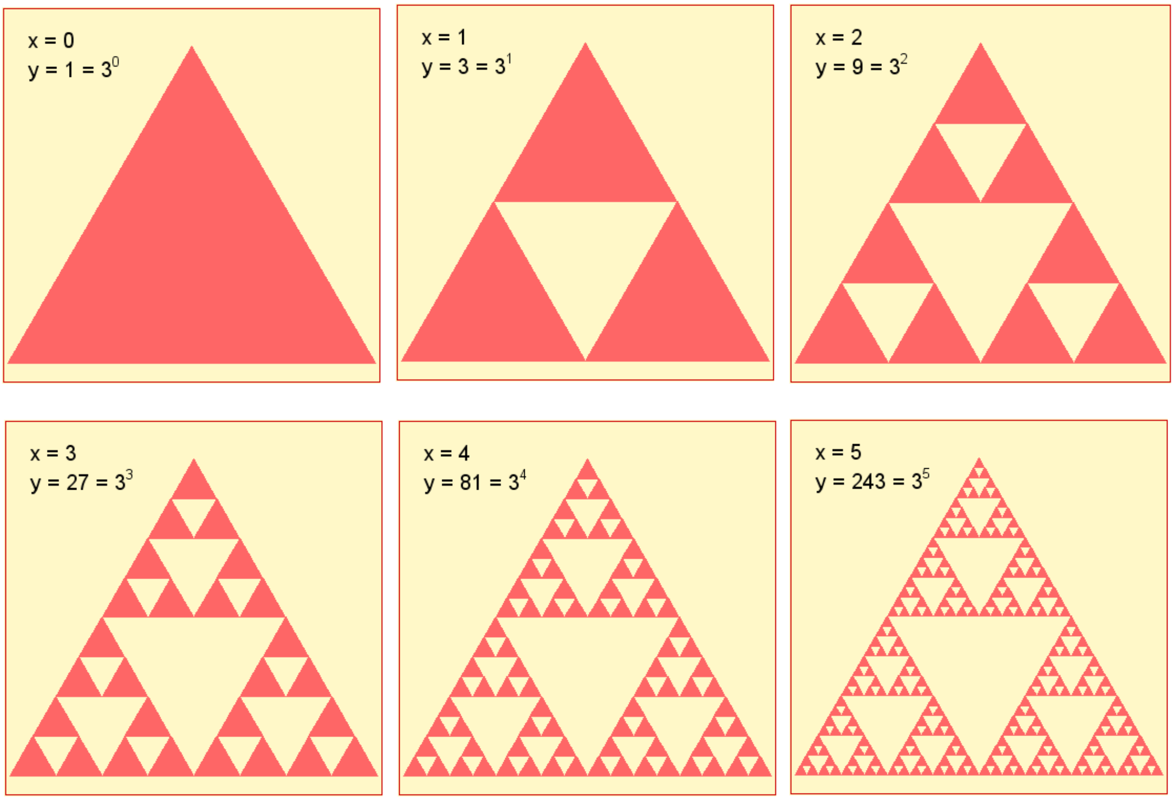
10 Funciones elementales

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer y distinguir algunas de las funciones más habituales.
- Utilizar algunas funciones no lineales: cuadráticas, de proporcionalidad inversa y exponenciales
- Reconocer las características más importantes de esos tipos de funciones
- Representar e interpretar funciones "definidas a trozos"
- Buscar e interpretar funciones de todos estos tipos en situaciones reales

Antes de empezar



Investiga

Un investigador está haciendo un estudio de una cierta población de microbios. Ha comprobado que cada hora que pasa cada elemento de la población se divide en otros tres. La animación que acabas de ver es una simulación de este experimento.
La tabla adjunta muestra la relación entre el número de individuos de la población y el tiempo transcurrido:

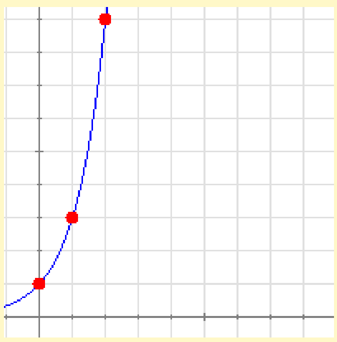
Horas	0	1	2	3	4	5	6
Nº mic	1	3	9	27	81	243	729

Como puedes ver si llamamos x al tiempo e y al número de individuos tenemos:

$$y = 3^x$$

Es un ejemplo de función exponencial.

La gráfica de esta función tiene este aspecto:



Como puedes comprobar su crecimiento es rapidísimo. ¿Podrías calcular cuanto tiempo tardaría en alcanzarse una población de un millón de individuos?

1. Funciones polinómicas

Función de proporcionalidad directa

Como su nombre indica, la función de proporcionalidad directa o **función lineal** relaciona dos magnitudes directamente proporcionales, es decir, tales que su cociente es constante. Dicho cociente recibe el nombre de **constante de proporcionalidad**.

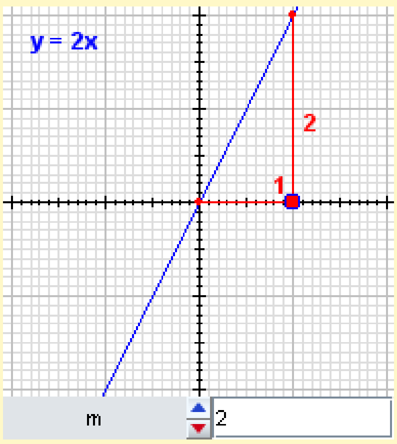
De la definición se deduce que la ecuación de la función lineal es

$$y = m \cdot x$$

Donde ***m*** es la constante de proporcionalidad.

La gráfica de esta función es siempre una línea recta que pasa por el origen (*si x=0, entonces y=0*), creciente si ***m*** es positiva, decreciente si ***m*** es negativa y tanto más cerca de la vertical cuanto mayor sea el valor absoluto de ***m***. Por ese motivo también se llama a ***m*** **pendiente** de la recta.

EN RESUMEN: Las ecuaciones del tipo $y = m \cdot x$ representan funciones lineales o de proporcionalidad directa.



- **Si m>0 es creciente**
- **Si m<0 es decreciente**

(Observa qué sucede si m=0)

Por su parte, la constante de proporcionalidad es una medida de la inclinación de la recta.

La llamamos **pendiente**.

$$m = \frac{2}{1} = 2$$

Las rebajas

Han llegado las rebajas y en una tienda han decidido clasificar todos sus productos en tres lotes, A, B y C, a los que van a aplicar el 20%, el 30% y el 50% de descuento, respectivamente.

Si llamamos **x** al precio inicial e **y** al precio final, las tablas que ves debajo muestran los cambios de varios productos de los distintos lotes:

Lote A: 20%		Lote B: 30%		Lote C: 50%	
x	y	x	y	x	y
375,00 €	300,00 €	213,00 €	149,10 €	297,00 €	148,50 €
452,00 €	361,60 €	198,00 €	138,60 €	561,00 €	280,50 €
126,00 €	100,80 €	321,00 €	224,70 €	319,00 €	159,50 €
180,00 €	144,00 €	202,00 €	141,40 €	56,00 €	28,00 €
412,00 €	329,60 €	135,00 €	94,50 €	87,00 €	43,50 €

Lote A: 20%		
x	y	y/x
375,00 €	300,00 €	0,8
452,00 €	361,60 €	0,8
126,00 €	100,80 €	0,8
180,00 €	144,00 €	0,8
412,00 €	329,60 €	0,8

Vamos a analizar cada caso dividiendo el precio rebajado por el precio inicial.

Como puedes observar, en el primer lote todos los cocientes son iguales. Como hemos visto, eso significa que el precio rebajado es **directamente proporcional** al precio inicial y, en este caso, la constante de proporcionalidad es 0,8.

