



CÁLCULO

Libro interactivo

Elena E. Álvarez Saiz
Juan Guillermo Rivera Berrío

REeducativa
digital
escartes

iCartesiLibri

Cálculo

Volumen I

INTERACTIVO

Elena E. Álvarez Saiz
Universidad de Cantabria



Juan Guillermo Rivera Berrío
Institución Universitaria Pascual Bravo



Red Educativa Digital Descartes

Fondo Editorial RED Descartes



Córdoba (España)
2021

Título de la obra:
Cálculo - Volumen I
Interactivo

Autores:
Elena Esperanza Álvarez Saiz
Juan Guillermo Rivera Berrío

Código JavaScript para el libro: [Joel Espinosa Longi](#), [IMATE](#), UNAM.
Recursos interactivos: [DescartesJS](#)
Fuentes: [Lato](#) y [UbuntuMono](#)
Fórmulas matemáticas: $\text{K}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$

Obra derivada del libro [Calculus Volume 1](#) de:
Gilbert Strang (Massachusetts Institute of Technology)
Edwin “Jed” Herman (University of Wisconsin-Stevens Point)

Red Educativa Digital Descartes
Córdoba (España)
descartes@proyectodescartes.org
<https://proyectodescartes.org>

Proyecto iCartesiLibri
<https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/index.htm>

ISBN Obra completa: 978-84-18834-18-9
ISBN Volumen I: 978-84-18834-19-6



Esta obra está bajo una licencia Creative Commons 4.0 internacional: Reconocimiento-No Comercial-Compartir Igual.

Tabla de contenido

Prefacio	9
1. Funciones y gráficas	11
1.1 Introducción	13
1.2 Conceptos básicos de funciones	14
1.2.1 Definición de función	15
1.2.2 Representación de funciones	25
1.2.3 Combinación de funciones	35
1.2.4 Simetría de funciones	43
1.2.5 Ejercicios	48
1.3 Tipos de funciones	63
1.3.1 Funciones lineales y pendiente	64
1.3.2 Funciones polinómicas	72
1.3.3 Funciones potenciales	73
1.3.4 Funciones algebraicas	84
1.3.5 Funciones trascendentes	88
1.3.6 Funciones definidas por tramos o a trozos	90
1.3.7 Transformaciones de funciones	93
1.3.8 Ejercicios	102
1.4 Funciones trigonométricas	111
1.4.1 Medida en radianes	112
1.4.2 Seis funciones trigonométricas básicas	114
1.4.3 Identidades trigonométricas	120

1.4.4 Gráficas y períodos de las funciones trigonométricas	123
1.4.5 Ejercicios	127
1.5 Funciones inversas	137
1.5.1 Existencia de una función inversa	137
1.5.2 Encontrar la inversa de una función	143
1.5.3 Funciones trigonométricas inversas	149
1.5.4 Ejercicios	158
1.6 Función exponencial y logarítmica	167
1.6.1 Funciones exponenciales	168
1.6.2 El número e	175
1.6.3 Funciones logarítmicas	179
1.6.4 Funciones hiperbólicas	188
1.6.5 Ejercicios	196
2. Límites	209
2.1 Introducción	211
2.2 Introducción al cálculo	212
2.2.1 El problema de la tangente y el cálculo diferencial	213
2.2.2 El problema del área y el cálculo integral	223
2.2.3 Otros aspectos del cálculo	226
2.2.4 Ejercicios	228
2.3 El límite de una función	235
2.3.1 Definición intuitiva de límite	236
2.3.2 La existencia de límite	244
2.3.3 Límites laterales	245

2.3.4 Límites infinitos	249
2.3.5 Ejercicios	260
2.4 Las leyes de los límites	274
2.4.1 Evaluación de límites con las leyes de los límites	275
2.4.2 Límites de funciones polinomiales y racionales	279
2.4.3 Técnicas adicionales de evaluación de límites	281
2.4.4 Teorema del sandwich	289
2.4.5 Ejercicios	296
2.5 Continuidad	302
2.5.1 Continuidad en un punto	304
2.5.2 Tipos de discontinuidad	310
2.5.3 Continuidad en un intervalo	314
2.5.4 El Teorema del Valor Intermedio	319
2.5.5 Ejercicios	322
2.6 Definición precisa de límite	330
2.6.1 Cuantificando la proximidad	331
2.6.2 Demostrando leyes de los límites	340
2.6.3 Límites laterales y límites en el infinito	343
2.6.4 Ejercicios	348
3. Derivadas	355
3.1 Introducción	357
3.2 Definición de la derivada	358
3.3.1 La derivada de una función en un punto	370
3.3.2 Velocidades y razón o tasas de cambio	372
3.3.3 Ejercicios	378

3.3 La derivada como función	388
3.3.1 Función derivada	389
3.3.2 Gráfica de una derivada	392
3.3.3 Derivadas y continuidad	397
3.3.4 Derivadas de orden superior	404
3.3.5 Ejercicios	406
3.4 Reglas de derivación	416
3.4.1 Derivada de una constante	417
3.4.2 Derivada de una potencia	418
3.4.3 Las reglas de la suma, diferencia y producto por una constante	422
3.4.4 La derivada de un producto	426
3.4.5 La derivada de un cociente	429
3.4.6 Combinando reglas de derivación	432
3.4.7 Ejercicios	438
3.5 Derivada como tasa o razón de cambio	445
3.5.1 Razón de cambio	445
3.5.2 Movimiento a lo largo de una recta	448
3.5.3 Tasa de cambio de una población	451
3.5.4 Tasa de cambio de coste y beneficio	452
3.5.5 Ejercicios	455
3.6 Derivadas de funciones trigonométricas	466
3.6.1 Derivadas de las funciones seno y coseno	467
3.6.2 Derivadas de otras funciones trigonométricas	473
3.6.3 Derivadas de orden superior	476

3.6.4 Ejercicios	478
3.7 La regla de la cadena	482
3.7.1 La regla de la cadena	483
3.7.2 Combinando la regla de la cadena con otras reglas	490
3.7.3 Componiendo tres o más funciones	493
3.7.4 La regla de la cadena usando la notación de Leibniz	497
3.7.5 Ejercicios	499
3.8 Derivadas de funciones inversas	505
3.8.1 Derivada de la función inversa	505
3.8.2 Derivada de las funciones trigonométricas inversas	511
3.8.3 Ejercicios	514
3.9 Derivación implícita	521
3.9.1 Derivación implícita	522
3.9.2 Encontrar las rectas tangentes implícitamente	527
3.9.3 Ejercicios	531
3.10 Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas	535
3.10.1 Derivada de la función exponencial	536
3.10.2 Derivada de la función logarítmica	543
3.10.3 Derivación logarítmica	548
3.10.4 Ejercicios	551

Prefacio

Este libro digital interactivo se ha diseñado con fundamento en la filosofía del [Proyecto Descartes](#): "Trabajando altruistamente por la comunidad educativa de la aldea global", que sólo busca desarrollar contenidos educativos para el provecho de la comunidad académica, esperando únicamente como retribución el uso y difusión de estos contenidos. El contenido del libro, al igual que los objetos interactivos se han diseñado de forma que se puedan leer en ordenadores y dispositivos móviles sin necesidad de instalar ningún programa o *plugin*. El libro se puede descargar para su uso en local sin dependencia de la red. Algunos de los objetos interactivos se han diseñado con el Editor DescartesJS.

La herramienta Descartes se caracteriza por una innata interactividad, por permitir realizar representaciones de objetos bi y tridimensionales, por gestionar expresiones de texto y de fórmulas, por integrar objetos multimedia como imágenes, audios y vídeos, por tener la posibilidad de reflejar casos concretos y también potenciar la conceptualización de tareas y procedimientos mediante la utilización de semillas aleatorias y controles numéricos, gráficos y de texto, y con ellos poder abordar la evaluación de manera automática, tanto la correctiva como la formativa. Con Descartes es posible el diseño y desarrollo de objetos educativos que promueven el aprendizaje significativo, posibilitando esa deseada construcción del conocimiento.

El contenido del libro se basa en un recurso de [OpenStax](#), organización sin fines de lucro de la Universidad de Rice, cuya misión, similar a la nuestra, es mejorar el acceso de los estudiantes a la educación. El libro corresponde al Volumen 1 de Cálculo, que cubre funciones elementales, límites, derivadas y sus aplicaciones e integración.

Capítulo I

Funciones y gráficas

1.1 Introducción



Figura 1.1. Una porción de la falla de San Andrés en California. Grandes fallas como esta aparecen en los terremotos más fuertes registrados. (crédito: modificación del trabajo por Robb Hannawacker, NPS)

En los últimos años, se han producido grandes terremotos en varios países del mundo. En enero de 2010, un terremoto de magnitud 7.3 golpeó Haití. Un terremoto de magnitud 9 sacudió el noreste de Japón en marzo de 2011. En abril de 2014, un terremoto de magnitud 8.2 sacudió la costa del norte de Chile. ¿Qué significan estos números? En particular, ¿cómo se compara un terremoto de magnitud 9 con un terremoto de magnitud 8.2? ¿o 7.3? Más adelante, en este capítulo, mostraremos cómo se utilizan las funciones logarítmicas para comparar la intensidad relativa de dos terremotos en función de la magnitud de cada uno de ellos (ver Ejemplo 1.39).

El cálculo es la matemática que describe los cambios en las funciones. En este capítulo, se revisarán todas las funciones necesarias para su estudio. Se definirán las funciones polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Se analizará cómo evaluar estas funciones y se mostrarán las propiedades de sus gráficas.

En este capítulo se proporcionarán también ejemplos de ecuaciones que involucran estas funciones y se ilustrarán técnicas algebraicas que se requieren para resolverlas. En resumen, este capítulo proporcionará la base para el estudio del material de los capítulos siguientes. Es por ello esencial, estar familiarizado con estos conceptos antes de proceder a la introducción formal del cálculo en el próximo capítulo.

1.2 Conceptos básicos de funciones

Objetivos de aprendizaje

1. Usar la notación funcional para evaluar una función.
2. Determinar el dominio y el rango de una función.
3. Dibujar la gráfica de una función.
4. Encontrar los ceros de una función.
5. Reconocer una función a partir de una tabla de valores.
6. Construir nuevas funciones a partir de otras dadas.
7. Describir las propiedades de simetría de una función.

En esta sección, se analizará la definición de una función y se examinarán varias formas de representarlas: a través de tablas, fórmulas y gráficas. Se estudiará cómo denotar una función y los términos relacionados con este concepto. También se definirá la composición de funciones y las propiedades de simetría. La mayor parte de este material posiblemente sea ya conocido, pero sirve como referencia útil para recordar algunas de las técnicas algebraicas que se requieren para trabajar con funciones.

1.2.1 Definición de función

Dados dos conjuntos A y B , se puede definir una relación de A a B a partir de pares ordenados (x, y) , donde x es un elemento de A e y es un elemento de B .

Una relación de A a B define un vínculo entre esos dos conjuntos. Una función es un tipo especial de relación en la que cada elemento del primer conjunto está relacionado con exactamente un elemento del segundo conjunto. El elemento del primer conjunto se llama **entrada u origen**. El elemento del segundo conjunto se denomina **salida o imagen**. Para cualquier función, cuando conocemos el origen, se determina la imagen, por lo que decimos que la imagen es una función del origen.

Por ejemplo, el área de un cuadrado está determinado por su longitud lateral, esto significa que el área (la salida o imagen) es una función de su longitud lateral (el origen). La velocidad de una pelota lanzada al aire puede describirse como una función de la cantidad de tiempo que la pelota está en el aire. El coste de enviar un paquete por correo es una función del peso del paquete. Como las funciones tienen muchos usos, es importante tener definiciones precisas y terminología adecuada para poder estudiarlas.

DEFINICIÓN.

Una **función** f consiste en un conjunto de entradas, un conjunto de salidas o imágenes y una regla para asignar a cada entrada exactamente una única salida. El conjunto de entradas se denomina **dominio** de la función. El conjunto de salidas se denomina **rango o imagen** de la función.

Por ejemplo, consideremos la función f , donde el dominio es el conjunto de todos los números reales y la regla consiste en obtener el cuadrado de cada número. Así, a la entrada $x = 3$ se le asigna la salida $3^2 = 9$.

Como cada número real no negativo tiene una raíz cuadrada de valor real, será un elemento del rango de esta función. Como no hay números reales con un cuadrado que sea negativo, los números reales negativos no formarán parte del rango o imagen. Concluimos por tanto que el rango es el conjunto de números reales no negativos.

Para una función general f con dominio D , es frecuente utilizar x para denotar la entrada y utilizamos y para denotar la imagen o salida asociada a x . Al hacerlo, nos referimos a x como la **variable independiente** e y como la **variable dependiente**, ya que depende de x . Usando la notación de función, se escribirá $y = f(x)$, y esta expresión se leerá de la siguiente forma: " y es igual a f de x ". Así, la función descrita anteriormente que eleva al cuadrado cada número, se escribirá $f(x) = x^2$.

