Las categorías

Objetivo

El objetivo de este primer interactivo es introducir el estudio de las categorías, functores y transformaciones naturales. Para esto nos enfocamos primero en el concepto de categoría el cual es una generalización de la teoría de conjuntos clásica y demostraremos su aplicabilidad y necesidad de aprenderlas.

Lección 1– Las Categorías – Una situación familiar

Motivación

Las categorías fueron creadas como abstracciones de situaciones matemáticas complejas con la idea de simplificarlas. Conforme la teoría de categorías evolucionó, las categorías resultaron ser una generalización poderosa que tuvo el efecto de unificar a las matemáticas y proveer otro punto de vista para estudiar sus fundamentos.

El uso del método axiomático y de la teoría de conjuntos creó una revolución en el desarrollo de las matemáticas durante el siglo 20 permitiendo estudiar clases de objetos y las estructuras que los constituyen. El lenguaje que la teoría de conjuntos nos provee es muy efectivo para este fin. Sin embargo, conforme el pensamiento matemático fue evolucionando en este periodo, resultó cada vez más claro que es aún más importante entender el comportamiento de los objetos matemáticos y las relaciones que existen entre ellos y que el lenguaje de la teoría de conjuntos carece de las cualidades necesarias para este estudio.

En contraste, la teoría de categorías, más que un conjunto de herramientas para hacer matemáticas, nos ofrece una filosofía, esto es, una forma poderosa de ver y pensar sobre las matemáticas que nos permite una unificación conceptual y nos provee con un lenguaje eficaz y efectivo para estudiar estos nuevos aspectos de los objetos.

Además, su generalidad y flexibilidad permitió aplicarlas a otras situaciones dentro y fuera de las matemáticas y aunque tienen la reputación de ser muy abstractas, el enfoque que usaremos va a mostrar su aspecto práctico. Es precisamente por su generalidad que tiene un rango de aplicación muy extenso, incluyendo las ciencias no exactas, tales como la lingüística, las ciencias cognitivas, la psicología, etc.

Inicio 1 - Descubriendo las categorías: Una situación familiar

Para que descubras las categorías vamos primero a analizar una situación cotidiana y por lo tanto muy intuitiva. En esta escena, nos enfocamos en el concepto de categoría presentando una situación familiar de la vida.

En esta situación, vamos a estudiar la estructura de relaciones que existe entre los diferentes miembros o grupos de miembros de esta familia. Pensemos en una familia tradicional formada por una pareja de casados que tienen un hijo.

Ejemplos

Por ejemplo, el papá es parte de la pareja de casados, como también lo es la mamá. Sin embargo el hijo no es parte de la pareja de casados ni el papá es parte de la pareja mamá e hijo, pero el papá, la mamá, el hijo y la pareja de casados son parte de la familia.

Para ver todas las relaciones que existen vamos a ayudarnos estableciendo una notación gráfica. Por ejemplo, la relación "papá es parte de pareja de casados" la podemos mostrar como:

$$\text{papá} \rightarrow \text{pareja de casados}$$

Podemos simplificar aún más abreviando a papá con "p" y a pareja de casados con "c":

$$p \rightarrow c$$

También podemos nombrar a la flecha "α" y entonces escribimos:

$$p \xrightarrow{\alpha} c$$

Vamos a usar las abreviaciones siguientes en los ejemplos y ejercicios que puedes explorar:

p para papá,
m para mamá,
h para hijo,
ph para papá e hijo,
c para pareja de casados,
mh para para mamá e hijo,
f para familia

Usando la notación de flechas, y las abreviaciones, vimos en los ejemplos como escribir las siguientes relaciones:

1. "mamá es parte de pareja de casados"
2. "papá no es parte de mamá e hijo"

Desarrollo 1 - Descubriendo las categorías: Ejercicios

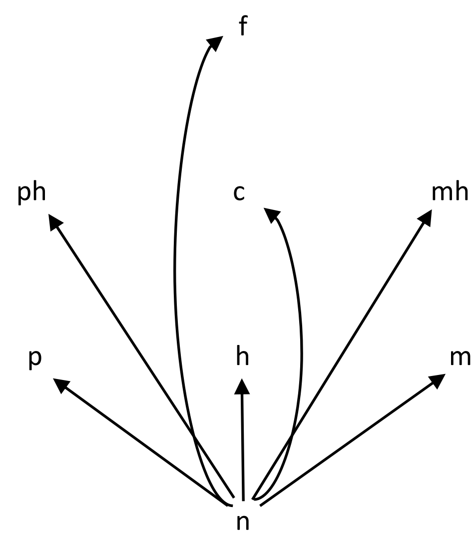
Como se vio en los ejemplos, puede existir o no la relación "**es parte de**" dados dos miembros o grupos de miembros de esta familia. Cuando existe esta relación decimos que es válida y cuando no decimos que no es válida. Por ejemplo, "hijo **es parte de** la pareja de casados" no es una relación válida.

En los ejercicios tienes que decidir si la relación existe o no, i.e., si es válida o no, entre dos miembros o grupos de miembros de la familia. Presiona el botón "FLECHA" para indicar que la relación es válida y "NO FLECHA" para indicar que no es válida. Para ver la respuesta, presiona el botón "RESPUESTA".