Por tanto, para el lote A tenemos: $y = 0{,}8 \cdot x$

Lote B: 30%			Lote C: 50%		
x	y	y/x	x	y	y/x
213,00 €	149,10 €	0,7	297,00 €	148,50 €	0,5
198,00 €	138,60 €	0,7	561,00 €	280,50 €	0,5
321,00 €	224,70 €	0,7	319,00 €	159,50 €	0,5
202,00 €	141,40 €	0,7	56,00 €	28,00 €	0,5
135,00 €	94,50 €	0,7	87,00 €	43,50 €	0,5

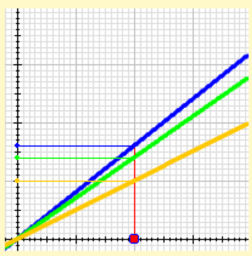
En los otros lotes sucede algo parecido, pero en cada caso la constante de proporcionalidad es diferente de manera que:

para el lote B tenemos: $y = 0{,}7 \cdot x$

para el lote C tenemos: $y = 0{,}5 \cdot x$

en cualquier caso todas tienen la forma $y = m \cdot x$

Vamos a analizar ahora las gráficas de las tres funciones: Como ves las tres son ***líneas rectas que pasan por el origen***, con mayor inclinación cuanto más grande es la constante de proporcionalidad.



x = 200,00 €

Lote A:
y = 160,00 €

Lote B:
y = 140,00 €

Lote C:
y = 100,00 €

EJERCICIOS resueltos

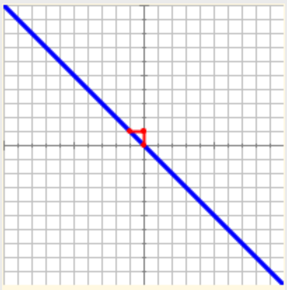
1. Averigua si las funciones definidas por los datos de la tablas adjuntas son o no son funciones lineales. En caso afirmativo calcula su pendiente y dibuja su gráfica:

x	y	y/x
-3	4,55	-1,52
-1	0,51	-0,51
1	0,51	0,51
3	4,55	1,52
5	12,64	2,53

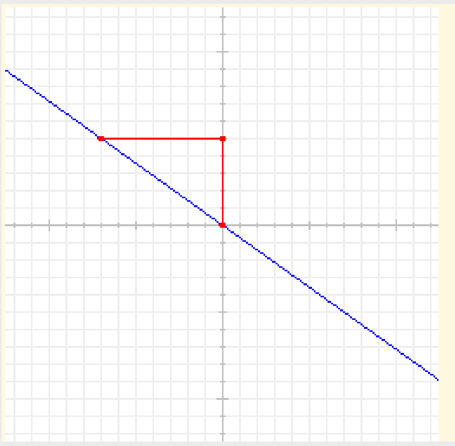
Como vemos, al dividir y por x no se obtienen siempre el mismo valor, por lo tanto las dos magnitudes no son directamente proporcionales y la función que representa esta tabla **no es lineal**.

x	y	y/x
-3	3	-1
-1	1	-1
1	-1	-1
3	-3	-1
5	-5	-1

En este caso los cocientes son todos iguales, por lo tanto, las magnitudes que representan x e y son directamente proporcionales y la función que las relaciona **sí es lineal**. La pendiente es la constante de proporcionalidad m=-1 y la gráfica es



2. Determina la pendiente y la ecuación de la función cuya gráfica es:



Como es una recta que pasa por el origen se trata de una función lineal de ecuación y=mx.

Para hallar la pendiente localizamos un punto con dos coordenadas enteras. En este caso el punto (-7,5). La pendiente se calcula dividiendo la segunda coordenada por la primera, así pues,

$$m = -\frac{5}{7}$$

y la ecuación de la función es

$$y = -\frac{5}{7}x$$

Funciones afines

Podemos considerar a una **función afín** como una función lineal a la que se le han aplicado ciertas *condiciones iniciales*. Aunque no representa a dos magnitudes directamente proporcionales, existe entre ellas cierta proporcionalidad como verás en la escena adjunta.

La ecuación de la función afín es

$$y = m \cdot x + n$$

Donde m sigue representando esa cierta *proporcionalidad* y n representa las *condiciones iniciales*.

Su gráfica es una línea recta que corta al eje Y en el punto n (*si x=0, entonces y=n*). Por ese motivo también se dice que ***n*** es la **ordenada en el origen** de la recta. La ***m*** tiene el mismo significado que en las funciones lineales.

En una empresa de alquiler de vehículos cobran 50€ por el contrato de alquiler más 0,20€ por kilómetro recorrido. Queremos encontrar una ecuación que nos permita calcular con facilidad el precio de un alquiler en función de la distancia recorrida.

x (km)	Y (€)
0	50,00 €
100	70,00 €
200	90,00 €
300	110,00 €
400	130,00 €

La empresa nos proporciona la tabla adjunta para que nos podamos hacer una idea del precio.

Lo primero que observamos es que si duplicamos el número de km, el precio no se duplica: **las magnitudes no son directamente proporcionales**.

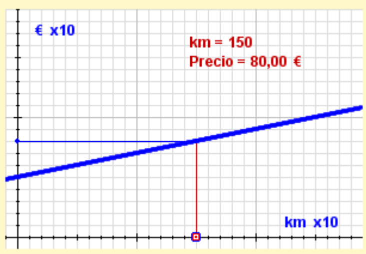
Vamos a analizar con más detalle la situación:
Si descontamos en cada caso el valor inicial y dividimos el precio por la distancia obtenemos siempre el mismo cociente, es decir, ***el precio (descontado el coste inicial) sí es directamente proporcional a la distancia***. El valor obtenido es la constante de proporcionalidad como en el caso anterior.

x (km)	y (€)	y-50	(y-50)/x
0	50,00 €		
100	70,00 €	20,00 €	0,20
200	90,00 €	40,00 €	0,20
300	110,00 €	60,00 €	0,20
400	130,00 €	80,00 €	0,20

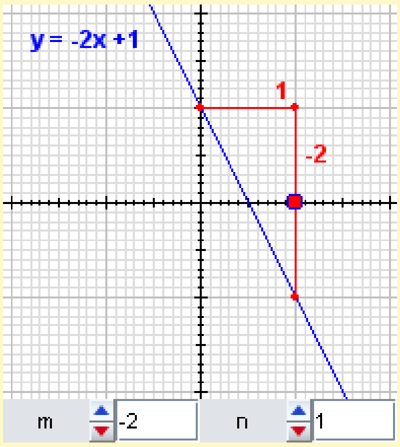
Por tanto, $y-50 = 0{,}2 \cdot x$ de donde se deduce que:

$y = 0{,}2 \cdot x + 50$ que tiene la forma $y = m \cdot x + n$

Al igual que en las funciones lineales la **m** representa la pendiente y ahora la **n** representa el punto en el que la recta corta al eje Y.



EN RESUMEN: Las ecuaciones del tipo $y = m \cdot x + n$ representan funciones afines.



- **Si m>0 es creciente**
- **Si m<0 es decreciente**

(Observa qué sucede si m=0)

La pendiente se calcula ahora con respecto a la ordenada en el origen.

$$m = \frac{-2}{1} = -2$$

EJERCICIOS resueltos

3. Una agencia de alquiler de coches cobra por un determinado modelo 0€ al contratar y 0,50€ por km recorrido. En otra agencia cobran 30€ al contratar y 0,30€ por km recorrido. Analiza, en función de los km recorridos cuál es la agencia más ventajosa.

Si llamamos x a los km recorridos e y precio total del alquiler, para la prime agencia tenemos:

$y = 0{,}50\,x$

Para la segunda:

$y = 0{,}30\,x + 30$

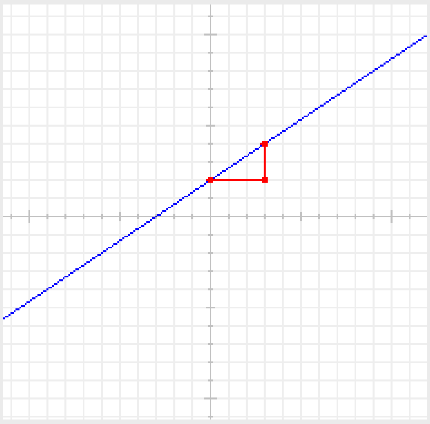
Resolviendo el sistema de ecuacione obtenemos las coordenadas del pun de corte:

$0{,}50\,x = 0{,}30\,x + 30$

$x = \frac{30}{0{,}20} = 150$

Por tanto, hasta 150 km es mejor la primera (su gráfica queda por debajo).
A partir de esa distancia es mejor la segunda.

4. Determina las ecuaciones de las funciones correspondientes a las gráficas:



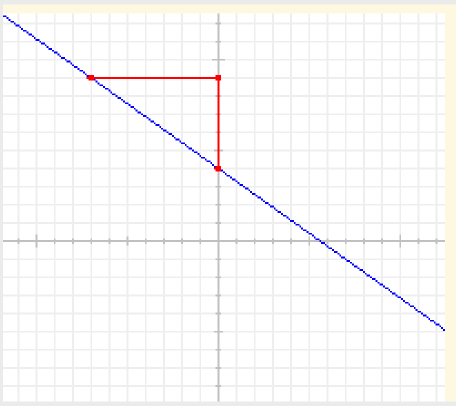
Por ser una recta que no pasa por el origen, se trata de una función afín de ecuación y=mx+n.

El valor de n es el punto en el que la recta corta al eje Y, por tanto, n=2.

Como la recta es creciente, la pendiente es positiva.

Para hallar la pendiente buscamos otro punto con coordenadas enteras, por ejemplo (3,4), trazamos un triángulo rectángulo que lo una con el punto de corte con el eje Y (0,2). El cociente entre el cateto vertical y el horizontal me da la pendiente: m=2/3 y la ecuación es

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$



En este caso n=4.

Como la recta es decreciente, la pendiente es negativa.