El concepto de una función se puede visualizar utilizando la [Figura 1.2](#), [Figura 1.3](#) y la [Figura 1.4](#).

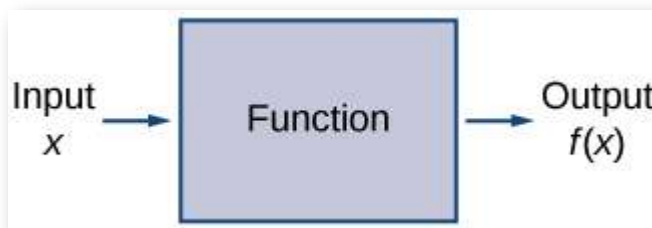


Figura 1.2 Una función se puede visualizar como un dispositivo de entrada/salida.

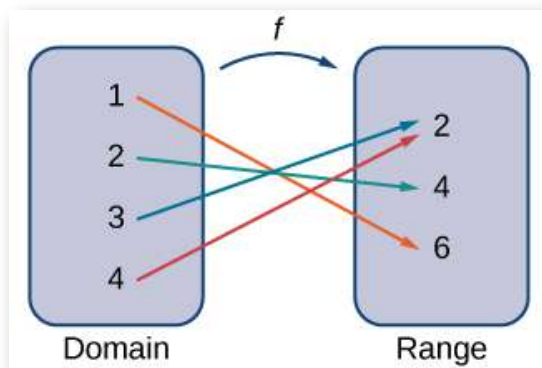


Figura 1.3 Una función asigna cada elemento del dominio exactamente un único elemento en el rango. Aunque a cada entrada se puede asignar una sola salida, es posible asignar a dos entradas diferentes la misma salida.

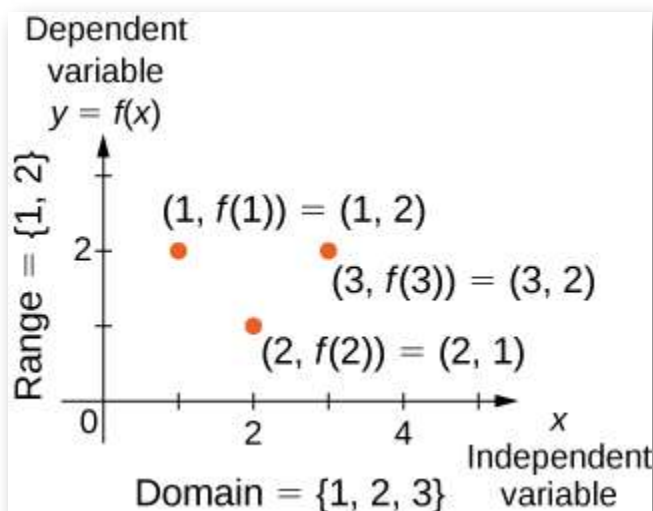


Figura 1.4 En este caso, la gráfica de la función f tiene como dominio el conjunto $\{1, 2, 3\}$ y como rango $\{1, 2\}$. La variable independiente es x y la variable dependiente es y .

También se puede visualizar una función trazando puntos (x, y) en el plano de coordenadas siendo $y = f(x)$. **La gráfica de una función** consiste en el conjunto de todos estos puntos.

Por ejemplo, consideremos la función f , donde el dominio es el conjunto $D = \{1, 2, 3\}$ y la regla es $f(x) = 3 - x$. En la [Figura 1.5](#), se da una representación gráfica de esta función.

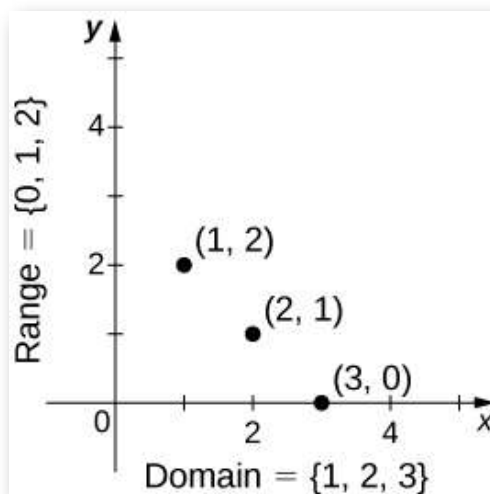


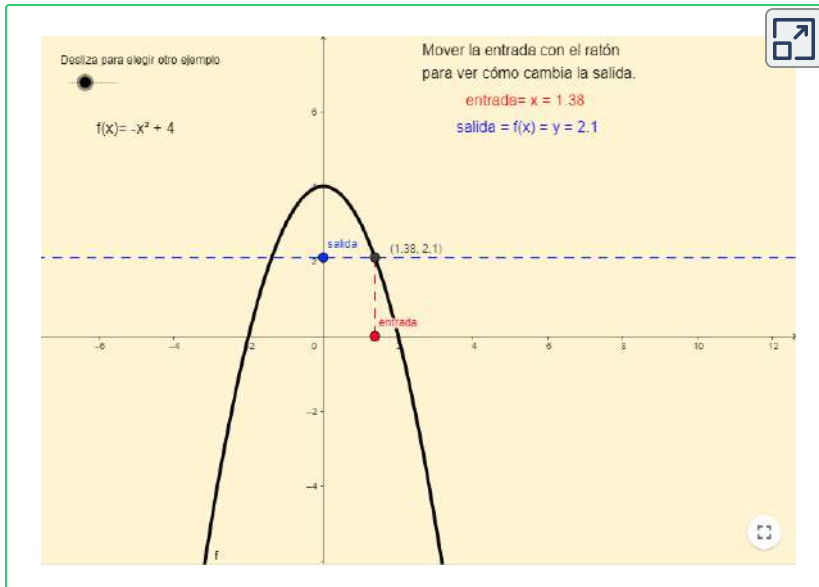
Figura 1.5 Gráfica de la función f que viene dada por $f(x) = 3 - x$ en el dominio $\{1, 2, 3\}$. La gráfica consta de los puntos $(x, f(x))$ para todos los x en el dominio.



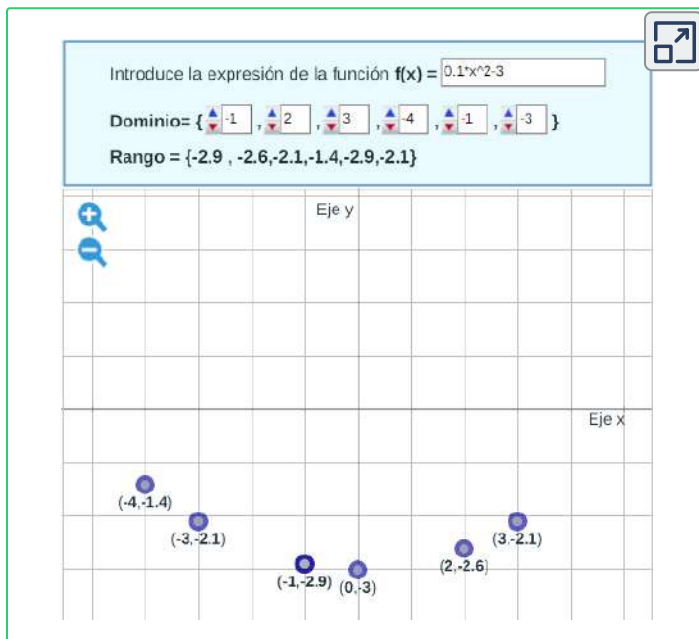
En la siguiente escena interactiva traducida de la propuesta por [J Mulholland](#), se ilustra cómo una función asigna para cada entrada una salida.

Una vez elegida la función con el deslizador que se muestra en la parte superior izquierda, basta mover el punto rojo, la entrada, para ver el valor de la función en dicho punto, la salida.

Se debe observar que para cada ejemplo de función que se puede elegir, cada entrada tiene una única salida.



En la siguiente escena interactiva se muestra el dominio y el rango de una función determinado por la expresión $f(x)$.



Cada función tiene un dominio. Sin embargo, a veces una función viene dada por una expresión, como por ejemplo $f(x) = x^2$ sin especificar explícitamente cuál es. En este caso, se considerará que el dominio es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $f(x)$ es un número real. Dado que se puede obtener el cuadrado de cualquier número real se considerará, salvo que se indique otro conjunto, que el dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales.

Si por ejemplo se considerara la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, como solo se obtiene un valor real si x es no negativo, su dominio será el conjunto de los números reales no negativos. Este conjunto se suele llamar su **dominio natural**.

Para las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = \sqrt{x}$, los dominios son conjuntos formados por un número infinito de elementos no pudiendo por ello enumerar todos sus elementos.

A menudo, al describir un conjunto con un número infinito de elementos, es útil usar la **notación de conjuntos o de intervalo**. Cuando se usa la notación de conjuntos para describir un subconjunto de todos los números reales, denotado $\mathbb{R}$, se escribe

$$\{x|x \text{ tiene alguna propiedad}\}$$

Esta expresión se lee como el conjunto de los números reales x tal que x tiene alguna propiedad. Por ejemplo, si estuviéramos interesados en el conjunto de números reales que son mayores que uno pero menores que cinco, podríamos denotar este conjunto escribiendo

$$\{x|1 < x < 5\}$$

A un conjunto como este, que contiene todos los números mayores que a y menores que b , también se le puede denotar utilizando la notación de **intervalo** (a, b) . Por lo tanto,

$$(1, 5) = \{x | 1 < x < 5\}$$

Podemos usar una notación similar si queremos incluir uno de los puntos finales, pero no el otro. Para denotar el conjunto de números reales no negativos, podríamos usar la siguiente notación

$$\{x | 0 \leq x\}$$

El número más pequeño en este conjunto es cero, pero para este conjunto no existe un número que sea más grande que todos sus elementos. Usando notación de intervalo, usaríamos el símbolo ∞ que se refiere al **infinito positivo**, y escribiríamos el conjunto como

$$[0, \infty) = \{x | 0 \leq x\}$$

Es importante tener en cuenta que ∞ no es un número real. Aquí se usa simbólicamente para indicar que este conjunto incluye todos los números reales mayores o iguales que cero. Del mismo modo, si quisiéramos describir el conjunto de todos los números no positivos, podríamos escribir

$$(-\infty, 0] = \{x | x \leq 0\}$$

La notación $-\infty$ se refiere al **infinito negativo** e indica que estamos incluyendo todos los números menores o iguales a cero, sin importar cuánto. El conjunto

$$(-\infty, \infty) = \{x | x \in \mathbb{R}\}$$

describiría al conjunto de todos los números reales.

Algunas funciones se definen usando diferentes expresiones para diferentes partes de su dominio. Estos tipos de funciones se conocen como **funciones definidas por tramos o a trozos**. Por ejemplo, supongamos que queremos definir una función f con un dominio que es el conjunto de todos los números reales de modo que $f(x) = 3x + 1$ para $x \geq 2$ y $f(x) = x^2$ para $x < 2$. Para expresar esta función se escribirá

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \geq 2 \\ x^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Al evaluar esta función para una entrada x , la ecuación a utilizar dependerá de si $x \geq 2$ o si $x < 2$.

Por ejemplo, como $5 > 2$, utilizaremos el hecho de que $f(x) = 3x + 1$ para $x \geq 2$ y se tendrá que $f(5) = 3 \cdot 5 + 1 = 16$. Por otro lado, para $x = -1$, como $f(x) = x^2$ para $x \leq 2$ se tendrá $f(-1) = 1$.



Ejemplo

1.1 Evaluando funciones

Para la función $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$, evaluar

- a. $f(-2)$
- b. $f(\sqrt{2})$
- c. $f(a + h)$



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 1.1

Para $f(x) = x^2 - 3x + 5$, evaluar $f(1)$ y $f(a + h)$.



Ejemplo

1.2 Encontrando el dominio y rango

Para cada una de las siguientes funciones, determinar el dominio y el rango

- a. $f(x) = (x - 4)^2 + 5$
- b. $f(x) = \sqrt{3x + 2} - 1$
- c. $f(x) = \frac{2}{x-2}$



Solución



Pregunta
de control

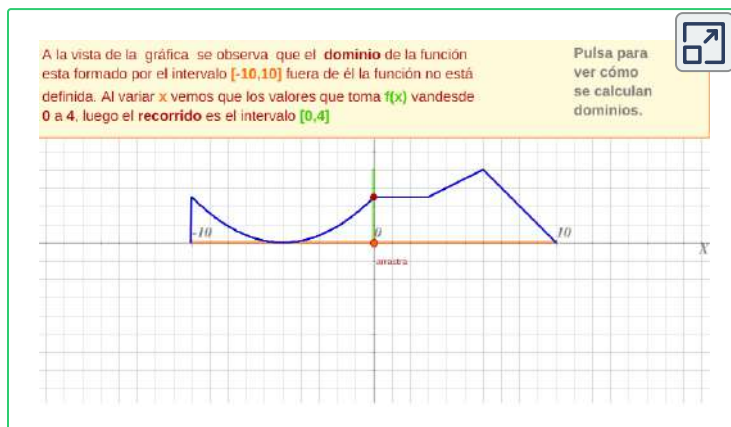
Cuestión 1.2

Encontrar el dominio y rango de la función

$$f(x) = \sqrt{4 - 2x} + 5$$



En la siguiente escena interactiva se obtiene el dominio y el rango de varias funciones. Esta escena está tomada del [Proyecto EDAD](#) y diseñada por la profesora [María José García Cebrian](#).



