opoñente xogando co astrágalo que o houbo matar.

Foi Girolamo Cardano (1501-1576) quen escribiu a primeira obra importante relacionada co cálculo de probabilidades nos xogos de azar. Foi en 1565 e chamábase *Libro dos xogos de azar*. Jacob Bernoulli (1654-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), o reverendo Thomas Bayes (1702-1761) e Joseph Lagrange (1736-1813) desenvolveron fórmulas e técnicas para o cálculo da probabilidade.
No século XIX, Pierre Simon, marqués de Laplace (1749-1827), unificou todas estas primeiras ideas e compilou a primeira teoría xeral da probabilidade.

A probabilidade seguiu a evolucionar con matemáticos como Poisson (1781-1840), P. Chebyshev (1821-1894), Émile Borel (1871-1956), A. Markov (1856-1922), e creando escola para superar estancamentos; Andrei N. Kolmogorov da escola rusa (1903-1987), Nortber Wiener (1894-1964) da americana. Na actualidade, a estatística e a probabilidade únense e desenvólvense xuntas.



Este problema, chamado de **Monty Hall**, está inspirado no concurso televisivo estadounidense *"Let's Make a Deal" (Fagamos un trato)*, famoso entre 1963 e 1986. O seu nome provén do presentador do mesmo, Monty Hall.

Se xogaches bastantes veces comprobarías, quizás con certa sorpresa, que a probabilidade de gañar un coche cambiando a primera elección, é superior á probabilidade de gañalo sen cambiar de porta.

Observando o diagrama de árbore ou aplicando o que xa sabes sobre probabilidade condicionada verás que:

- **P(coche / con cambio) = 2 / 3**
- **P(coche / sen cambio) = 1 / 3**

Lembra o máis importante

Experimentos aleatorios

Non se pode predicir o resultado por moito que o experimentaramos.


Por exemplo, lanzar un dado.

- Espazo **mostral** E={1,2,3,4,5,6}
- Sucesos elementais: {1}, {2},{3},{4},{5} e {6}
- Outros **sucesos**: A={1,2}, B={2,4,6}, C={1,3,5}
- Suceso **seguro**: E={1.2.3.4.5.6}
- Suceso **imposible**: Ø={ }
- Suceso **contrario** de A: $\overline{A}$ = {3,4,5,6}

Sucesos **compatibles**: Son os que poden ocorrer a un tempo, como A e B ou A e C.
Sucesos **incompatibles**: Se non poden ocorrer a un tempo, como par e impar, B e C.

Probabilidade de sucesos

P(S. seguro) = P(E) = 1
P(S. imposible) = P(Ø) = 0
0 ≤ P(suceso) ≤ 1
Probabilidade da Unión:
P(A U B) = P(A) + P(B) se A e B son incompatibles
P(A U B) = P(A) + P(B)–P(A ∩ B) A e B compatibles.

Experimentos compostos

Están formados por varios experimentos simples realizados de forma consecutiva. Para calcular a probabilidade, multiplícanse as dos sucesos simples que o forman.

Probabilidade condicionada

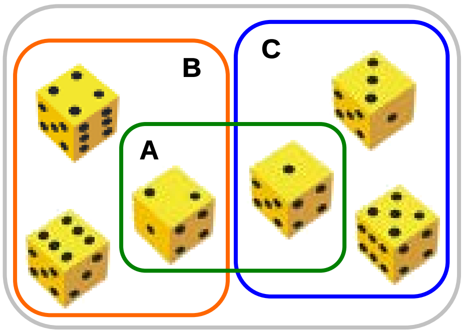
En sucesos consecutivos pódense producir dúas situacións:
1) **Independentes**, non inflúen no outro.
Como nas extraccións con devolución
2) **Dependentes**, cada suceso está condicionado polo anterior
Como nas extraccións sen devolución.

Probabilidade total

P(A)+P(V)+P(R)=1

P(C)=P(E)·P(C/E)+P(E)·P(C/A)+P(V)·P(C/V)

$$P(E/C)=\frac{P(E)\cdot P(C/E)}{P(R)\cdot P(C/E)+P(A)\cdot P(C/A)+P(V)\cdot P(C/V)}$$



Operacións con sucesos

Unión: A U B = {1,2,4,6}
Intersección: A ∩ B = {2}
Diferenza: A–B={1}

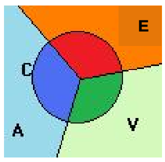
Regra de Laplace:

Cando os sucesos elementais son equiprobables:

$$P=\frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}}$$

$$\mathbf{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

P(A e B)=P(A)·P(B/A)



Para calcular a probabilidade dun suceso anterior, sabendo o que ocorreu despois, empregaremos a **fórmula de Bayes**.

Auto-avaliación

1. Tiramos un dado de 10 caras. P(obter<7)=

2. Nunha bolsa temos 6 bólas vermellas 9 bólas azuis e 5 bólas verdes. Extraemos unha bóla. Cal é a probabilidade de obter unha bóla vermella?