Para hallar la pendiente buscamos otro punto con coordenadas enteras, por ejemplo (-7,9), trazamos un triángulo rectángulo que lo una con el punto de corte con el eje Y (0,4). El cociente entre el cateto vertical y el horizontal me da la pendiente: m=-5/7 y la ecuación es

$$y = -\frac{5}{\ }x + 4$$

Funciones cuadráticas

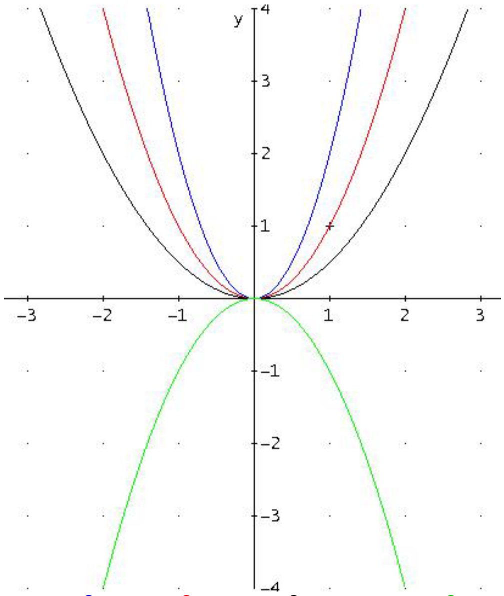
Una **función cuadrática** es la que viene representada por un polinomio de segundo grado (*la x está elevada al* ***cuadrado***).

La ecuación de la función cuadrática es

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

El significado de los coeficientes a, b y c se explica en las escenas adjuntas.

Su gráfica es una curva especial denominada **parábola**. Este tipo de curvas se encuentra con facilidad en la vida real pues es la curva que describe cualquier objeto lanzado al aire y sometido a la influencia de la gravedad.

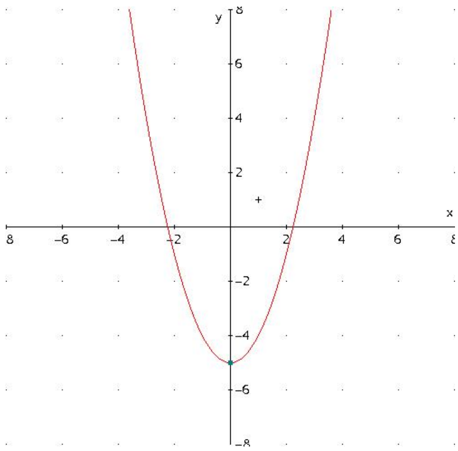


$y=2x^2$ $y=x^2$ $y=x^2/2$ $y=-x^2$

Caso 1: b = c =0. $y=ax^2$

Características:

1. Siempre pasa por el origen.
2. Es simétrica respecto al eje Y.
3. Si a>0 está abierta hacia arriba.
4. Si a<o está abierta hacia abajo.
5. Cuanto mayor es |a|, más cerrada está.
6. El origen es el **vértice** de la parábola.
7. Si a>0 el vértice es un mínimo.
8. Si a<0 el vértice es un máximo.



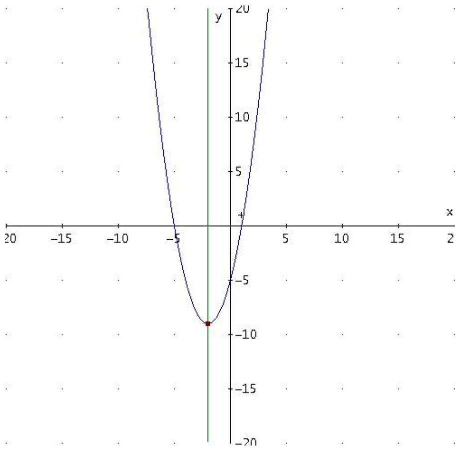
$y=x^2-5$

Caso 2: b=0. $y=ax^2+c$

Características:

1. El vértice es el punto (0,c)
2. Si a y c tienen el mismo signo, no corta al eje X.
3. Si a y c tienen distinto signo, corta en dos puntos al eje X.
4. Las demás propiedades se mantienen, en particular el significado de a sigue siendo el mismo.

Sumar o restar c produce un desplazamiento vertical de la gráfica.



$y=x^2+4x-5$

Caso general: $y=ax^2+bx+c$

Características:

1. El eje de simetría es $x=-\dfrac{b}{2a}$
2. El vértice se calcula sustituyendo el valor anterior en la ecuación.
3. Ahora, c representa solo el punto de corte con el eje Y.
4. Las demás propiedades se mantienen.

b representa una cierta medida del desplazamiento horizontal de la gráfica.

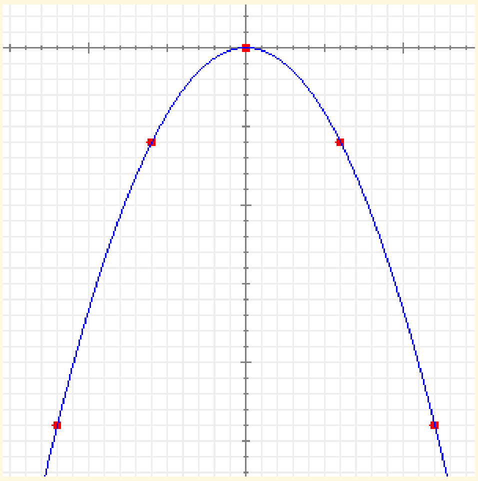
EJERCICIOS resueltos

5. **Dibuja la gráfica de la función** $y = -\frac{1}{6}x^2$

Como ya sabemos, las funciones del tipo $y = ax^2$ son parábolas simétricas con respecto al eje Y y con el vértice en el origen de coordenadas.

Como en este caso a < 0, la parábola está abierta hacia abajo. Para hallar las coordenadas de otros puntos damos unos cuantos valores a la x teniendo en cuenta la simetría:

x	-12	-6	0	6	12
y	-24	-6	0	-6	-24



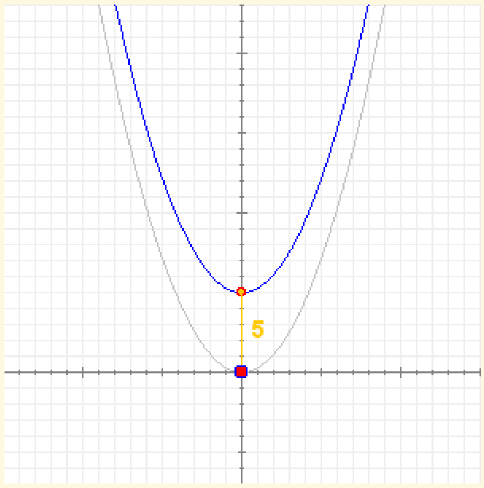
6. **Dibuja la gráfica de la función** $y = \frac{2}{7}x^2 + 5$

Es una función del segundo tipo, por lo que su gráfica será igual que la de la función

$$y = \frac{2}{7}x^2$$

pero desplazada 5 unidades hacia arriba.

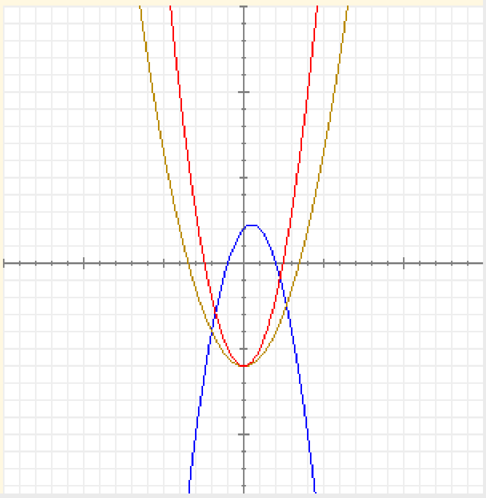
Por tanto, solo tenemos que dibujar esta función como se explicó en el ejercicio anterior y luego desplazarla 5 unidades hacia arriba.



7. **Asocia de forma razonada cada gráfica con su ecuación**

1) $y = -x^2 + x + 2$
2) $y = 0{,}5x^2 - 6$
3) $y = x^2 - 6$

Recuerda que el signo de a indica hacia donde está abierta.
El valor de c indica el punto de corte con el eje Y.
Si b ≠ 0, el eje de simetría de la parábola no coincide con el eje Y.
Cuanto mayor es el valor absoluto de a más cerrada está la parábola y viceversa.