En la siguiente escena interactiva se muestra cómo obtener el rango de algunas funciones.

1. Encontrar el rango de la función $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$.

Hay que buscar los valores de y que hacen que la ecuación $y=f(x)$ tenga solución en x : $y(2x+1)-(x-1)=0$

Esta ecuación se reduce a la forma $(2y-1)x+(y+1)=0$.

Esto significa que es una ecuación lineal de la forma $Bx+C=0$ donde $B=2y-1$ y $C=y+1$. Esta ecuación siempre va tener solución si $B \neq 0$, es decir, si $2y-1 \neq 0$. Despejando, obtenemos que $y \neq 1/2$.

En resumen, el rango de la función $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$ son todos los números reales distintos del $1/2$.

En notación matemática el **rango** se escribe de la forma:

$(-\infty, 1/2) \cup (1/2, \infty)$

Anterior **Siguiente**

1.2.2 Representación de funciones

Típicamente, una función se representa usando una o más de las siguientes herramientas:

- Una tabla.
- Una gráfica.
- Una fórmula.

Podemos identificar una función de cualquiera de las tres formas, pero también se pueden utilizar de forma conjunta. Por ejemplo, podemos trazar en un gráfico los valores de una tabla o crear una tabla a partir de una fórmula.

Tablas

Las funciones descritas usando una tabla de valores surgen con frecuencia en aplicaciones del mundo real.

Consideremos el siguiente ejemplo sencillo que consiste en obtener la temperatura en un día determinado en función de la hora del día, para ello se registra la temperatura cada hora durante un período de 24 horas a partir de la medianoche. La variable de entrada x será el tiempo medido en horas después de la medianoche, y la variable de salida y será la temperatura medida en grados Fahrenheit transcurridas x horas después de la medianoche. Registramos nuestros datos en la [Tabla 1.1](#).

Podemos ver en la tabla que la temperatura es una función del tiempo. Se observa que la temperatura disminuye, luego aumenta y finalmente vuelve a decrecer. Sin embargo, no podemos conocer el comportamiento de la función sin representar su gráfica.

Horas después de medianoche	Temperatura (oF)	Horas después de medianoche	Temperatura
1	58	12	84
2	54	13	85
3	52	15	83
4	52	16	82
5	55	17	80
6	60	18	77
7	64	19	74
8	72	20	69
9	75	21	65
10	78	22	60
11	80	23	58

Tabla 1.1 Temperatura en función de la hora del día

Gráfica

A partir de los puntos trazados en el gráfico de la [Figura 1.6](#) obtenidos de la tabla 1.1, podemos visualizar la forma general del gráfico. A menudo es útil unir los puntos en el gráfico que representan los datos de la tabla. En este ejemplo, aunque no podemos llegar a una conclusión definitiva con respecto a la temperatura en un momento para el que no se registró la temperatura, dada la cantidad de puntos de datos recopilados y el patrón de estos puntos, es razonable sospechar que las temperaturas siguieron un comportamiento similar al que podemos ver en la [Figura 1.7](#).

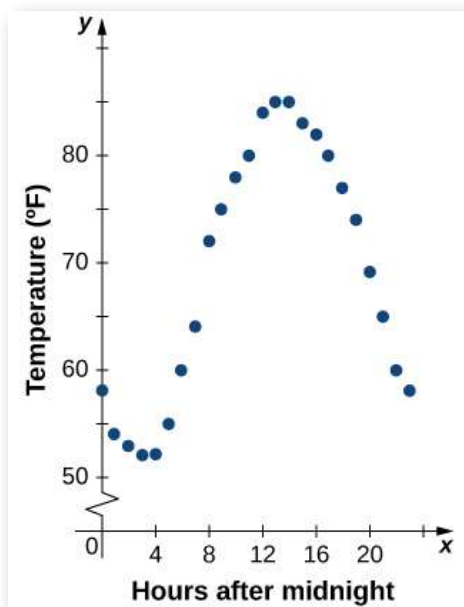


Figura 1.6 Gráfica correspondiente a los datos de la tabla 1.1 considerando la temperatura como función dependiente del tiempo-

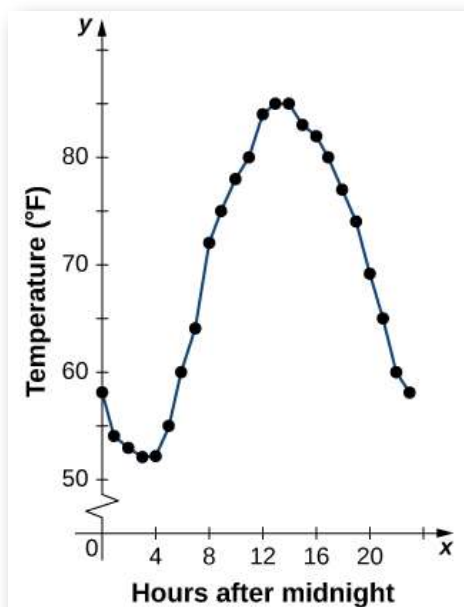


Figura 1.7 Uniendo los puntos de la figura 1.6 se muestra el patrón de los datos.

Fórmulas algebraicas

A veces no tenemos los valores de una función en forma de tabla, sino que los valores vienen dados en una fórmula explícita. Las fórmulas surgen en muchas aplicaciones. Por ejemplo, el área de un círculo de radio r viene dada por la fórmula

$$A(r) = \pi r^2.$$

Cuando un objeto se lanza hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial v_0 pies¹ por segundo, su altura sobre el suelo desde el momento en que se arroja hasta que toca el suelo viene dada por la fórmula

$$s(t) = -16t^2 + v_0t$$

Cuando se invierten P dólares en una cuenta a una tasa de interés anual r compuesta continuamente, la cantidad de dinero después de t años viene dada por la fórmula

$$A(t) = Pe^{rt}$$



En la siguiente escena, del libro [Cálculo Diferencial Interactivo](#) cuyo editor es Juan Gmo. Rivera, se muestra cómo evaluar una función en los puntos x de valores $-2, -1, 0, 1, 2$ cuando la función considerada es $f(x)$. Haciendo clic sobre cada número se mostrará el valor de la función en el punto correspondiente.

¹ Un pie es una medida de longitud equivalente a 30,48 centímetros



x	$f(x) = 2x^2 + 2x - 2$
-2	
-1	
0	
1	
2	

Las fórmulas algebraicas son herramientas importantes para calcular valores de funciones. A menudo también representamos estas funciones visualmente en forma de gráfica.

Dada una fórmula algebraica para una función f , la gráfica de f es el conjunto de puntos $(x, f(x))$, donde x está en el dominio de f y $f(x)$ está en el rango. Para graficar una función dada por una fórmula, es útil comenzar usando la fórmula para crear una tabla de entradas y salidas. Si el dominio de f consiste en un número infinito de valores, no podemos enumerarlos todos, pero puede ser muy útil, para comenzar, dar valor a alguna de las entradas y obtener su imagen.

Al crear una tabla de entradas y salidas, generalmente verificamos si cero es una salida. Los valores de x donde $f(x) = 0$ se llaman **ceros de una función**.

Por ejemplo, los ceros de $f(x) = x^2 - 4$ son $x = \pm 2$. Los ceros determinan dónde la gráfica de f corta al eje X , lo que da más información sobre ella. La gráfica puede no cortar nunca al eje X , o cortarlo múltiples veces, incluso infinitas veces.

Otro punto de interés, es la intersección con el eje Y . Cuando exista, vendrá dado por el punto $(0, f(0))$. Como una función tiene exactamente una única imagen para cada punto del dominio, el gráfico de una función puede tener, como máximo, una intersección con el eje Y .

- Si $x = 0$ está en el dominio de una función f , f cortará exactamente una vez al eje Y .
- Si no está en el dominio entonces no habrá ningún punto de intersección con dicho eje.

De manera similar, para cualquier número real c ,

- si c está en el dominio de f , hay exactamente un valor de $f(c)$, y la recta $x = c$ corta a la gráfica de f exactamente una vez.
- si c no está en el dominio de f , $f(c)$ no está definida y la recta $x = c$ no corta a la gráfica de f .

Esta propiedad se resume en el **test de la recta vertical**.

REGLA. Test de la recta vertical

Dada una función f , cada recta vertical que se puede dibujar corta a la gráfica de f a lo sumo una vez. Si cortara más de una vez, este conjunto de puntos no representaría a una función.

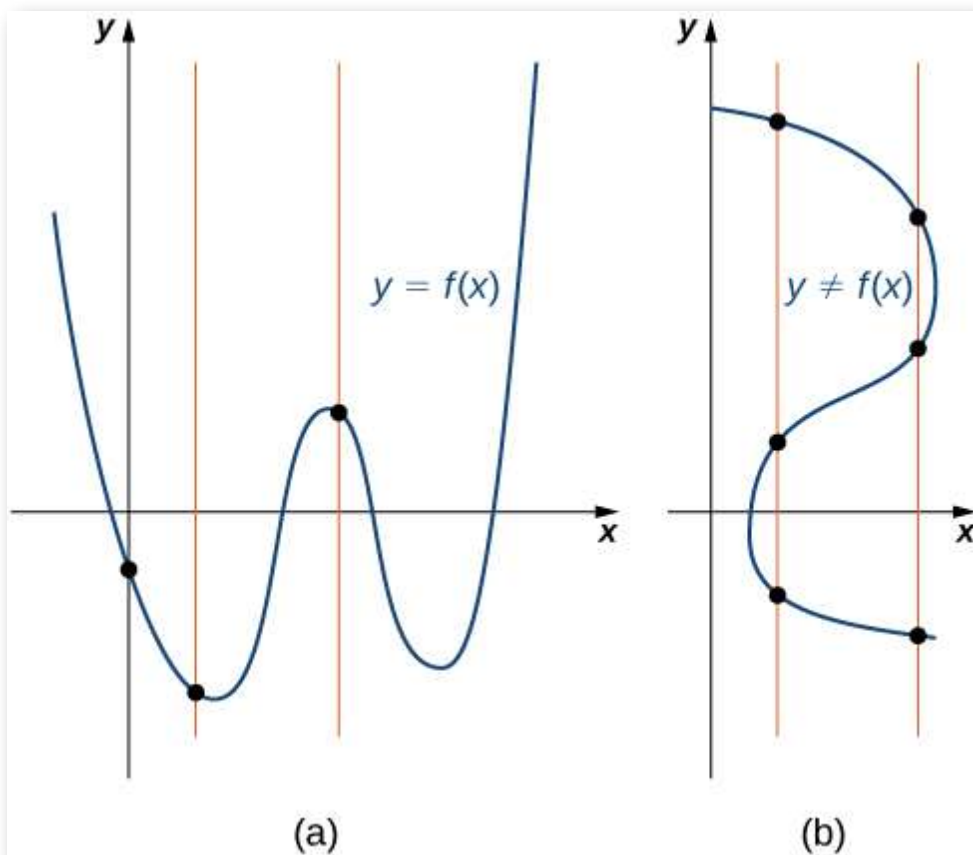


Figura 1.8 (a) El conjunto de puntos trazados representa el gráfico de una función porque cada línea vertical se cruza con el conjunto de puntos, como máximo, una vez. (b) El conjunto de puntos trazados no representa la gráfica de una función porque algunas rectas verticales se cruzan con el conjunto de puntos más de una vez.

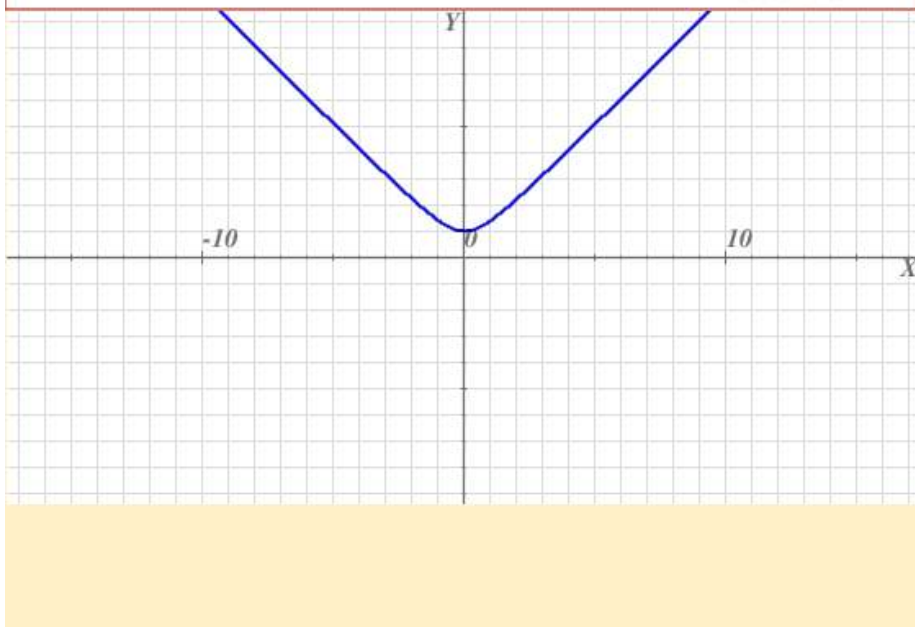


Practica lo anterior en la siguiente escena tomada del [Proyecto EDAD](#) diseñada por la profesora [María José García Cebrian](#). Observa la gráfica de la función y haz clic en los botones "SI" o "NO", según el caso.