Desarrollo 2 - Descubriendo las categorías: Elementos especiales - 1

A veces en matemáticas es conveniente considerar elementos especiales que en la vida cotidiana pueden parecer innecesarios o incluso absurdos pero que ayudan a completar la estructura que se está estudiando. En el caso que estamos estudiando hay un objeto y varias relaciones en dos situaciones:

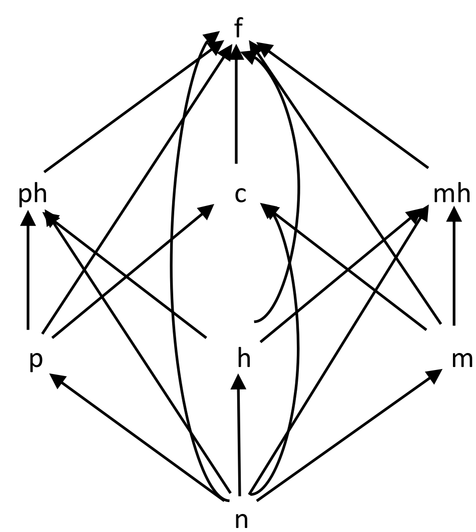
Vamos también a considerar a “nadie”, que abreviaremos como “n”, como un miembro de la familia que va a ser parte de cualquier miembro o grupo de miembros. En términos de flechas, esto lo indicamos con una flecha con cola “n” y con punta cada uno de los miembros o grupo de miembros de la familia. Si combinamos todos estos diagramas obtenemos un ‘súper’ diagrama:



Cierre - Descubriendo las categorías: El concepto fundamental de morfismo y una vista global

Una vista global

Combinando todos los diagramas individuales en un ‘súper’ diagrama y usando las abreviaciones antes definidas obtenemos un diagrama que muestra todas las relaciones familiares que hasta ahora hemos definido.



Ingredientes para formar una categoría

Con este ejemplo de una familia y la relación familiar intuitiva "**es parte de**" representada por una flecha, hemos empezado a encontrar los ingredientes requeridos para la noción de categoría. Se tiene, en este ejemplo, dos colecciones:

1. Una son los objetos formados por los miembros de la familia o los grupos de miembros de la familia. Usando las abreviaciones, la colección total de objetos consta de 8: **{n, p, h, m, ph, c, mh, f}**.
2. La otra es la colección de flechas entre los objetos. Por ejemplo, hasta ahora hemos vista que hay 7 flechas **n** $\rightarrow$ **x**, 3 flechas **p** $\rightarrow$ **x**, 3 flechas **m** $\rightarrow$ **x**, 3 flechas **h** $\rightarrow$ **x**, 1 flecha **ph** $\rightarrow$ **f**, 1 flecha **pm** $\rightarrow$ **f** y 1 flecha **c** $\rightarrow$ **f,** donde **x** representa a los objetos que hacen que la relación "**es parte de**" sea válida. Por ejemplo, en el caso de **p** $\rightarrow$ **x**, **x** solo puede ser **p**, **ph,** o **f.**

En nuestro caso particular, solo hay dos posibilidades de flechas entre objetos: 0 o 1 flecha. Hay flechas entre dos objetos cuando la relación "**es parte de**" es **válida** y como vimos en los ejercicios y ejemplos, no hay flecha cuando la relación "**es parte de**" **no** es **válida**. Así por ejemplo, no hay flecha entre **ph** y **c**, porque **padre e hijo** no "**es parte de**" pareja.

En general podemos tener 0, un número finito de objetos, como en nuestro ejemplo, o un número infinito. En categorías más complicadas, son las relaciones entre los objetos y el número de estos que determinan cuantas flechas hay. Podemos tener 0, 1, un número finito, o un número infinito de flechas.

Otros Ingredientes necesarios para formar una categoría

Entre las flechas vamos a poder definir una operación parcial que satisface ciertas propiedades en lecciones subsecuentes. Con esto completaremos la lista de ingredientes que constituyen una categoría.

Morfismos

Otro nombre que le damos a las flechas es **morfismos.** Al objeto de la cola de la flecha se le llama **dominio** y al objeto en la punta de la flecha se le llama condominio. Así, en el caso del morfismo **p** $\rightarrow$ **c**, el dominio es **p** y el codominio es **c.**

Teoría de categoría vs Teoría de conjuntos

Es el concepto de morfismo lo que distingue a la teoría de categorías de la teoría de conjuntos. En la teoría de conjuntos el concepto fundamental es membresía, i.e. el que un elemento sea miembro de un conjunto. En la teoría de categorías, el concepto fundamental es el de morfismo. Veremos en otras lecciones que la teoría de conjuntos es un caso especial de la teoría de categorías.

Aunque nuestro ejemplo es un caso muy particular, sin embargo, además de empezar a mostrar un ejemplo intuitivo de categoría, muestra como las categorías existen fuera del contexto usual de las matemáticas en áreas donde las matemáticas tradicionalmente no operan.

Referencias

1. Lawvere, F. W. and Schanuel, S.H. (1991*). Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories.* Buffalo Workshop Press, Buffalo NY.
2. Magnan, F. and Reyes, G. E. (1994). Category Theory as a Conceptual Tool in the Study of Cognition (Ch. 5). In Macnamara, J. and Reyes, G. E. (Eds.). The logical foundations of cognition. Oxford University Press.