EJERCICIOS resueltos

8. **Dibuja la gráfica de la función $y = x^2 + 8x + 15$**

En este caso el proceso consiste en seguir los siguientes pasos:

1) Determinar si está abierta hacia arriba o hacia abajo: **Como a = 1 está abierta hacia arriba**

2) Hallar el punto de corte con el eje Y: **Si x = 0, entonces y = 15**

3) Hallar los puntos de corte con el eje X

Un punto está en el eje X si su segunda coordenada (la y) es igual a cero. Luego tenemos que resolver la ecuación

$$x^2 + 8x + 15 = 0; \qquad x = \frac{-8 \mp \sqrt{64 - 60}}{2}; \quad x1 = -5\,;\ x2 = -3$$

4) Hallar el vértice. Para ello recordamos que el vértice se encuentra en el punto de abscisa **$x = -b/2a = -4$** y la segunda coordenada del vértice se obtiene sustituyendo este valor en la función: **$y = -1$**

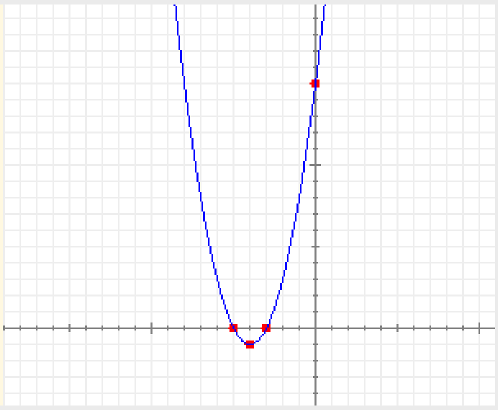
Resumiendo:

está abierta hacia arriba

Pasa por el punto **(0, 15)**

Corta al eje X en **(-5 ,0)** y en **(-3 ,0)**

El vértice es **(-4 , -1)**



2. Otras funciones

VIAJE DE ESTUDIOS

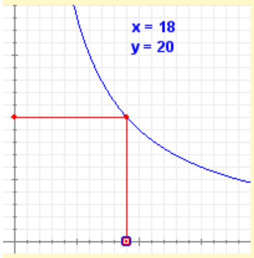
Un grupo de alumnos quiere organizar una excursión y para ello piden presupuesto a una agencia de viajes que les pide 360 € por el alquiler de una autocar sea cual sea el número de alumnos que se apunten.

Los organizadores están un poco preocupados porque solo son 10 y 36€ les parece mucho dinero. Poco a poco van convenciendo a más compañeros y al final reúnen un grupo de 30 alumnos (el triple de los iniciales), por lo que el viaje les sale a 12€ por persona (la tercera parte de la cantidad inicial).

Tenemos un ejemplo de proporcionalidad inversa: ***el precio por alumno es inversamente proporcional al número de alumos***.

Si llamamos **x** al número de alumnos e **y** al precio que debe pagar cada uno, está claro que se cumple:

$$x \cdot y = 360 \quad \text{o bien,} \quad y = \frac{360}{x}$$



Tenemos una función de proporcionalidad inversa cuya constante de proporcionalidad es 360.

La gráfica adjunta muestra cómo varía el precio en función del número de alumnos:

Función de proporcionalidad inversa

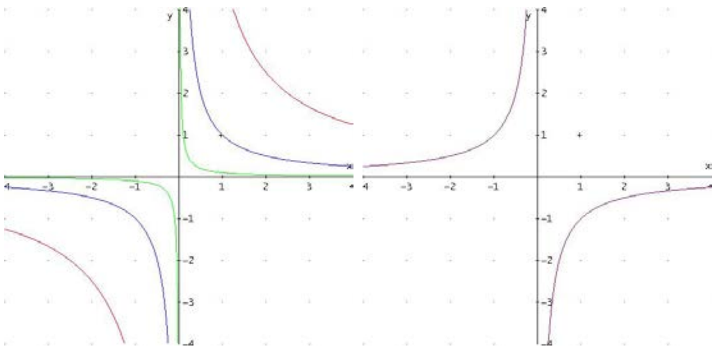
Como su nombre indica, la función de proporcionalidad inversa relaciona dos magnitudes inversamente proporcionales, es decir, tales que su producto es constante. Dicho producto recibe el nombre de **constante de proporcionalidad**

La ecuación de esta función es

$$y = \frac{k}{x} \qquad \text{ó} \qquad x \cdot y = k$$

Donde **k** es la constante de proporcionalidad.

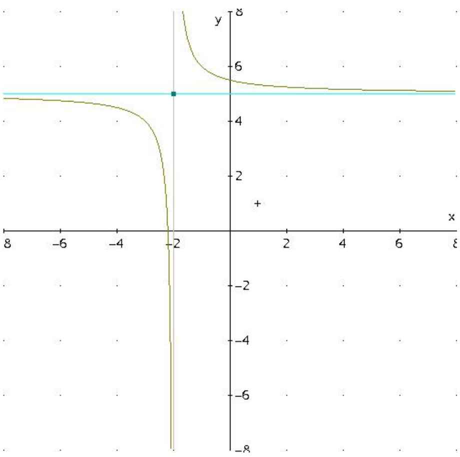
Su gráfica es una curva especial denominada **hipérbola**. Se trata de un tipo de curva que tiende a parecerse a una línea recta cuando nos alejamos del origen.



$x \cdot y = 1$ **$x \cdot y = 5$** **$x \cdot y = 1/10$** **$x \cdot y = -1$**

Características:

1. Función discontinua en el origen.
2. Cuanto mayor es |k| más se aleja de los ejes.
3. Si k>0 la gráfica está en los cuadrantes 1 y 3.
4. Si k<0 la gráfica está en los cuadrantes 2 y 4.
5. Es impar (simétrica respecto del origen).
6. Las dos ramas de la gráfica se van aproximando a los ejes. Decimos que los ejes son **asíntotas** de esta función.



Si cambiamos x por x-a e y por y-b, la gráfica se desplaza de manera que ahora el vértice es (a,b), las asíntotas son las rectas x=a e y=b.
La gráfica de la izquierda corresponde a la función:

$$\mathbf{(x+2) \cdot (y-5) = 1}$$

Función exponencial

Una **función exponencial** es una función definida por una potencia en la que la base es constante y el exponente es variable. Por motivos de operatividad sólo se admiten bases positivas y distintas de 1.

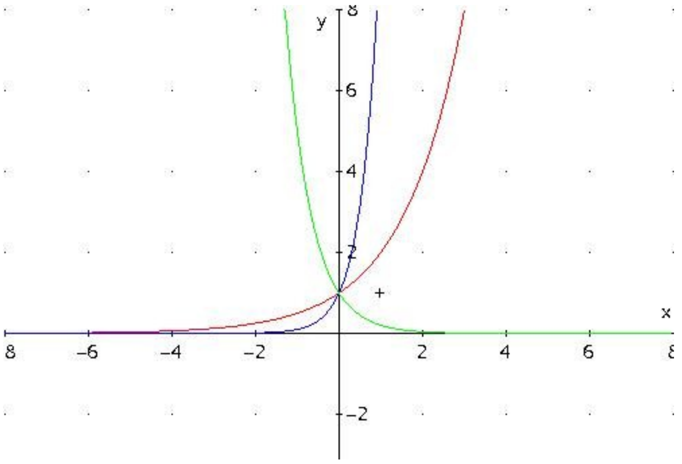
La ecuación de esta función es

$$y = k \cdot a^x$$

Donde a es cualquier número real mayor que cero y distinto de uno, y k es una constante que aleja o acerca la gráfica al eje X.

Al igual que las hipérbolas su gráfica tiene siempre una asíntota, pero a diferencia de ellas no es simétrica. Su principal característica es la de presentar un crecimiento o un decrecimiento muy rápido.

Caso 1: $k=1$. $\quad y=a^x$



$y=2^x$ $\quad y=10^x$ $\quad y=(0{,}2)^x$

Características:

1. Es creciente si $a>1$ y decreciente si $a<1$.
2. Corta al eje Y en el punto (0,1).
3. No corta al eje X.
4. La recta $y=0$ es una asíntota horizontal (por la izquierda si $a>1$ y por la derecha si $a<1$).

Caso general:
Cuanto mayor sea $|k|$ más se aleja la gráfica del eje X. Si k es negativo las gráficas pasan a los cuadrantes 3 y 4 y las funciones crecientes se transforman en decrecientes y viceversa.

En un banco me proponen una inversión a largo plazo al 3% anual de forma que los intereses se acumulan al capital. En la tabla se muestra un ejemplo a 10 años para un capital inicial de 20.000€

ANOS	CAPITAL INICIAL	INTERESES	CAPITAL FINAL
1	20.000,00 €	600,00 €	20.600,00 €
2	20.600,00 €	618,00 €	21.218,00 €
3	21.218,00 €	636,54 €	21.854,54 €
4	21.854,54 €	655,64 €	22.510,18 €
5	22.510,18 €	675,31 €	23.185,48 €
6	23.185,48 €	695,56 €	23.881,05 €
7	23.881,05 €	716,43 €	24.597,48 €
8	24.597,48 €	737,92 €	25.335,40 €
9	25.335,40 €	760,06 €	26.095,46 €
10	26.095,46 €	782,86 €	26.878,33 €

Vamos a buscar una ecuación que nos sirva para cualquier plazo.