¿Es la gráfica de una función?

SÍ

NO



Ejemplo

1.3 Utilizando los ceros y las intersecciones con el eje y

Considera la función $f(x) = -4x + 2$

- Encuentra los ceros de f .
- Encuentra los puntos de corte con el eje Y .
- Bosqueja la gráfica de f .



Solución



Ejemplo

1.4 Utilizando los ceros y las intersecciones con el eje Y

Considera la función $f(x) = \sqrt{x+3} + 1$

- Encuentra los ceros de f .
- Encuentra los puntos de corte con el eje Y .
- Bosqueja la gráfica de f .



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.3

Encuentra los ceros de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.



Ejemplo

1.5 Encontrar la altura de un objeto en caída libre

Si una pelota se cae desde una altura de 100 pies, su altura s en el tiempo t viene dada por la función $s(t) = -16t^2 + 100$, donde s se mide en pies y t se mide en segundos. El dominio está restringido al intervalo $[0, c]$, donde $t = 0$ es el momento en que se cae la pelota y $t = c$ es el momento en que la pelota toca el suelo. Nota: 1 pie son 30,48 centímetros.

- a. Crea una tabla que muestre la altura $s(t)$ cuando $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ y 2.5 . Usando los datos de la tabla, determina el dominio para esta función. Es decir, encuentra el tiempo c cuando la pelota toca el suelo.
- b. Dibuja una gráfica de s .

 Solución

Para la función del ejemplo anterior y para la función $f(x) = -4x + 2$ representada en la [Figura 1.9](#), los valores de $f(x)$ se hacen más pequeños a medida que x se hace más grande. Se dice que una función con esta propiedad es **decreciente**. Por otro lado, para la función $f(x) = \sqrt{x+3} + 1$ cuya gráfica se muestra en la [Figura 1.10](#), los valores de $f(x)$ aumentan a medida que aumentan los valores de x . Se dice que una función con esta propiedad es **creciente**.

Sin embargo, es importante tener en cuenta que una función puede aumentar en algunos intervalos y disminuir en otros diferentes. Por ejemplo, usando la función de temperatura vista anteriormente en la [Figura 1.6](#), observamos que la función está decreciendo en el intervalo $(0, 4)$, aumenta en el intervalo $(4, 14)$ y luego disminuye en el intervalo $(14, 23)$.

Expresamos a continuación con más precisión la idea de que una función aumente o disminuya en un intervalo determinado.

DEFINICIÓN

Decimos que una función f es **creciente** en el intervalo I si para todo $x_1, x_2 \in I$, se cumple $f(x_1) \leq f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2$.

Decimos que f es **estrictamente creciente** en el intervalo I si para todo $x_1, x_2 \in I$, se cumple $f(x_1) < f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2$.

Decimos que una función f **decrece** en el intervalo I si para todos $x_1, x_2 \in I$, se cumple $f(x_1) \geq f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2$.

Decimos que una función f es **estrictamente decreciente** en el intervalo I si para todos $x_1, x_2 \in I$, se cumple $f(x_1) > f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2$.

Por ejemplo,

- la función $f(x) = 3x$ aumenta en el intervalo $(-\infty, \infty)$ porque $3x_1 < 3x_2$ siempre que $x_1 < x_2$.
- Por otro lado, la función $f(x) = -x^3$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$ porque $-x_1^3 \geq -x_2^3$ siempre que $x_1 < x_2$

Ambas funciones se representan en la [Figura 1.11](#).

1.2.3 Combinación de funciones

Ahora que hemos revisado las características básicas de las funciones, vamos a analizar qué sucede cuando generamos nuevas

funciones combinando funciones mediante la aplicación de operaciones matemáticas básicas.

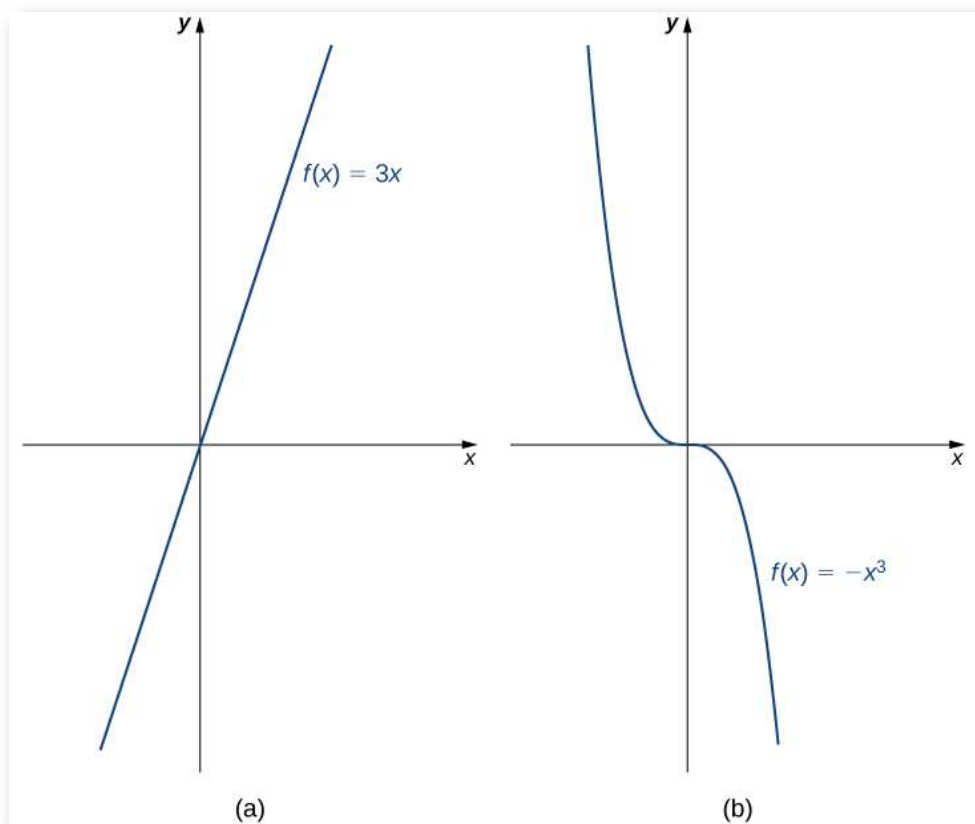


Figura 1.11 (a) La función $f(x) = 3x$ aumenta en el intervalo $(-\infty, \infty)$.
(b) La función $f(x) = -x^3$ está disminuyendo en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Por ejemplo, si la función $C(x)$ describe el coste para una empresa de fabricar x artículos y la función $R(x)$ describe los ingresos generados por la venta de x artículos, entonces el beneficio de la fabricación y venta de x elementos se define como $P(x) = R(x) - C(x)$. Usando la diferencia entre dos funciones, se ha creado una nueva función, veamos un ejemplo de cómo generar una nueva función componiendo dos funciones.

Por ejemplo, dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 1$, la **función g compuesta con f , que se denota por $f \circ g$** se define de manera que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (3x + 1)^2$$

Si se compone f con g , es decir $g \circ f$, la función que se obtiene es

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3f(x) + 1 = 3x^2 + 1$$

Se debe observar que estas dos nuevas funciones, $f \circ g$ y $g \circ f$, son diferentes entre sí.

Vamos a analizar con más detalle la generación de funciones a partir de otras dadas.

Combinando funciones con operadores matemáticos

Para combinar funciones usando operadores matemáticos, simplemente aplicamos a las funciones el operador y simplificamos la expresión que se obtenga.

Así, dadas dos funciones f y g , podemos definir las siguientes funciones nuevas:

1. **Suma:** $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. **Diferencia:** $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. **Producto:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. **Cociente:** $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ para $g(x) \neq 0$



Ejemplo

1.6 Combinando funciones usando operaciones matemáticas

Dada la función $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2 - 1$, encuentra para cada función su dominio.

- a. $(f + g)(x)$
- b. $(f - g)(x)$
- c. $(f \cdot g)(x)$
- d. $(f/g)(x)$



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.4

Para $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = 2x - 5$, encuentra $(f/g)(x)$ y su dominio.

Función composición

Cuando componemos funciones, aplicamos una función a una función. Por ejemplo, supongamos que la temperatura T en un día dado se describe como una función del tiempo t medido en horas después de la medianoche, como en la [Tabla 1.1](#).

Supongamos también que el coste C , para calentar o enfriar un edificio durante una hora, puede describirse como una función de la temperatura T . Combinando estas dos funciones, podemos describir el coste de calentar o enfriar un edificio como una función del tiempo mediante la evaluación de $C(T(t))$.

Hemos definido así una nueva función, denominada $C \circ T$, que se define de la siguiente manera: $(C \circ T)(t) = C(T(t))$ para todas las t en el dominio de T que cumplan que $T(t)$ es un punto del dominio de C .

Esta nueva función se denomina **función compuesta**. Notamos que dado que el coste es una función de la temperatura y la temperatura es una función del tiempo, tiene sentido definir esta nueva función $(C \circ T)(t)$, pero no tiene sentido considerar $(T \circ C)(t)$, porque la temperatura no es una función del coste.

DEFINICIÓN. Consideramos la función f con dominio A y rango B , y la función g cuyo dominio es D y rango E . Si B es un subconjunto de D , entonces la **composición de funciones** $(g \circ f)(x)$ es la función con dominio A tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Una función compuesta $g \circ f$ se puede ver en dos pasos. Primero, la función f asigna cada entrada x en el dominio de f su imagen $f(x)$ en el rango de f . En segundo lugar, dado que el rango de f es un subconjunto del dominio de g , el valor $f(x)$ es un elemento en el dominio de g y, por lo tanto, se puede considerar $g(f(x))$ en el rango de g .

En la [Figura 1.12>](#), se muestra una representación visual de la composición de funciones.

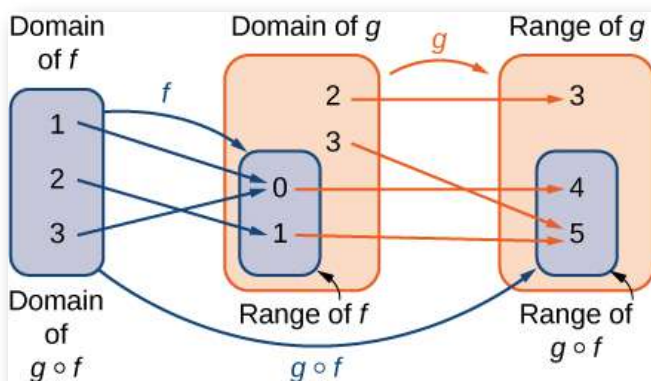
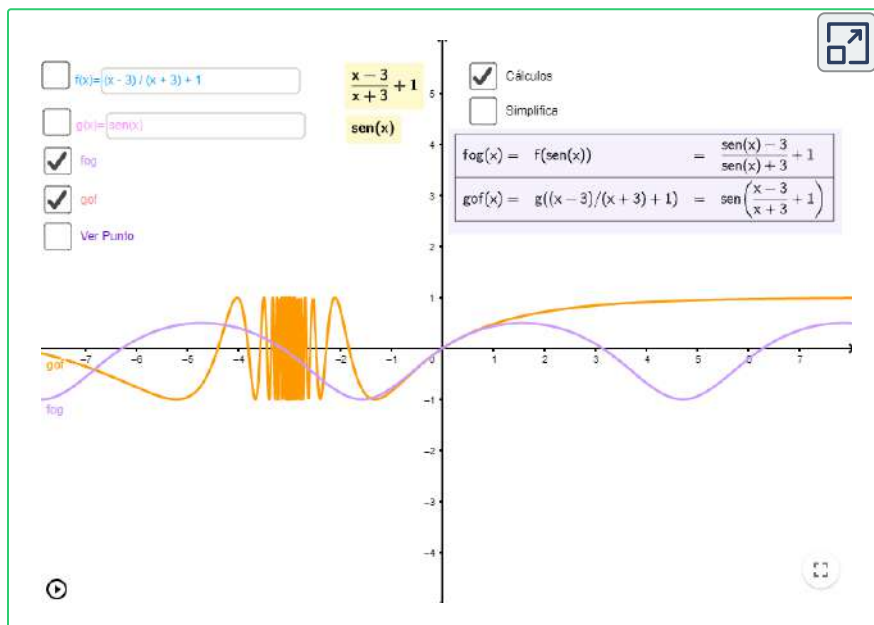


Figura 1.12 Para la composición $g \circ f$, tenemos $(g \circ f)(1) = 4$, $(g \circ f)(2) = 5$, y $(g \circ f)(3) = 3$.