3. Dispoñemos dunha baralla de 100 cartas, de catro cores e numeradas do 1 ao 25. Cal é a probabilidade de obter un 23?

4. Sucesos elementais $=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,...20\}$, $A=\{1,2,3,4,5\}$, $C=\{1,2,3,4,\cdots,14,15\}$. Cal é a probabilidade de AUC?

5. Lanzamos dous dados normais. Que probabilidade hai de obter menos de 8?

6. Que probabilidade hai de non sacar nin copas nin figuras ao extraer unha carta dunha baralla española?

7. Extraemos unha carta dunha baralla española. Devolvémola e extraemos outra. Que probabilidade hai de sacar algunha figura?

8. Tiramos dúas moedas. Se saen dúas cruces extraemos unha bóla dunha urna con 3 bólas brancas e 7 negras, e en caso contrario dunha urna con 4 bólas brancas e 6 negras. Cal é a probabilidade de sacar unha bóla branca?

9. Tiramos un dado de 10 caras. Se sae menor que 7, extraemos unha carta e, no caso contrario, dúas devolvendo a 1ª antes de sacar a 2ª. Que probabilidade hai de obter algún ouro?

10. Nun colexio o 60% dos alumnos practican fútbol, o 50% baloncesto, e o 90% un ou os dous. Que probabilidade hai de que un estudante do colexio practique os dous deportes?

Solucións dos exercicios para practicar

1. $C_{20,10}/2$ = 92378
2. $V_{36,3}$ = 42840
3. $VR_{3,14} \cdot VR_{4,2} = 3^{14} \cdot 4^{2}$ = 76527504
4. $VR_{53,3} = 53^{3}$ = 148877
5. a) P_{12} = 479001600
   b) $PR_{4,3,5}$ = 27720 c) P_3 = 6
6. D4={2,4}, D6={2,4,6}, D10={2,4,6,8}, D12={2,4,6,8,10,12} e D20={2,4,6,8,10,12,14,16,18,20}
7. S imposible ={},{1}, {2}, {3}. {4}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3} {2,4}, {3,4}, {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}, S seguro = {1,2,3,4}
8. {}, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}
9. 10
10. a. 12 b. 6 c. 6
11. a. 1 carta b. 13 c. 1 d. 12 e. 19 f. 3
12. a. {2,4,6} b. {1,3,5} c. {4,6} d. {2,4,5,6} e. {2} f. {1,2,3,5}
13. Ao redor de 75 o 1 e 25 veces o 2
14. P(1)=0,1; P(2)=0,2; P(3)=0,3; P(4)=0,4
15. P(vermello)=0,3; P(verde)=0,4; P(negro)=0,2 e P(azul)=0,1
16. En 3, P(dúas caras)=3/8 e en 4, P(dúas caras)= 6/16=3/8
17. P(1)=0,7; P(3)=0,2; P(4)=0,3; P(5)=0,4; P(6)=0,1; P(7)=0,5 e P(8)=0,9
18. Sol:

Ruleta	Laranxa	Verde	Azul	Gris
1	0,3	0,25	0,15	0,3
2	0,4	0,3	0,15	0,15
3	0,1	0,2	0,1	0,6
4	0,35	0,3	0,15	0,2

19. P(RA)=0,4·0,6 =0,24, P(RB)=0,6·0,2=0,12 P(VA)=0,4·0,4=0,16
20. P(1,1)= 1/5 · 1/5 = 1/25,
    P(1,2) = 1/5 · 2/5 = 2/25
    P(1,3) = 1/5 · 2/5 = 2/25
21. P(1,1) = 0, P(1,2) = 1/5 · 1/2 = 0,1
    P(1,3) = 1/5 · 1/2 = 0,1
22. Con devolución P(2 ouros) = 1/4 · 1/4 = 1/16, sen devolución P(2 ouros) = 1/4 · 9/39
23. P(R) =P(1)·P(R/A)+P(2)·P(R/B)= =0,4·0,6+0,6·0,2=0,36
    P(V) = P(1)·P(V/A)+P(2)·P(V/B) = 0,4·0,4+0,6·0·0,8=0,64
24. P(R ó N)= P(R) +P(N) = (0,4·0,5+0,6·0,25)+(0+0,6·0,5) = 0,65.
25. P(A/V)= 0,2/0,35 = 0,57
    P(B/V) = 0,15/0,35=0,43
26. p(1) = 1/4· 1/2 + 3/4 · 2/6 = 3/8,
    P(dúas caras/1) = 1/3
27. a) 0,2 b) 0,4 b) 0,5

Solucións AUTO-AVALIACIÓN

1. 6/10=0,6
2. 6/20=0,3
3. 4/100=0,04
4. 15/20=0,75
5. 21/36=7/12
6. 21/40
7. 816/1600=0,051
8. 0,375
9. 17/40
10. 0,2