Vamos a llamar Co al capital inicial, i a los intereses anuales, t al número de años y Cf al capital final. A partir de la tabla adjunta se deduce la relación entre el capital final y el inicial:

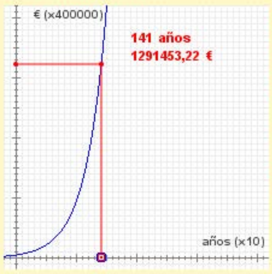
ANOS	Ci	INTERESES	Cf
1	Co	$I = 0{,}03 \cdot Co$	$C1 = Co+i = Co+0{,}03 \cdot Co = 1{,}03 \cdot Co$
2	C1	$0{,}03 \cdot C1$	$C2 = 1{,}03 \cdot C1 = (1{,}03)^2 \cdot Co$
3	C2	$0{,}03 \cdot C2$	$C3 = 1{,}03 \cdot C2 = (1{,}03)^3 \cdot Co$
4	C3	$0{,}03 \cdot C3$	$C4 = 1{,}03 \cdot C3 = (1{,}03)^4 \cdot Co$
5	C4	$0{,}03 \cdot C4$	$C5 = 1{,}03 \cdot C4 = (1{,}03)^5 \cdot Co$
6	C5	$0{,}03 \cdot C5$	$C6 = 1{,}03 \cdot C5 = (1{,}03)^6 \cdot Co$
7	C6	$0{,}03 \cdot C6$	$C7 = 1{,}03 \cdot C6 = (1{,}03)^7 \cdot Co$
8	C7	$0{,}03 \cdot C7$	$C8 = 1{,}03 \cdot C7 = (1{,}03)^8 \cdot Co$
9	C8	$0{,}03 \cdot C8$	$C9 = 1{,}03 \cdot C8 = (1{,}03)^9 \cdot Co$
10	C9	$0{,}03 \cdot C9$	$C10 = 1{,}03 \cdot C9 = (1{,}03)^{10} \cdot Co$

$Cf = Co \cdot (1{,}03)^t$ o, en general, $Cf = Co \cdot (1+r)^t$

Siendo r el tipo de interés aplicado.

La función que hemos obtenido tiene el aspecto: $y = k \cdot a^x$
(y es el capital final, k el capital inicial, $a=1{,}03>0$ y distinto de 1, x el tiempo transcurrido).
Tenemos, pues, una **función exponencial** cuya gráfica es:

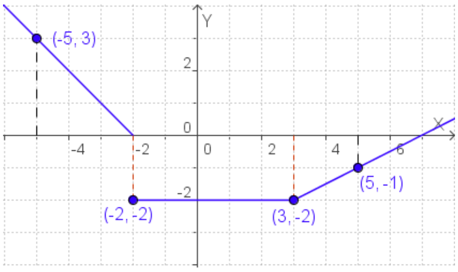
Ampliando la escala nos hacemos una idea mejor del aspecto de la gráfica. Como puedes ver siempre es creciente y aunque al principio el crecimiento es bastante lento, con el tiempo se acelera rápidamente.



Naturalmente, no vamos a hacer una inversión a tan largo plazo, pero piensa en empresas o instituciones que planifican con décadas de antelación.

Hay una novela de Ciencia-Ficción (*Retorno de las Estrellas*) de Stanislaw Lem que usa este recurso.

Funciones definidas a trozos



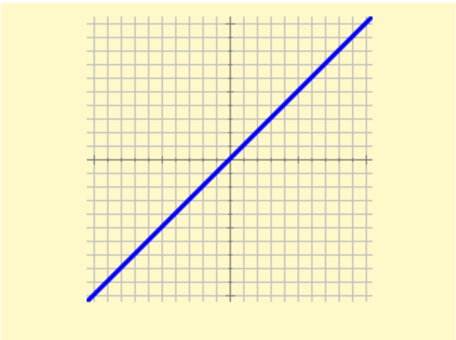
$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & x < -2 \\ -2 & -2 \le x \le 3 \\ 0{,}5x-3{,}5 & x > 3 \end{cases}$$

Hay un tipo de funciones que vienen definidas con distintas expresiones algebraicas según los valores de x, se dice que están **definidas a trozos**.

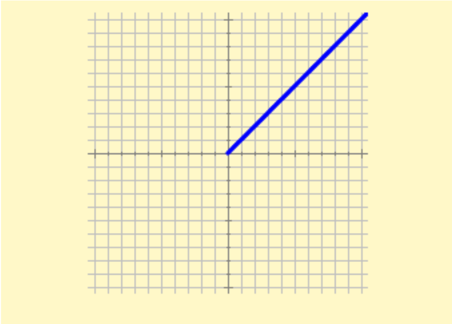
Para describir analíticamente una función formada por trozos de otras funciones, se dan las expresiones de los distintos tramos, por orden de izquierda a derecha, indicando en cada tramo los valores de x para los que la función está definida.

En la figura puedes ver un ejemplo de este tipo de funciones y su representación gráfica.

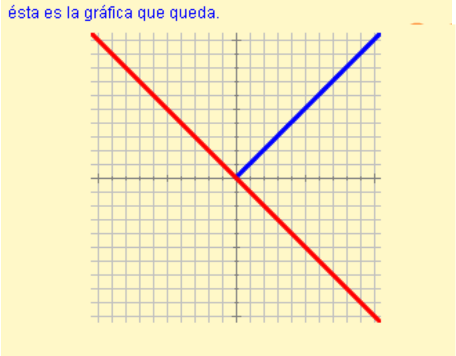
Función valor absoluto



Esta es la gráfica de la función lineal **y = x**



Si nos quedamos solo con la parte en la que x es positiva ésta es la gráfica que queda.



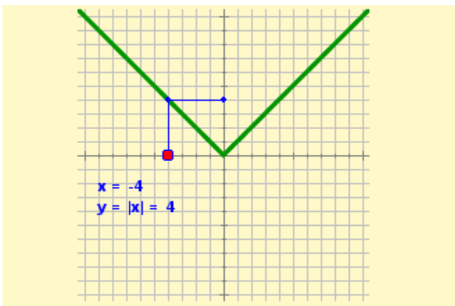
La línea roja es la gráfica de la función lineal **y = - x**

Como recordarás de la segunda quincena, el valor absoluto de un número representa su distancia al cero. La función valor absoluto es la que asigna a cada número esa distancia.

Teniendo en cuenta que el valor absoluto de un número es el mismo número si éste es positivo y su opuesto si es negativo, la ecuación de esta función es

$$y = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geqslant 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Como ves es un ejemplo de función definida a trozos. En cada trozo viene representada por una función lineal de pendientes 1 y -1 respectivamente, por lo que su gráfica está compuesta por dos semirrectas con esas pendientes que se unen en el origen.



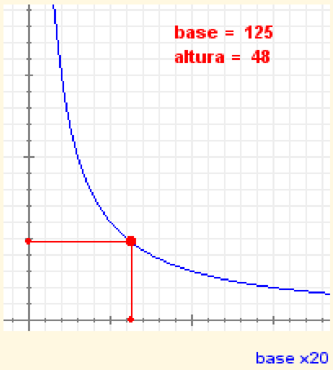
Así pues, ésta es la gráfica de la función valor absoluto:
y = | x |

EJERCICIOS resueltos

9. Indica si la base y la altura de todos los rectángulos cuya superficie mide 6000 m^2 son magnitudes inversamente proporcionales. En caso afirmativo escribe la ecuación de la función que las relaciona y dibuja su gráfica.

El área de un rectángulo es igual a la base (b) por la altura (h). Si el área es constante tenemos
b·h = k.
Luego sí son inversamente proporcionales.
En nuestro caso la ecuación es

$$b \cdot h = 6000 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{6000}{b}.$$



base 125 **SUPERFICIE = 6000 m^2**

10. Determina la ecuación de la gráfica adjunta.

Se trata de una función de proporcionalidad inversa.

$$x \cdot y = k$$

Intentamos localizar uno o varios puntos con coordenadas enteras:

Por ejemplo: **(5 , 9)**

entonces la ecuación es $x \cdot y = 5 \cdot 9 = 45$

Si es posible buscamos otros puntos para confirmar.

11. Dibuja la gráfica de la ecuación **x·y = -4**

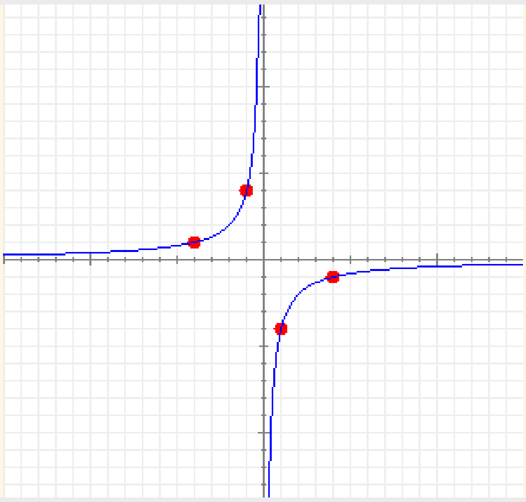
Como k es negativa la gráfica tiene que estar en el segundo y cuarto cuadrantes.

Buscamos uno o varios puntos con coordenadas enteras cuyo producto sea -4 y tenemos en cuenta la simetría de la función.

Por ejemplo, pasa por **(-4 , 1)**

y por **(4 , -1)**

Si es posible buscamos más puntos.