En la siguiente escena interactiva diseñada en GeoGebra por [Javier Cayetano](#), se muestra cómo componer distintas funciones.





Ejemplo

1.7 Composición de funciones definidas por fórmulas

Consideramos las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 1/x$

- Encuentra $(g \circ f)(x)$ y determina su dominio y rango.
- Evalúa $(g \circ f)(4)$, $(g \circ f)(-1/2)$.
- Encuentra $(f \circ g)(x)$ y determina su dominio y rango.
- Evalúa $(f \circ g)(4)$, $(f \circ g)(-1/2)$.



Solución

En el ejemplo 1.7, vemos que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. Esto nos indica que el orden en el que se componen las funciones, en general, es importante.



Pregunta de control

Cuestión 1.5

Sea $f(x) = 2 - 5x$, $g(x) = \sqrt{x}$, encuentra $(f \circ g)(x)$.



Ejemplo

1.8 Composición de funciones definidas por tablas

Se consideran las funciones f y g de las tablas 1.4 y 1.5.

- Evalúa $(g \circ f)(3)$, $(g \circ f)(0)$.
- Determina el dominio y el rango de $(g \circ f)(x)$.
- Evalúa $(f \circ f)(3)$, $(f \circ f)(1)$.
- Determina el dominio y el rango de $(f \circ f)(x)$.



Solución

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	0	4	2	4	-2	0	-2	4

Tabla 1.4

x	-4	-2	0	2	4
g(x)	1	0	3	0	5

Tabla 1.5



Ejemplo

1.9 Aplicación de la composición de funciones

Una tienda está anunciando una venta del 20% de descuento en toda la mercancía. Carolina tiene un cupón que le da derecho a un 15% de descuento adicional en cualquier artículo, incluidos los productos en oferta.

Si Carolina decide comprar un artículo con un precio original de x dólares, ¿cuánto terminará pagando si aplica su cupón al precio de oferta? Resuelve este problema usando una función compuesta.

 Solución



**Pregunta
de control**

Cuestión 1.6

Si los artículos están en oferta con un 10% de descuento sobre su precio original y un cliente tiene un cupón con un 30% de descuento adicional, ¿cuál será el precio final de un artículo que originalmente cuesta x dólares, después de aplicar el cupón al precio de oferta?

1.2.4 Simetría de funciones

Las gráficas de ciertas funciones tienen propiedades de simetría que nos ayudan a comprender la función y la forma de su gráfica. Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ que se muestra en la [Figura 1.13a](#). Si tomamos la parte de la curva que se encuentra a la derecha del eje Y y la volteamos sobre el eje Y , se sitúa exactamente encima de la curva a la izquierda del eje Y . En este caso, decimos que la función tiene **simetría con respecto al eje Y** .

Por otro lado, consideremos la función $f(x) = x^3 - 4x$ que se muestra en la [Figura 1.13b](#). Si tomamos el gráfico y lo giramos 180° sobre el origen, el nuevo gráfico se verá exactamente igual. En este caso, decimos que la función tiene **simetría con respecto al origen**.

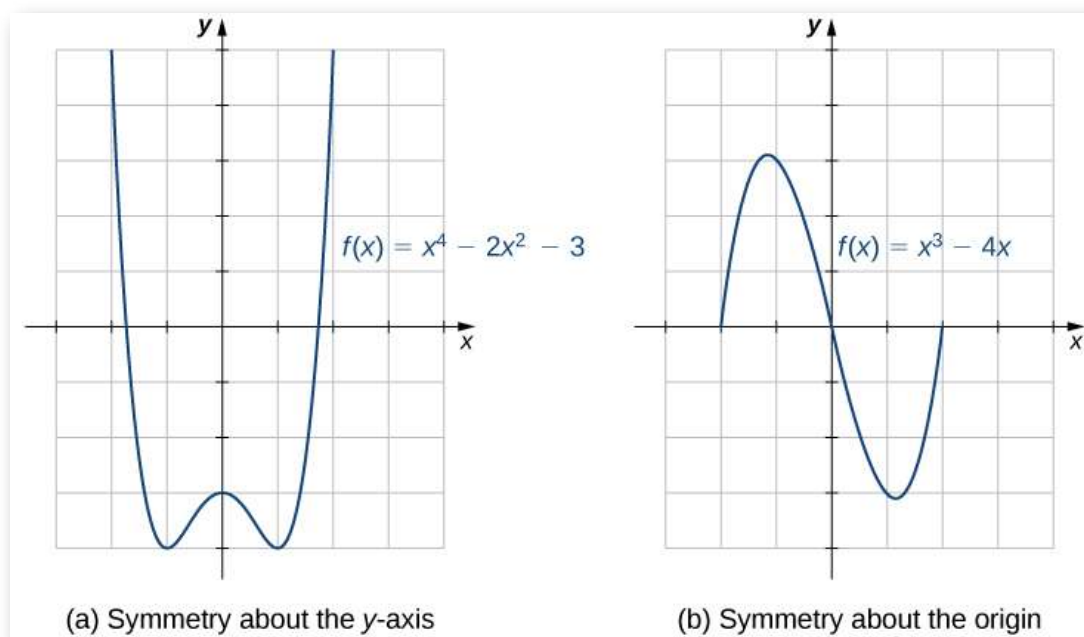


Figura 1.13 (a) Una gráfica que es simétrica respecto del eje Y (b) Una imagen que es simétrica respecto del origen.

En la figura 1.13a, correspondiente a la función

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$$

el eje X va de -3 a 4 y el eje Y va de -4 a 5. Esta función disminuye hasta que llega al punto $(-1, -4)$, que es el mínimo de la función. La gráfica aumenta hasta el punto $(0, 3)$, que es un máximo local. Luego, el gráfico disminuye hasta que llega al punto $(1, -4)$, antes de volver a aumentar.

En la figura del apartado b), la función que se representa es

$$f(x) = x^3 - 4x$$

y su gráfica comienza en la intersección con x en $(-2, 0)$ y aumenta hasta el punto aproximado de $(-1.2, 3.1)$.

Luego, la función disminuye, pasando por el origen, hasta que llega al punto aproximado de $(1.2, -3.1)$. Después, la función comienza a aumentar nuevamente y tiene otra intersección x en $(2, 0)$.

Si se nos dan la gráfica de una función, es fácil ver si tiene uno de estos dos tipos de simetría. Pero sin una gráfica, ¿cómo podemos determinar algebraicamente si una función f tiene simetría? Mirando la [Figura 1.13 a](#) nuevamente, vemos que dado que f es simétrica con respecto al eje Y , si el punto (x, y) está en la gráfica, el punto $(-x, y)$ también está. En otras palabras, $f(-x) = f(x)$. Si una función f tiene esta propiedad, decimos que f es una **función par**, esto es, que tiene simetría con respecto al eje Y . Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Por el contrario, fijándonos en la [Figura 1.13b](#), si una función f es simétrica con respecto al origen, entonces siempre que el punto (x, y) está en la gráfica, el punto $(-x, -y)$ también está en la gráfica. En otras palabras, $f(-x) = -f(x)$. Si f tiene esta propiedad, decimos que f es una **función impar**, que tiene simetría con respecto al origen. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

DEFINICIÓN.

Si $f(x) = f(-x)$ para todo x en el dominio de f , entonces f es una **función par**, este tipo de funciones son simétricas respecto del eje Y .

Si $f(x) = -f(-x)$ para todo x en el dominio de f , entonces f es una **función impar**, este tipo de funciones son simétricas respecto al origen.



Ejemplo

1.10 Funciones pares e impares

Determinar, para cada una de las siguientes funciones, si tienen simetría par, impar o ninguna de ellas.

- a. $f(x) = -5x^4 + 7x^2 - 2$
- b. $f(x) = 2x^5 - 4x + 5$
- c. $f(x) = 3x^2 + 1$



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 1.7

Determina si $f(x) = 4x^3 - 5x$ es par, impar o ni par ni impar.

Una función simétrica que surge con frecuencia es la función **valor absoluto** que se escribe $|x|$. Se define como

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Algunos estudiantes describen esta función diciendo que "hace que todo sea positivo".

Por la definición de la función valor absoluto, vemos que si $x < 0$, entonces $|x| = -x > 0$, y si $x > 0$, entonces $|x| = x > 0$. Sin embargo, para $x = 0$, $|0| = 0$. Por lo tanto, es más exacto decir que para todas las entradas distintas de cero, la imagen es positiva, pero si $x = 0$, la imagen es cero, $|0| = 0$. Concluimos que el rango de la función valor absoluto es

$$\{y|y \geq 0\}$$

En la figura 1.14, se muestra que la función valor absoluto es simétrica con respecto al eje Y siendo, por lo tanto, una función par.

En la figura, el eje X va de -3 a 3 y el eje Y va de -4 a 4. La gráfica comienza en el punto $(-3, 3)$ y disminuye en línea recta hasta que llega al origen. Luego, la gráfica aumenta en línea recta hasta que llega al punto $(3, 3)$.

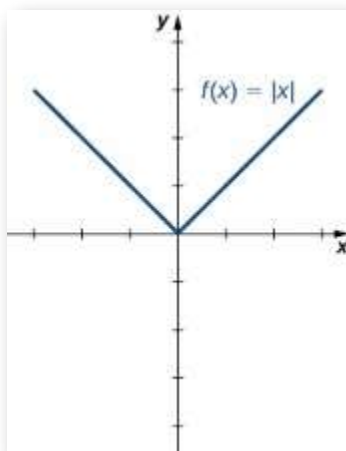


Figura 1.14 La gráfica de $f(x) = |x|$ es simétrica respecto del eje Y .



Ejemplo

1.11 Trabajando con la función valor absoluto

Encuentra el dominio y el rango de $f(x) = 2|x - 3| + 4$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.8

Dada $f(x) = |x + 2| - 4$, encuentra el dominio y el rango.



1.2.5 Ejercicios

A continuación, encontrarás varios ejercicios para que compares lo aprendido. Los ejercicios correspondientes a numerales impares, presentan la solución.



Para los siguientes ejercicios, (a) determina el dominio y el rango de cada relación y (b) determina cuando la relación es una función.

1.

x	y	x	y
-3	9	1	1
-2	4	2	4
-1	1	3	9
0	0		

(Solución)

2.

x	y	x	y
-3	-2	1	1
-2	-8	2	8
-1	-1	3	-2
0	0		

3.

x	y	x	y
1	-3	1	1
2	-2	2	2
3	-1	3	3
0	0		

(Solución)

4.

x	y	x	y
1	3	5	1
2	1	6	1
3	1	7	1
4	1		

5.

x	y	x	y
3	3	15	1
5	2	21	2
8	1	33	3
10	0		

([Solución](#))

6.

x	y	x	y
-7	11	1	-2
-2	5	3	4
-2	1	6	11
0	-1		



Para los siguientes ejercicios encuentra, si existen, los valores para cada función y da los resultados simplificados.

a. $f(0)$ b. $f(1)$ c. $f(3)$ d. $f(-x)$ e. $f(a)$ f. $f(a + h)$

7. $f(x) = \frac{2}{x}$ ([Solución](#))

8. $f(x) = 5x - 2$

9. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$ ([Solución](#))

$$10. f(x) = |x - 7| + 8$$

$$11. f(x) = \sqrt{6x + 5} \text{ (Solución)}$$

$$12. f(x) = \frac{x-2}{3x+7}$$

$$13. f(x) = 9 \text{ (Solución)}$$



Para los siguientes ejercicios, encuentra el dominio, rango, los ceros y la intersección con el eje y de las funciones siguientes:

$$14. f(x) = \frac{x}{x^2-16}$$

$$15. f(x) = \sqrt{8x - 1} \text{ (Solución)}$$

$$16. f(x) = \frac{3}{x^2+4}$$

$$17. f(x) = -1 + \sqrt{x + 2} \text{ (Solución)}$$

$$18. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-9}}$$

$$19. f(x) = \frac{3}{x-4} \text{ (Solución)}$$

$$20. f(x) = 4|x + 5|$$

$$21. f(x) = \sqrt{\frac{7}{x-5}} \text{ (Solución)}$$



Para los siguientes ejercicios, prepare una tabla para esbozar la gráfica de cada función utilizando los siguientes valores: $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

22. $f(x) = x^2 + 1$

x	y	x	y
-3	10	1	2
-2	5	2	5
-1	2	3	10
0	1		

23. $f(x) = 3x - 6$

x	y	x	y
-3	-15	1	-3
-2	-12	1	-3
-1	-9	3	3
0	-6		

(Solución)

24. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

x	y	x	y
-3	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
-2	0	2	2
-1	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{5}{2}$
0	1		

25. $f(x) = 2|x|$

x	y	x	y
-3	6	1	2
-2	4	2	4
-1	2	3	6
0	0		

(Solución)

26. $f(x) = -x^2$

x	y	x	y
-3	9	1	.1
-2	-4	2	4
-1	-1	3	9
0	0		

27. $f(x) = x^3$

x	y	x	y
-3	27	1	1
-2	-8	2	8
-1	-1	3	27
0	0		

(Solución)

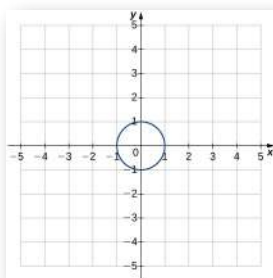


En los siguientes ejercicios, utiliza el test de la recta vertical para determinar si cada gráfica representa a una función suponiendo que

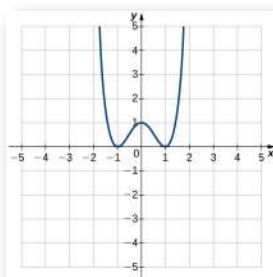
cada gráfica continúa en ambos extremos extendiéndose más allá de la cuadrícula dada. En el caso de que la gráfica represente a una función, determina para cada gráfico:

- Dominio y rango.
- Intersección con el eje x si la hubiera (cuando sea necesario dar una estimación).
- Intersección con el eje y si la hubiera (cuando sea necesario dar una estimación).
- Intervalos donde la función es creciente.
- Intervalos donde la función es decreciente.
- Simetrías respecto del eje y y respecto del origen si la hubiera.
- Si la función es par, impar o ninguna de ellas.

