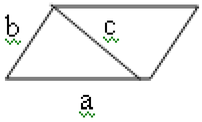
ÁREA DEL TRIÁNGULO DE LADOS a, b, c
FÓRMULA DE HERÓN



$$\left(\acute{A}rea\ (abc)\right)^2 = \frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}$$

Dem:

$$\left(2\acute{A}rea(abc)\right)^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix} \overset{u\cdot v=\frac{u^2+v^2-(u-v)^2}{2}}{\triangleq} \begin{vmatrix} a^2 & \frac{a^2+b^2-c^2}{2} \\ \frac{a^2+b^2-c^2}{2} & b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a^2b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4} = \frac{4a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4} =$$

$$= \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4}$$

El segundo miembro del enunciado , para el cuadrado del área del paralelogramo es

$$4\,\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2} =$$

$$\frac{a^4 - b^4 - c^4 - 2a^3b + 2a^3b - 2a^3c + 2a^3c - 2b^3a + 2b^3a + \cdots}{4}$$

Es fácil ver que solo quedan los términos con una variable a la cuarta y los términos con dos variables distintas al cuadrado.

Por ejemplo ¿cuántos términos hay con a^2b^2 ?
Se obtienen con dos a y dos b tomando para sacar a dos factores :

12, 13, 14, 23, 24, 34,

Son 6 factores, de los que dos salen negativos

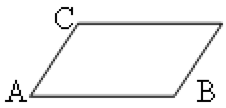
el 14: $a \cdot b \cdot -b \cdot a$ y el 23 $b \cdot -a \cdot a \cdot b$

los otros cuatro resultan positivos, por tanto queda $2a^2b^2$ en el numerador.

Así concluimos que los dos miembros del enunciado coinciden.

Veamos otra presentación de la fórmula:

DETERMINANTE DE CAYLEY-MENGER



$$(AREA(ABCD))^2 = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Dem:

$$(\text{Area}(ABCD))^2 = S^2 = \det\left(\begin{pmatrix} \vec{AB} \\ \vec{AC} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{AB} \\ \vec{AC} \end{pmatrix}^T\right) = \begin{vmatrix} AB^2 & \vec{AB}\cdot\vec{AC} \\ \vec{AB}\cdot\vec{AC} & AC^2 \end{vmatrix}$$

y teniendo en cuenta que $2\,u\cdot v = (u-v)^2 - u^2 - v^2$, resulta

$$S^2 = \begin{vmatrix} AB^2 & \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} \\ \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} & AC^2 \end{vmatrix}$$

Lo que equivale a la fórmula de Herón. Vamos a jugar un poco con esta fórmula para ponerla como se presenta al principio con el determinante de Cayley-Merger

$$S^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2\cdot AB^2 & AB^2 + AC^2 - BC^2 \\ AB^2 + AC^2 - BC^2 & 2\cdot AC^2 \end{vmatrix} \overset{\text{Añado una fila}}{=}$$

$$\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 2\cdot AB^2 & AB^2 + AC^2 - BC^2 \\ 0 & AB^2 + AC^2 - BC^2 & 2\cdot AC^2 \\ 1 & AB^2 & AC^2 \end{vmatrix} \overset{\text{Resto fila 3}}{=}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -1 & AB^2 & AB^2 - BC^2 \\ -1 & AC^2 - BC^2 & AC^2 \\ 1 & AB^2 & AC^2 \end{vmatrix} \overset{\text{Añado una columna}}{=} -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & AB^2 & AB^2 - BC^2 & AB^2 \\ -1 & AC^2 - BC^2 & AC^2 & AC^2 \\ 1 & AB^2 & AC^2 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Resto col4} \\ \text{a col2 y a col3}}}{=}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -BC^2 & AB^2 \\ -1 & -BC^2 & 0 & AC^2 \\ 1 & AB^2 & AC^2 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{Por }-1\text{ col2 y col3}}{=} -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & BC^2 & AB^2 \\ -1 & BC^2 & 0 & AC^2 \\ 1 & -AB^2 & -AC^2 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{Por }-1\text{ col1 y fila 14}}{=}$$

$$-\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & BC^2 & AB^2 \\ 1 & BC^2 & 0 & AC^2 \\ 1 & AB^2 & AC^2 & 0 \end{vmatrix} \text{ este es el determinante de Cayley Merger}$$