EJERCICIOS resueltos

12. En las siguientes funciones, definidas a trozos, calcula las imágenes de los valores de x indicados.

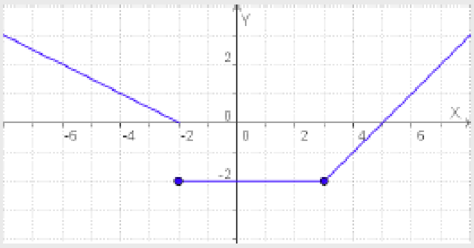
a) $f(x)=\begin{cases} -0{,}5x-1 & \text{si} \quad x<-2 \\ -2 & \text{si} \quad -2\le x\le 3 \\ x-5 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

x=-4 se sustituye arriba (-4<-2)

x=-2, x=1 y x=3 se sustituyen en la del medio, ya que están en [-2,3].

x=6 se sustituye abajo pues 6>3.

x	f(x)
-4	1
-2	-2
1	-2
3	-2
6	1



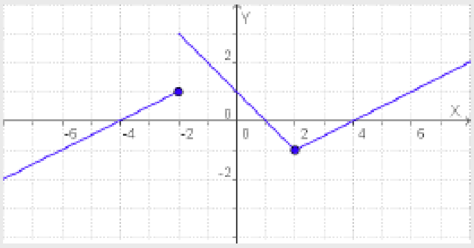
b) $f(x)=\begin{cases} 0{,}5x+2 & \text{si} \quad x\le -2 \\ -x+1 & \text{si} \quad -2<x<2 \\ 0{,}5x-2 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

x=-6, x=-2 se sustituye arriba.

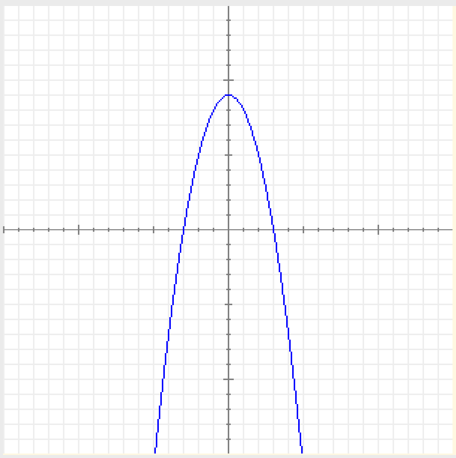
x=0 se sustituye en la del medio, ya que están en -2<0<2.

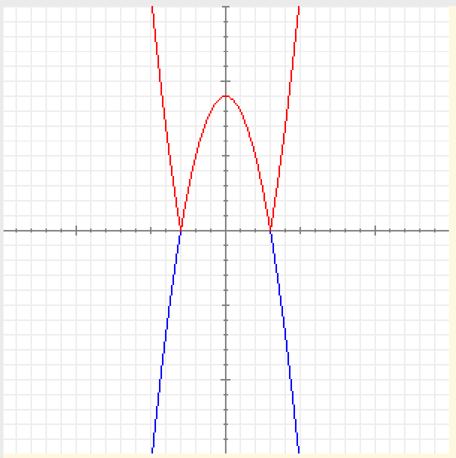
x=2, x=4 se sustituye abajo.

x	f(x)
-6	-1
-2	3
0	1
2	-1
4	0



13. La imagen adjunta se corresponde con la gráfica de la función $y=-x^2+9$. Dibuja la gráfica que corresponde al valor absoluto de esta función.

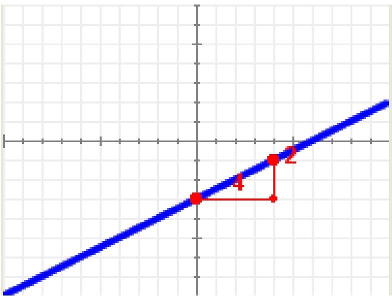




La línea roja de la derecha representa la gráfica buscada. Recuerda que el valor absoluto de un número coincide con el número si éste es positivo y con su opuesto si el número es negativo.

Para practicar

1. Determina la ecuación de la función cuya gráfica es la siguiente, indicando si se trata de una función lineal o afín.



2. Dibuja la gráfica de la función $\mathbf{y=-2x+5}$

3. Halla las coordenadas del punto de corte de las rectas cuyas ecuaciones son:

f: $y = x + 9$ **g: $y = 3x + 13$**

4. Halla la ecuación de la función cuya gráfica es paralela a la de la función **$y = 4x - 2$** y pasa por el punto **P(-1,4)**

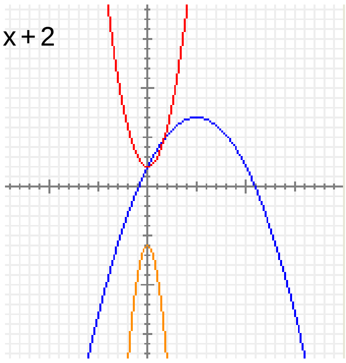
5. Halla la ecuación de la función cuya gráfica pasa por los puntos

P(-2,7) y Q(-1,4)

6. Dibuja la gráfica de la función $\mathbf{y=x^2-1}$.

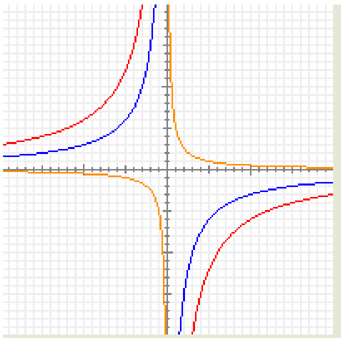
7. Asocia cada gráfica con su ecuación:

a) $y=-0{,}2x^2+2x+2$
b) $y=-3x^2+6$
c) $y=x^2+2$



8. Asocia cada gráfica con su ecuación:

a) $x\cdot y = -60$
b) $x\cdot y = -30$
c) $x\cdot y = 5$

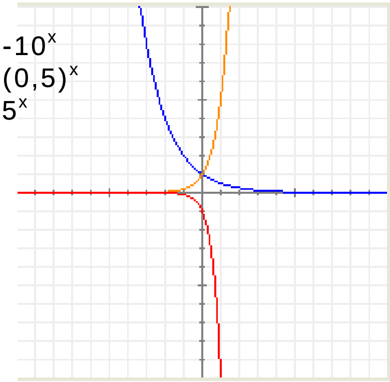


9. Los números de la tabla adjunta corresponden a cantidades de dos magnitudes inversamente proporcionales. Rellena los huecos que quedan y escribe la ecuación de la función que relaciona a estas dos magnitudes.

x	y
2	40
	-320
5	16
-8	
	-8
-20	

10. Asocia cada gráfica con su ecuación:

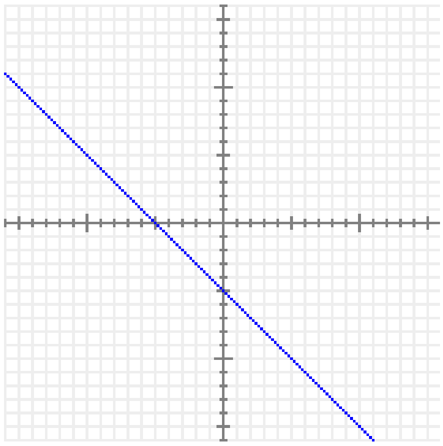
a) $y = -10^x$
b) $y = (0{,}5)^x$
c) $y = 5^x$



11. Dibuja la gráfica de la función:

$$y = \begin{cases} -x-5 & si \quad x \le -1 \\ +4 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

12. La gráfica adjunta corresponde a una cierta función $y=f(x)$. Dibuja la gráfica de la función $y=|f(x)|$.



13. En cierta gasolinera el precio de un litro de gasolina es de 1,04€. Un día deciden subir el precio un 1,66%. Unos días después deciden incrementar otra vez el precio un 3,18% sobre el último precio. Calcula el precio final y el porcentaje de aumento sobre el precio inicial.

14. El precio de cierto artículo en un centro comercial es de 601€. En las rebajas de enero deciden aplicarle un descuento del 13%. Al llegar febrero, todavía quedan existencias, por lo que deciden aplicarle un nuevo descuento del 11% sobre el precio que tenía en enero. Calcula el precio final y el descuento total sobre el valor inicial.

15. Si una compañía de teléfonos cobra 12,14€ por hablar durante 2 minutos y 12,70€ por hablar durante 10 minutos, calcula la cuota fija mensual que cobra así como el coste por minuto. Calcula también el importe de un recibo mensual si se ha hablado durante 22 minutos.

16. Una avioneta tiene combustible para 4 horas, viajando a una velocidad constante de 270 km/h. Al despegar, el piloto observa que hay viento a favor que le permite volar a 318 km/h con el mismo gasto, pero debe tener en cuenta que a la vuelta solo podrá ir a 222 km/h. ¿Cuál es la distancia máxima a la que puede alejarse?

17. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima cuyo perímetro es igual a 436 metros.

18. Un móvil recorre un trayecto de 265 km con velocidad constante. Escribe la ecuación de la función que relaciona la velocidad del móvil con el tiempo empleado en recorrer ese trayecto. Después calcula el tiempo si la velocidad es de 50 km/h y calcula la velocidad si el tiempo empleado es de 8 horas.