28.

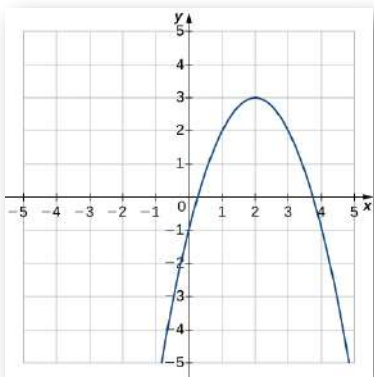


29.

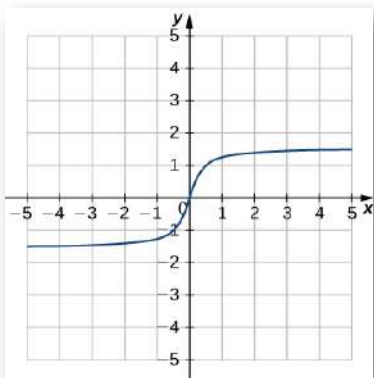


(Solución)

30.

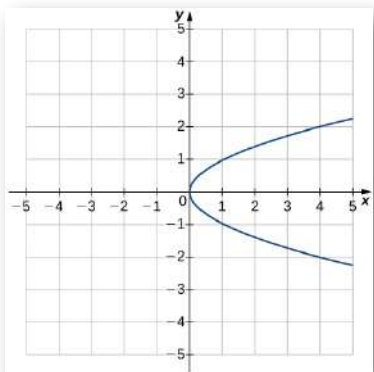


31.

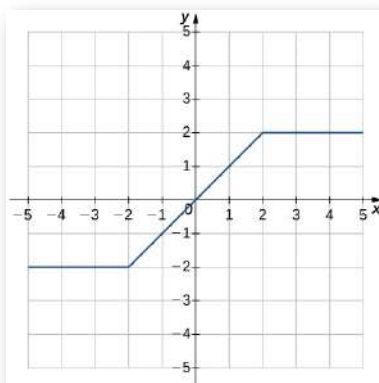


(Solución)

32.

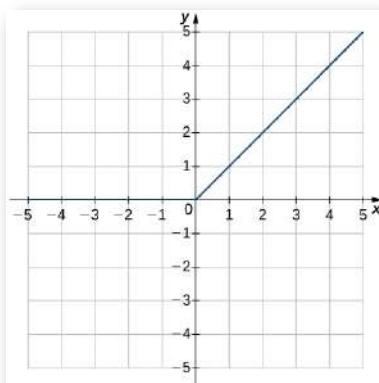


33.

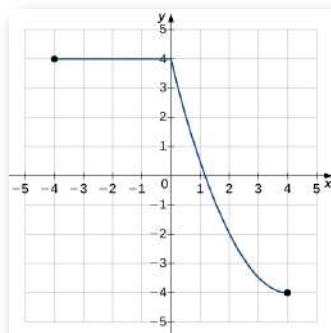


(Solución)

34.



35.



(Solución)



En los siguientes ejercicios, para cada par de funciones, encuentra **a.** $f + g$ **b.** $f - g$ **c.** $f \cdot g$ **d.** f/g . Determina el dominio de estas funciones.

36. $f(x) = 3x + 4, g(x) = x - 2$

37. $f(x) = x - 8, g(x) = 5x^2$ (**Solución**)

38. $f(x) = 3x^2 + 4x + 1, g(x) = x + 1$

39. $f(x) = 9 - x^2, g(x) = x^2 - 2x - 3$ (**Solución**)

40. $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x - 2$

41. $f(x) = 6 + \frac{1}{x}, g(x) = \frac{1}{x}$ (**Solución**)



En los siguientes ejercicios, para cada par de funciones, encuentra **a.** $(f \circ g)(x)$ **b.** $(g \circ f)(x)$ Simplifica los resultados y encuentra el dominio de cada una de las funciones obtenidas.

42. $f(x) = 3x, g(x) = x + 5$

43. $f(x) = x + 4, g(x) = 4x - 1$ (**Solución**)

44. $f(x) = 2x + 4, g(x) = x^2 - 2$

45. $f(x) = x^2 + 7, g(x) = x^2 - 3$ (**Solución**)

46. $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x + 9$

47. $f(x) = \frac{3}{2x+1}, g(x) = \frac{2}{x}$ (**Solución**)

48. $f(x) = |x + 1|, g(x) = x^2 + x - 4$

49. La tabla siguiente contiene los ganadores de la NBA desde los años 2001 a 2012.

Año	Ganador
2001	LA Lakers
2002	LA Lakers
2003	San Antonio Spurs
2004	Detroit Pistons
2005	San Antonio Spurs
2006	Miami Heat
2007	San Antonio Spurs
2008	Boston Celtics
2009	LA Lakers
2010	LA Lakers
2011	Dallas Mavericks
2012	Miami Heat

- Consideremos la relación en la que el dominio serían los años 2001 a 2012 y el rango los equipos ganadores correspondientes. ¿Es esta relación una función? Explica por qué o por qué no.
- Consideremos la relación donde el dominio serían los equipos ganadores y el rango el año correspondiente. ¿Es esta relación una función? Explica por qué o por qué no. (**Solución**)

50. [T] El área A de un cuadrado depende de la longitud del lado s .
- Escribe una función $A(s)$ para el área de un cuadrado, segundo.
 - Encuentra e interpreta $A(6.5)$.
 - Encuentra el valor exacto y la aproximación hasta dos dígitos significativos de la aproximación a la longitud del lado de un cuadrado que tiene un área de 56 unidades cuadradas.
51. [T] El volumen de un cubo depende de la longitud del lado s .
- Escribe una función $V(s)$ para el volumen de un cubo.
 - Encuentra e interpreta $V(11.8)$.

(Solución)

52. [T] Una empresa de alquiler de coches alquila coches por una tarifa fija de 20 dólares y un cargo por hora de 10.25 dólares. Por tanto, el total del coste C de alquilar un automóvil es una función de las horas t que el automóvil esté alquilado más la tarifa plana.
- Escribe la fórmula de la función que modeliza esta situación.
 - Encuentra el coste total para alquilar un coche por 2 días y 7 horas.
 - Determina cuánto tiempo se alquiló el automóvil si la factura es 432,73 dólares.
53. [T] Un vehículo tiene un tanque de 20 galones y con esto recorre 15 millas por galón. El número de millas N que se pueden conducir depende de la cantidad de gas x en el tanque.

- Escribe una fórmula que modelice esta situación.
- Determina la cantidad de millas que puede recorrer el vehículo viajando con (i) un tanque lleno de gasolina y (ii) $3/4$ de un tanque de gas.
- Determina el dominio y rango de la función.
- Determina cuántas veces tuvo que detenerse el conductor para repostar gasolina si ha conducido un total de 578 millas.

Nota: Un galón es una medida estadounidense de capacidad (para líquidos) equivalente a 3,785 litros. ([Solución](#))

54. [T] El volumen V de una esfera depende de la longitud de su radio como $V = (4/3)\pi r^3$. Dado que la Tierra no es una esfera perfecta, podemos usar el radio medio al medir desde el centro a su superficie. El radio medio es el promedio de la distancia desde el centro físico a la superficie, basada en una gran cantidad de muestras. Encuentra el volumen de la Tierra con radio medio $6,371 \times 10^6 m$.

55. [T] Cierta bacteria crece en cultivo en forma de región circular. El radio del círculo, medido en centímetros, está dado por $r(t) = 6 - \frac{5}{t^2+1}$, donde t es el tiempo medido en horas desde que la bacteria se puso en el cultivo con un círculo de radio 1 cm.

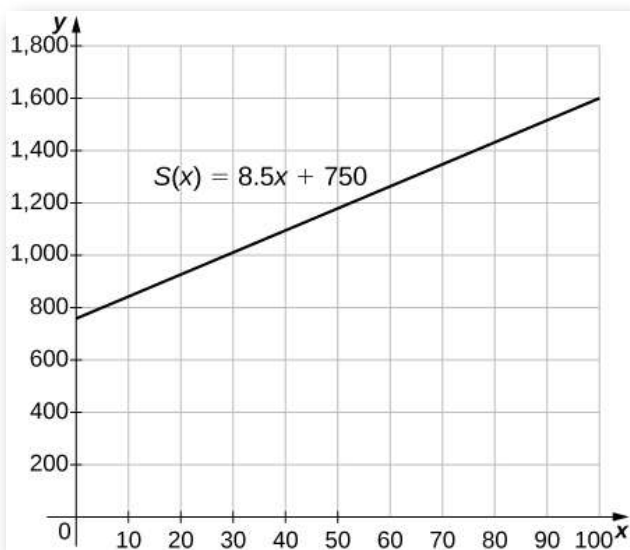
- Expresa el área de las bacterias en función de la hora.
- Encuentra el área exacta y aproximada de la bacteria del cultivo pasadas 3 horas.
- Expresa la circunferencia de las bacterias como función del tiempo.
- Encuentra la circunferencia exacta y aproximada de las bacterias en 3 horas. ([Solución](#))

56. [T] Un turista estadounidense visita París y debe convertir dólares estadounidenses a euros usando la función $E(x) = 0,79x$, donde x es la cantidad de dólares estadounidenses y $E(x)$ es el número equivalente a euros. Desde la conversión las tarifas fluctúan, cuando el turista regresa a los Estados Unidos dos semanas después, la conversión de euros a dólares estadounidenses es $D(x) = 1.245x$, donde x es el número de euros y $D(x)$ es el número equivalente de dólares estadounidenses.

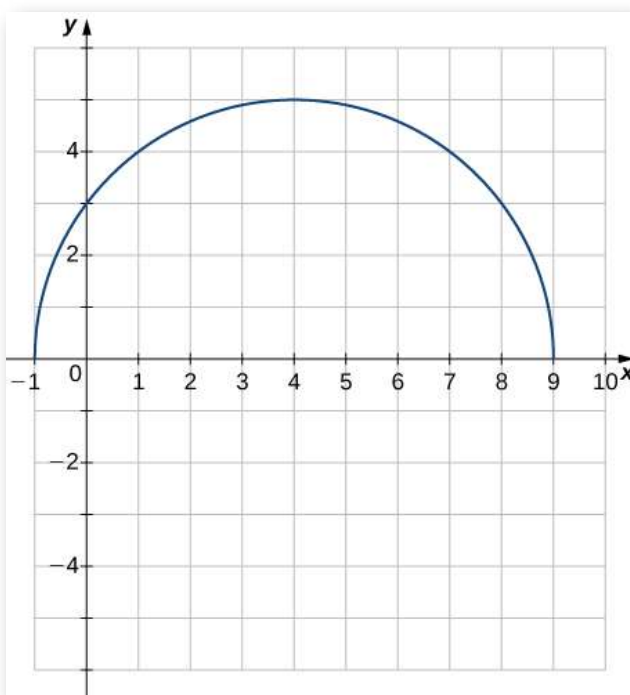
- Encuentra la función compuesta que convierte directamente de dólares estadounidenses a dólares estadounidenses habiendo convertido entre medidas en euros. ¿Pierde valor el turista en el proceso de conversión?
- Utiliza el apartado anterior para determinar cuántos dólares estadounidenses tendría el turista al regresar de su viaje si convirtió 200 dólares extra cuando llegó a París que fue lo que no gastó.

57. [T] El gerente de una tienda de patinetes paga a sus trabajadores un salario mensual S de 750 dólares más una comisión de 8,5 dólares por cada patinete que vendan.

- Escriba una función $y = S(x)$ que modelice el salario mensual basado en el número de patinetas x que el trabajador venda.
- Encuentra el salario mensual aproximado cuando un trabajador vende 25, 40 o 55 patinetes.
- Utiliza la función INTERSECT en una calculadora gráfica para determinar el número de patinetes que deben venderse para que un trabajador gane unos ingresos mensuales de 1400 dólares. Sugerencia: encuentra la intersección del función y la recta $y = 1400$. ([Solución](#))



58. [T] Usa una calculadora gráfica para representar el semicírculo $y = 25 - (x - 4)^2$. Luego, utiliza la función que permita encontrar el valor de las intersecciones en los ejes x e y



1.3 Tipos de funciones

Objetivos de aprendizaje

1. Calcular la pendiente de una función lineal e interpretar su significado.
2. Reconocer el grado de un polinomio.
3. Encontrar las raíces de un polinomio cuadrático.
4. Describir las gráficas de funciones polinomiales pares e impares.
5. Identificar una función racional.
6. Describir las gráficas de las funciones de potencia y radical.
7. Explicar la diferencia entre funciones algebraicas y trascendentes.
8. Representar una función definida a trozos.
9. Dibujar la gráfica de una función que se haya desplazado, estirado o reflejado desde su posición gráfica inicial.

Una vez estudiadas las características generales de las funciones, examinaremos en este momento algunas tipos específicos de funciones.

Comenzamos revisando las propiedades básicas de las funciones lineales y cuadráticas, y luego generalizaremos incluyendo polinomios de mayor grado. Combinando la función raíz con polinomios, podemos definir funciones algebraicas generales y se distinguirán de las funciones trascendentes que examinaremos más adelante en este capítulo.

Esta sección terminará mostrando ejemplos de funciones definidas por tramos o a trozos y se verá cómo obtener una función cuya gráfica resulta de desplazar, estirar o reflejar una función dada

1.3.1 Funciones lineales y pendiente

El tipo de función a considerar más sencilla es una función lineal. Las funciones lineales son de la forma $f(x) = ax + b$, dónde a y b son constantes. En la [Figura 1.15](#), vemos ejemplos de funciones lineales cuando a es positiva, negativa y cero. Hay que tener en cuenta que

- si $a > 0$, la gráfica de la recta crece a medida que x aumenta. En otras palabras, $f(x) = ax + b$ es creciente en $(-\infty, \infty)$
- si $a < 0$, la gráfica de la recta decrece cuando a aumenta. En este caso, $f(x) = ax + b$ es decreciente en $(-\infty, \infty)$
- si $a = 0$, la recta es horizontal.

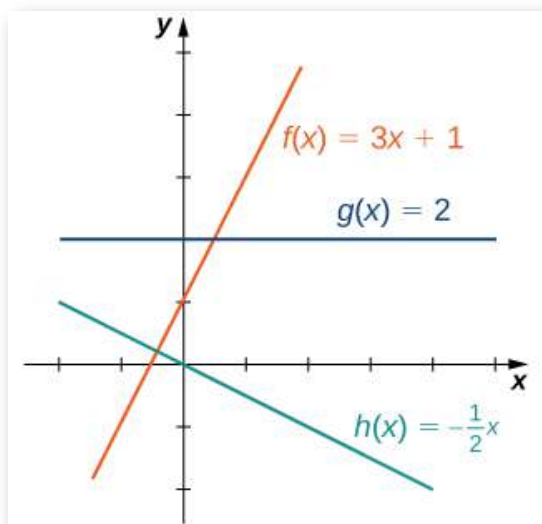


Figura 1.15 Estas funciones lineales aumentan o disminuyen en $(-\infty, \infty)$ y una de las funciones es una recta horizontal.

Como sugiere la [Figura 1.15](#), la gráfica de cualquier función lineal es una recta. Una de las características distintivas de una recta es su pendiente.

La pendiente es el cambio en y por cada cambio de unidad en x . La pendiente mide tanto la inclinación como la dirección de la recta. Si la pendiente es positiva, la recta apunta hacia arriba cuando se mueve de izquierda a derecha. Si la pendiente es negativa, la recta apunta hacia abajo cuando se mueve de izquierda a derecha. Si la pendiente es cero, la recta es horizontal.

Para calcular la pendiente de una recta, necesitamos determinar la razón del cambio en y versus el cambio en x . Para hacerlo, elegimos dos puntos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la recta y se calcula

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

DEFINICIÓN. Consideremos la recta L pasando por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . Sean $\Delta y = y_2 - y_1$ y $\Delta x = x_2 - x_1$ los cambios en y y en x , respectivamente. La **pendiente de la recta** es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1.3)$$

En la [Figura 1.16](#), se muestra que esta relación es independiente de los puntos elegidos.

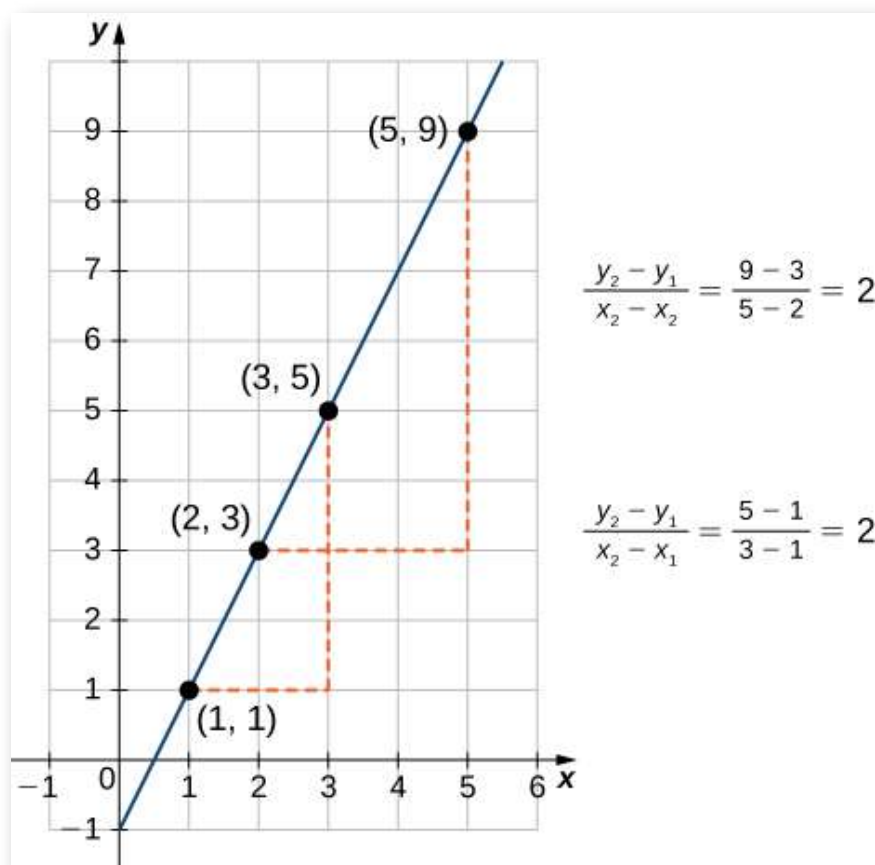


Figura 1.16 Para cualquier función lineal, la pendiente $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ es independiente de la elección de puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la recta.

Ahora examinaremos la relación entre la pendiente y la expresión de una función lineal dada por la fórmula $f(x) = ax + b$. Como se discutió anteriormente, sabemos que la gráfica de una función lineal es una recta. Podemos usar nuestra definición de pendiente para calcular la pendiente de dicha recta.

Como se muestra, podemos determinar la pendiente calculando

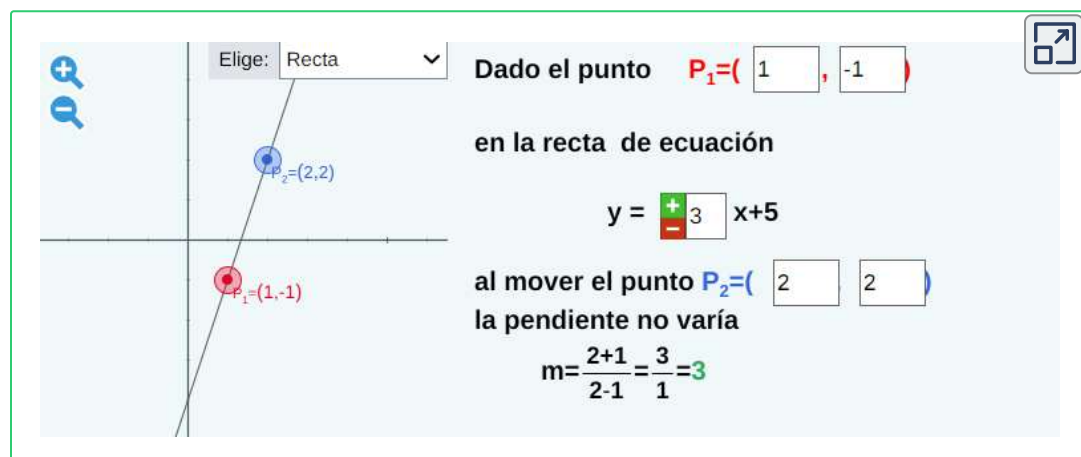
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

por cualquier punto (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la recta. Consideramos la función f en $x = 0$ y vemos que $(0, b)$ es un punto en la recta y evaluando en $x = 1$, se tiene que $(1, a + b)$ es también un punto en esta recta. Por lo tanto, la pendiente de la recta será

$$m = \frac{(a + b) - b}{1 - 0} = a$$



En la siguiente escena, elegida la opción "Recta", se puede mover el punto azul por la recta y observar que la pendiente no depende del punto elegido. Por otro lado, seleccionando la opción "dos puntos", la ecuación que pasa por los dos puntos que se consideren de la forma $y = ax + b$, tiene como valor a el de la pendiente de la recta.



Hemos demostrado que el coeficiente a de la función lineal es la pendiente de la recta. Además, vemos que esta recta corta al eje Y en el punto $(0, b)$. Dado que a menudo usamos el símbolo m para denotar la pendiente de una recta, podemos escribir

$$f(x) = mx + b$$

como ecuación **pendiente-ordenada en el origen** de una función lineal.

A veces es conveniente expresar una función lineal de forma diferente. Por ejemplo, supongamos que la gráfica de una función lineal pasa por el punto (x_1, y_1) y la pendiente de la recta es m . Desde cualquier otro punto $(x, f(x))$ en el gráfico de f se debe satisfacer la ecuación

$$m = \frac{f(x) - y_1}{x - x_1}$$

esta función lineal se puede expresar escribiendo

$$f(x) - y_1 = m(x - x_1)$$

Llamamos a esta expresión la ecuación **punto-pendiente** de la función lineal.

Dado que cada recta no vertical es la gráfica de una función lineal, estas rectas se pueden describir mediante las ecuaciones pendiente-ordenada en el origen o punto-pendiente. Sin embargo, cuando la recta es vertical, al no representar la gráfica de una función, no se puede expresar con estas ecuaciones. En cambio, una recta vertical se describe con la ecuación $x = k$ para alguna constante k .

Por esta razón, usamos la notación

$$Ax + By = C,$$

dónde A, B son ambos no nulos, para denotar la **forma general** de una recta.

DEFINICIÓN.

Consideremos una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y con pendiente m . La ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (1.4)$$

es la **ecuación punto-pendiente** para esa recta.

Consideremos una recta con pendiente m siendo $(0, b)$ el punto de intersección con el eje Y . La ecuación

$$y = mx + b \quad (1.5)$$

es la forma **pendiente-ordenada en el origen** de la recta.

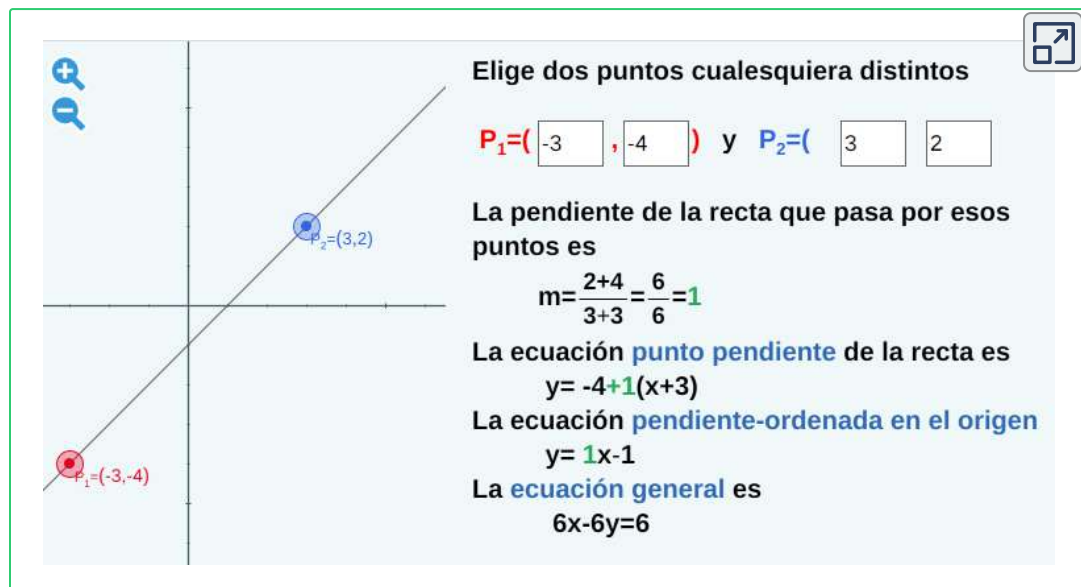
La **forma general** de una recta viene dada por la ecuación

$$Ax + By = C \quad (1.6)$$

dónde A y B no son ambos nulos. Esta forma es más general porque admite las rectas verticales, $x = k$.