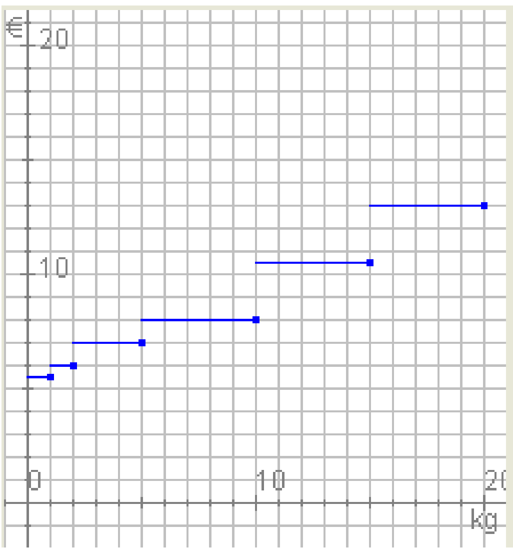
19. Un grifo con un caudal de 7 litros por minuto tarda 15 minutos en llenar un depósito. Halla la ecuación de la función que relaciona el tiempo que tarda en llenarse el depósito con el caudal del grifo. Dibuja su gráfica y calcula el tiempo que tardaría en llenarse si el caudal del grifo fuera de 14 litros por minuto.

20. El IPC (Índice de Precios al Consumo) es una medida porcentual de la variación de los precios de un año a otro. Si el IPC se mantiene constantemente igual a 1,9% durante 5 años, un producto que inicialmente valía 655€ ¿qué precio tendrá al cabo de esos años?

21. Hemos comprado un coche por 17739€. Si el precio de venta en el mercado de segunda mano se deprecia un 14% anual, ¿cuál será el precio del coche al cabo de 11 años?

22. Tenemos un bloque de hielo a –24ºC de temperatura. Lo ponemos a calentar en un recipiente y tarda 10 minutos en alcanzar los 0ºC. Se mantiene 6 minutos a esa temperatura hasta que se licua totalmente. Luego tarda 7 minutos en alcanzar la ebullición a 100ºC y otros 10 minutos en evaporarse completamente, periodo durante el cual mantiene la temperatura constante a 100ºC. Halla la ecuación que relaciona la temperatura del agua en el recipiente con el tiempo transcurrido y dibuja su gráfica. Después calcula cuánto se tarda en alcanzar una temperatura de 25ºC y qué temperatura se alcanza al cabo de 25 minutos.

23. La gráfica adjunta describe el coste de enviar un paquete por correo en función del peso de dicho paquete. Escribe la función correspondiente a esta gráfica y averigua el precio de enviar un paquete de 17 kg.



Para saber más

Las cónicas

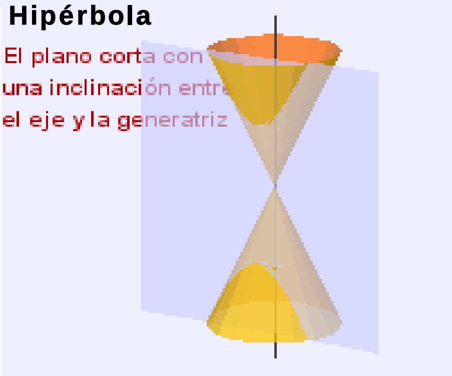
La hipérbola y la parábola pertenecen a una familia de curvas llamadas **cónicas**, a la que también pertenecen la elipse y la circunferencia. Se obtienen al cortar una superficie cónica con un plano:

Circunferencia

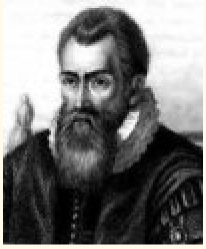
Elipse

Parábola

Hipérbola



Logaritmos



El **logaritmo** de un número, y, en una cierta base, b, es el número, x, al que hay que elevar b para obtener y, es decir:

$$\log_b y = x \text{ equivale a } y = b^x$$

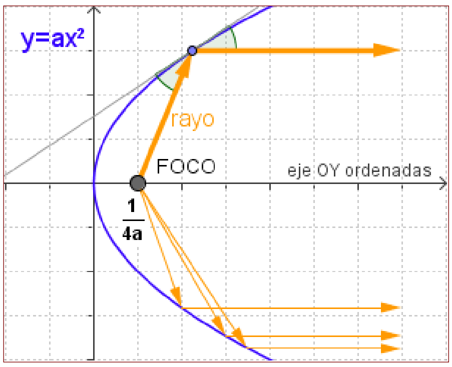
Informalmente, decimos que el logaritmo es la operación contraria de la exponenciación. El cálculo con logaritmos se incia de forma sistemática en el siglo XVII con el matemático inglés John Napier.

En la página inicial se nos preguntaba cuánto se tardaría en alcanzar una población de un millón de microbios. Se trata de resolver la ecuación:

$$3^x = 1.000.000$$

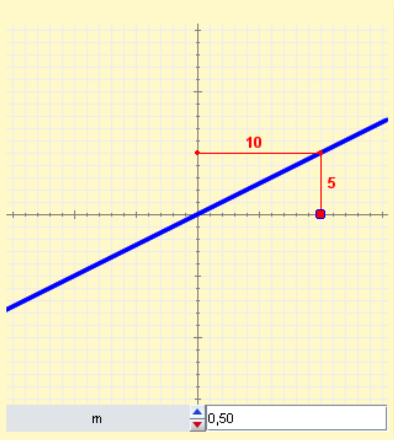
o lo que es lo mismo, ***calcular el logaritmo en base 3 de un millón***. Si usas la calculadora tienes que hallar el logaritmo de un millón y dividirlo por el logaritmo de 3 y obtendrás un valor comprendido entre 12 y 13 horas.

En las parábolas todos los rayos que parten del **foco** o inciden en él son reflejados en la misma dirección. De ahí que los faros de los coches o las antenas tengan forma parabólica.



Recuerda lo más importante

Funciones lineales



ECUACIÓN: $y = m \cdot x$

$y = 0{,}5 \cdot x$

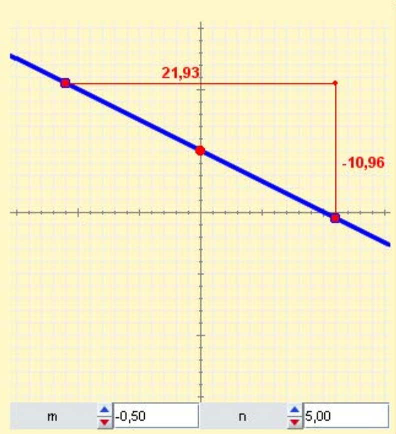
Su gráfica es una recta que:

- Pasa por el origen
- Crece si m>0
- Decrece si m<0
- Es horizontal si m=0

m es la PENDIENTE y coincide con el cociente entre la ordenada y la abscisa de cualquier punto de la recta.

Relaciona dos magnitudes DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Funciones afines



ECUACIÓN: $y = m \cdot x + n$

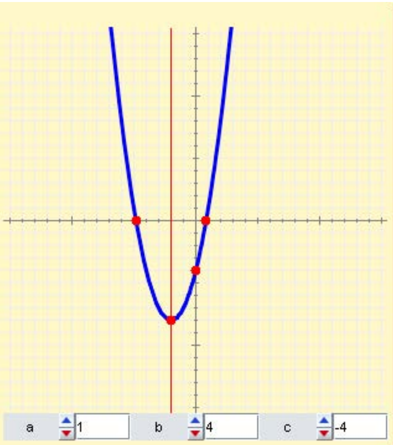
$y = -0{,}5 \cdot x + 5$

Su gráfica es una recta que:

- Pasa por (0,n)
- Crece si m>0
- Decrece si m<0
- Es horizontal si m=0

m es la PENDIENTE y coincide con el cociente entre la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas entre dos puntos cualesquiera de la recta.

Funciones cuadráticas



ECUACIÓN: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$y = x^2 + 4x - 4$

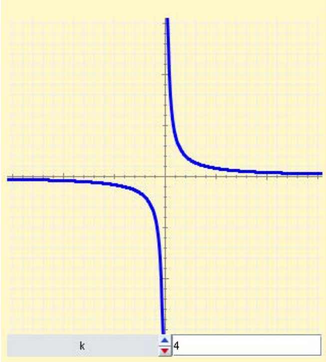
Su gráfica es una parábola:

- Pasa por (0,c)
- Abierta hacia arriba si a>0
- Abierta hacia abajo si a<0
- Más cerrada cuanto mayor es a en valor absoluto.

Eje de simetría $x = -\frac{b}{2a}$

Los puntos de corte con el eje X se obtienen igualando la ecuación a cero.

Función de proporcionalidad inversa



ECUACIÓN:

$x \cdot y = k$ o bien $y = \frac{k}{x}$

$x \cdot y = 4$

Su gráfica es una hipérbola:

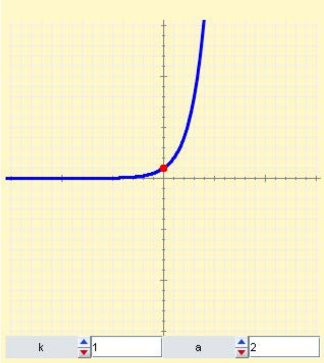
Sus ramas están
- en los cuadrantes 1 y 3 si k>0
- en los cuadrantes 2 y 4 si k<0

Tienes dos asíntotas.

Es simétrica con respecto al punto de corte de sus asíntotas.

Es discontinua.

Funciones exponenciales



ECUACIÓN: $y = k \cdot a^x$

$y = 2^x$

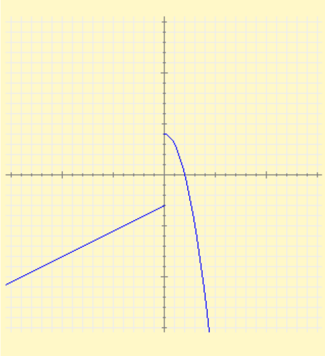
Solo está definida para valores de a mayores que cero y distintos de uno. k debe ser distinta de cero.

- Creciente si k>0 y a>1 ó k<0 y a<1.
- Decreciente si k<0 y a>1 ó k>0 y a<1.

Corta al eje Y en (0,k)

Tienes una asíntota.

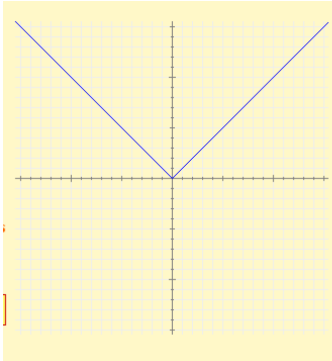
Funciones definidas a trozos



Son funciones que están definidas por ecuaciones distintas en diferentes zonas de su domino.

Se usan para explicar las propiedades de las funciones y para describir situaciones en las que cierta magnitud cambia bruscamente su forma de comportarse.

Función valor absoluto

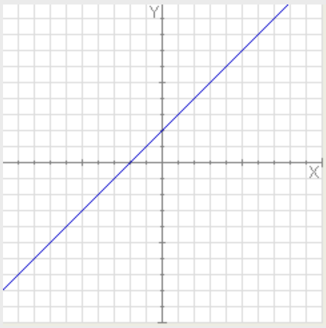


ECUACIÓN: $y = |x|$

$$y = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Es un ejemplo de función definida a trozos

Autoevaluación



1. ¿Cuál es la pendiente de la recta de la imagen?

2. ¿Cuál es la ecuación de la recta paralela a la recta y=0,5x+2 que pasa por el punto (1,0)?

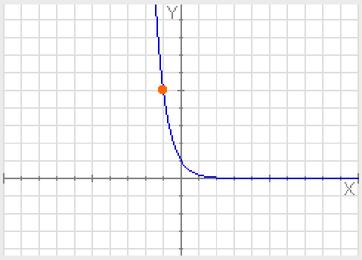
3. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1,0) y B(3,3).

4. Calcula las coordenadas del punto de corte de las rectas r: y=2,5x+6,5 y s: y=-2x-7

5. Calcula las coordenadas del vértice de la parábola y = x^2 + 2x + 5.

6. Calcula las coordenadas de los puntos en los que la parábola y = $-x^2+3x+4$ corta a los ejes de coordenadas.

7. Halla la ecuación de la función de proporcionalidad inversa cuya gráfica pasa por el punto P(-3,2) y dibuja la gráfica.



8. Halla la ecuación de la función exponencial de la figura con ayuda del punto que está marcado.

9. Ponemos un capital de 100.000€ al 7% de interés compuesto. ¿A cuánto ascenderá al cabo de 13 años? (Redondea a euros)

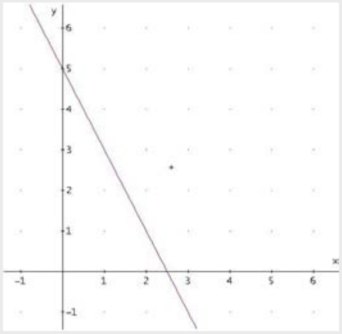
10. Calcula |f(2)| sabiendo que

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2 & si\ x<3\\ 2x-1 & si\ x\geq 3\end{cases}$$

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. $y=\frac{1}{2}x-3$

2.

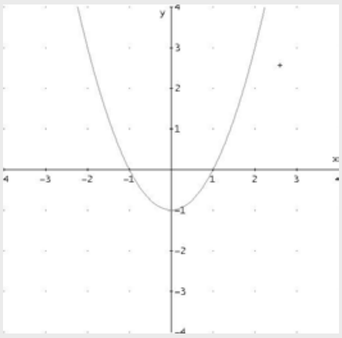


3. (-2,7)

4. y=4x+8

5. y= -3x+1

6.



7. a ---- azul
b ---- amarillo
c ---- rojo

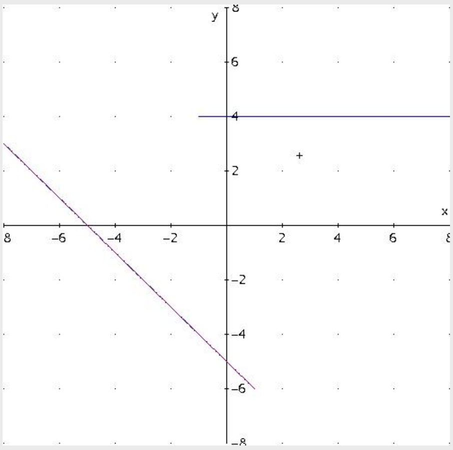
8. a ---- rojo
b ---- azul
c ---- amarillo

9. x·y = 80

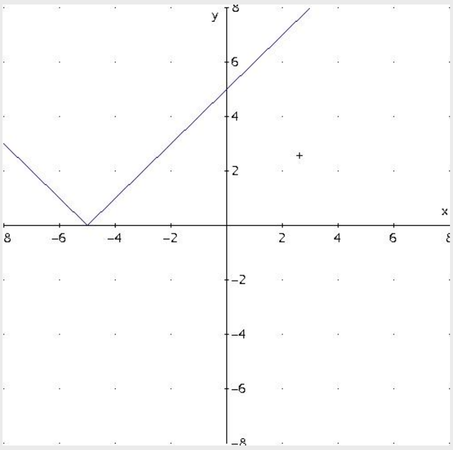
x	y
2	40
-0,25	-320
5	16
-8	-10
-10	-8
-20	-4

10. a ---- rojo
b ---- azul
c ---- amarillo

11.



12.



13. Precio final: 1,09€;
aumento: 4,89%

14. Precio final: 465,35€;
descuento: 22,57%

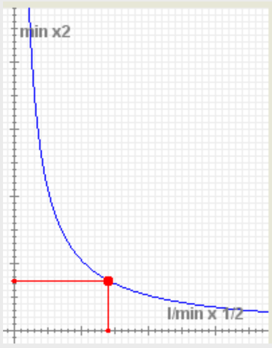
15. Cuota fija: 12€; minuto: 0,07€;
22 minutos: 13,54€.

16. 522,93 km

17. b = h = 109 m

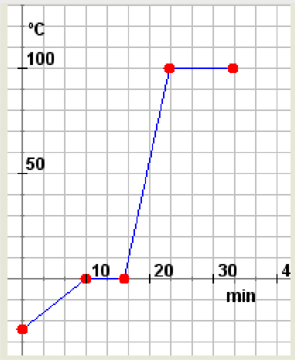
18. x·y=265; x=5,3 h; y=33,13 km/h

19. x·y=105; 7,5 minutos



20. 719,77 €

21. 3376,08 €



22.

23. continuación
Tarda 17,75 minutos en llegar a 25 ºC.
A los 25 minutos la temperatura es 100 ºC

$$y = \begin{cases} \frac{24}{10}x - 24 & \text{si } x \geq 0 \text{ y } x < 10 \\ 0 & \text{si } x \geq 10 \text{ y } x < 16 \\ \frac{100}{7}(x - 16) & \text{si } x \geq 16 \text{ y } x < 23 \\ 100 & \text{si } x \geq 23 \text{ y } x < 33 \end{cases}$$

24.

$$y = \begin{cases} 5{,}5 & \text{si } x \leq 1 \\ 6 & \text{si } x > 1 \text{ y } x \leq 2 \\ 7 & \text{si } x > 2 \text{ y } x \leq 5 \\ 8 & \text{si } x > 5 \text{ y } x \leq 10 \\ 10{,}5 & \text{si } x > 10 \text{ y } x \leq 15 \\ 13 & \text{si } x > 15 \text{ y } x \leq 20 \end{cases}$$

Enviar un peso de 17 kg cuesta 13,00 € porque ese peso corresponde a la zona 6 .

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 1
2. y=0,5x-0,5
3. y=1,5x-1,5
4. (-3,-1)
5. (-1,4)
6. x1=-1; x2=4; y=4
7. x·y=-6
8. $y=(0,2)^x$
9. 240.985 €
10. 6