En la siguiente escena, se muestra cómo a partir de dos puntos dados se pueden determinar las distintas ecuaciones de la recta.



Ejemplo

1.12 Encontrar la pendiente y las ecuaciones de las rectas

Consideremos la recta que pasa por los puntos $(11, -4)$ y $(-4, 5)$, como se muestra en la [Figura 1.17](#).

- Encuentra la pendiente de la recta.
- Encuentra una ecuación para esta función lineal en forma de punto pendiente.
- Encuentra una ecuación para esta función lineal en forma pendiente-ordenada en el origen.



Solución

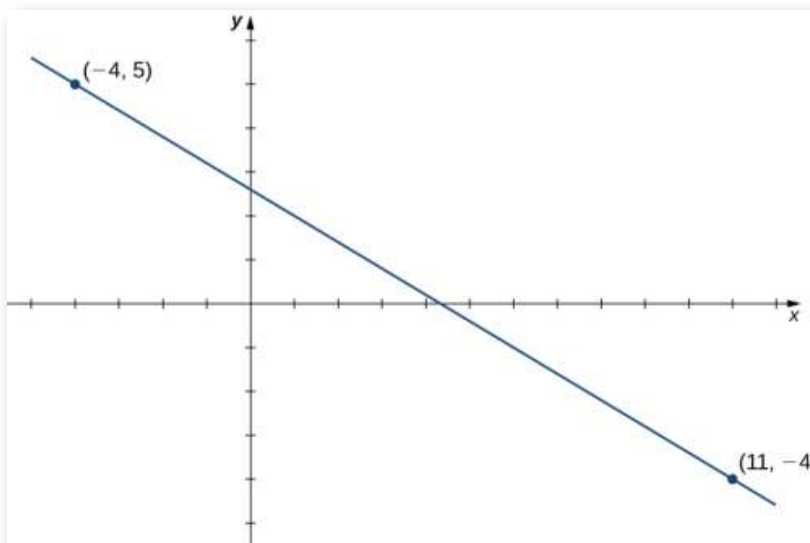


Figura 1.17 Ecuación de una función lineal que pasa por dos puntos dados.



Ejemplo

1.13 Una función lineal

Jessica sale de su casa a las 5:50 de la madrugada y va a correr 14 kilómetros. Regresa a su casa a las 7:08 de la mañana. Responde a las siguientes preguntas, asumiendo que Jessica corre a un ritmo constante.

- Describe la distancia d (en millas) como una función lineal de t (en minutos).
- Dibuja una gráfica de d .
- Interpreta el significado de la pendiente.



Solución

1.3.2 Funciones polinómicas

Una función lineal es un tipo especial de una clase más general: las funciones polinómicas. Una **función polinómica** es cualquier función que se pueda escribir de la forma siguiente

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1.7)$$

para algún entero $n \geq 0$ y constantes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$, dónde $a_n \neq 0$. En el caso de que $n = 0$, se permitirá que $a_0 = 0$ y en este caso la función $f(x) = 0$ recibe el nombre de **función cero** o **nula**. El valor n se llama **grado del polinomio**; el coeficiente a_n se llama **coeficiente director**.

Observamos que una función lineal de la forma $f(x) = mx + b$ es un polinomio de grado 1 en el caso de que $m \neq 0$ y de grado 0 si $m = 0$.

Un polinomio de grado 0 también se llama **función constante**. Una función polinomial de grado 2 se llama **función cuadrática**. En particular, una función cuadrática tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

dónde $a \neq 0$. Una función polinómica de grado 3 se llama **función cúbica**

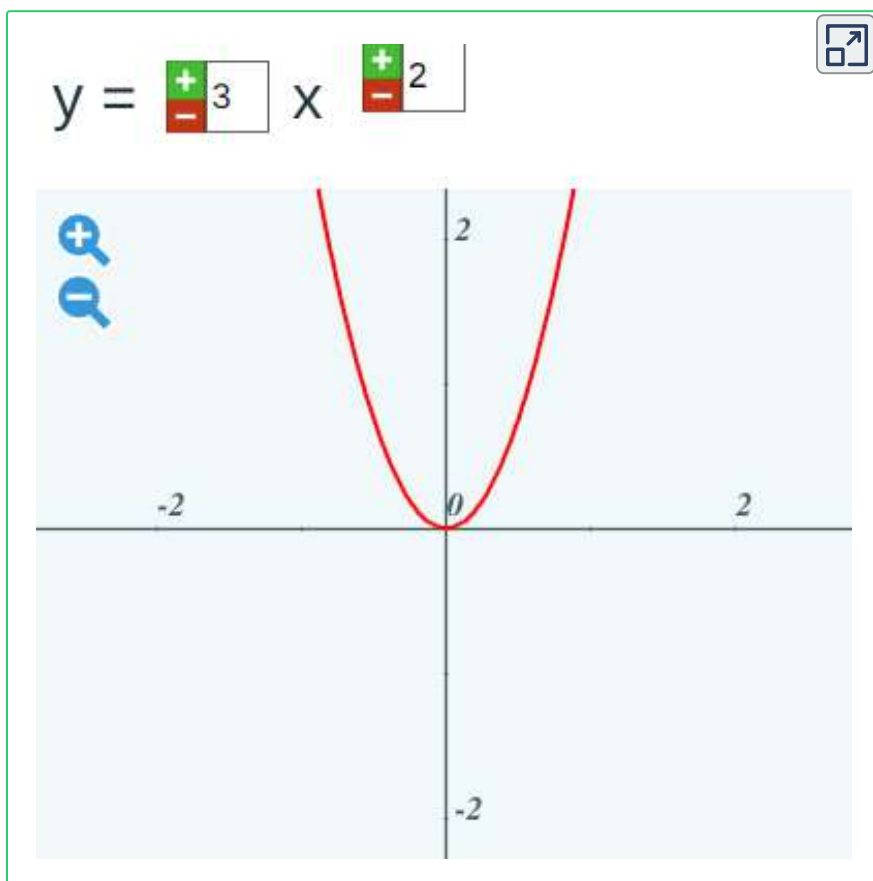
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

1.3.3 Funciones potenciales

Algunas funciones polinomiales son funciones potenciales. Una **función potencial** es cualquier función de la forma $f(x) = ax^b$, donde a y b son números reales. El exponente en una función potencial puede ser cualquier número real, pero aquí consideramos el caso en el que el exponente es un número entero positivo dejando para más adelante otros casos.



En la siguiente escena interactiva puedes observar las gráficas de las funciones $f(x) = ax^b$ para distintos valores de a y b .



Si el exponente es un número entero positivo, entonces $f(x) = ax^n$ es un polinomio.

- Si n es par, entonces $f(x) = ax^n$ es una función par porque $f(-x) = a(-x)^n = a \cdot x^n = f(x)$.
- Si n es impar, entonces $f(x) = ax^n$ es una función impar porque $f(-x) = a(-x)^n = -a \cdot x^n = -f(x)$ ([Figura 1.18](#)).

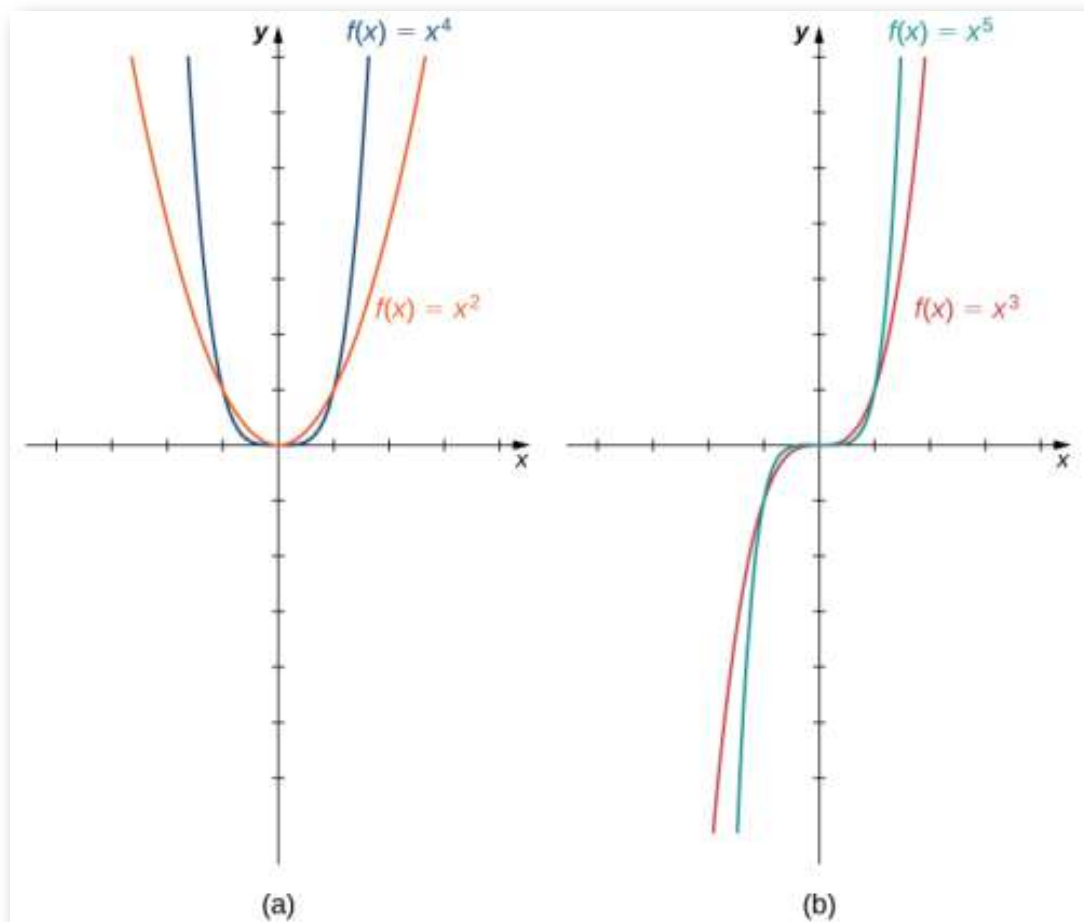


Figura 1.18 (a) Para cualquier número n entero par, la función $f(x) = ax^n$ es par. (b) Para cualquier n entero impar, la función $f(x) = ax^n$ es impar.

Comportamiento en el infinito

Para determinar el comportamiento de una función f a medida que los puntos x del dominio se acercan al infinito, se deben analizar los valores $f(x)$. Para algunas funciones, $f(x)$ se acerca a un número finito, por ejemplo, para la función

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

ya que los valores de $1/x$ se acercan cada vez más a cero para valores de x que se hacen cada más y más grandes. Para esta función, decimos que " $f(x)$ se acerca a dos cuando x tiende a infinito", y escribimos $f(x) \rightarrow 2$ cuando $x \rightarrow \infty$.

La recta $y = 2$ es una **asíntota horizontal** para la función

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

porque la gráfica de la función se aproxima a $y = 2$ cuando x se hace todo lo grande que se quiera.

Para otras funciones, los valores de $f(x)$ puede que no se acerquen a un número finito, sino que van creciendo indefinidamente para todos los valores de x a medida que crecen lo que se quiera. En ese caso, decimos que " $f(x)$ tiende al infinito cuando x tiende al infinito", y escribimos $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Por ejemplo, para la función

$$f(x) = 3x^2$$

los valores $f(x)$ se hacen cada vez más grandes cuando los valores x se consideran cada vez más y más grandes. Podemos concluir que la función $f(x) = 3x^2$ tiende al infinito cuando x tiende al infinito, y escribimos $3x^2 \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$.

El comportamiento cuando $x \rightarrow -\infty$ y el significado de $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$ se puede definir de manera similar.

Podemos describir lo que sucede con los valores de $f(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ como el comportamiento en el límite de la función.

Para comprender el comportamiento en el límite de las funciones polinómicas, podemos centrarnos en funciones cuadráticas y cúbicas. El comportamiento de los polinomios de grado superior se puede analizar de forma similar.

Consideremos una función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Si $a > 0$, los valores $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.
- Si $a < 0$, los valores $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Dado que la gráfica de una función cuadrática es una parábola, la parábola se abre hacia arriba si $a > 0$; la parábola se abre hacia abajo si $a < 0$. (Ver [Figura 1.19\(a\)](#)).

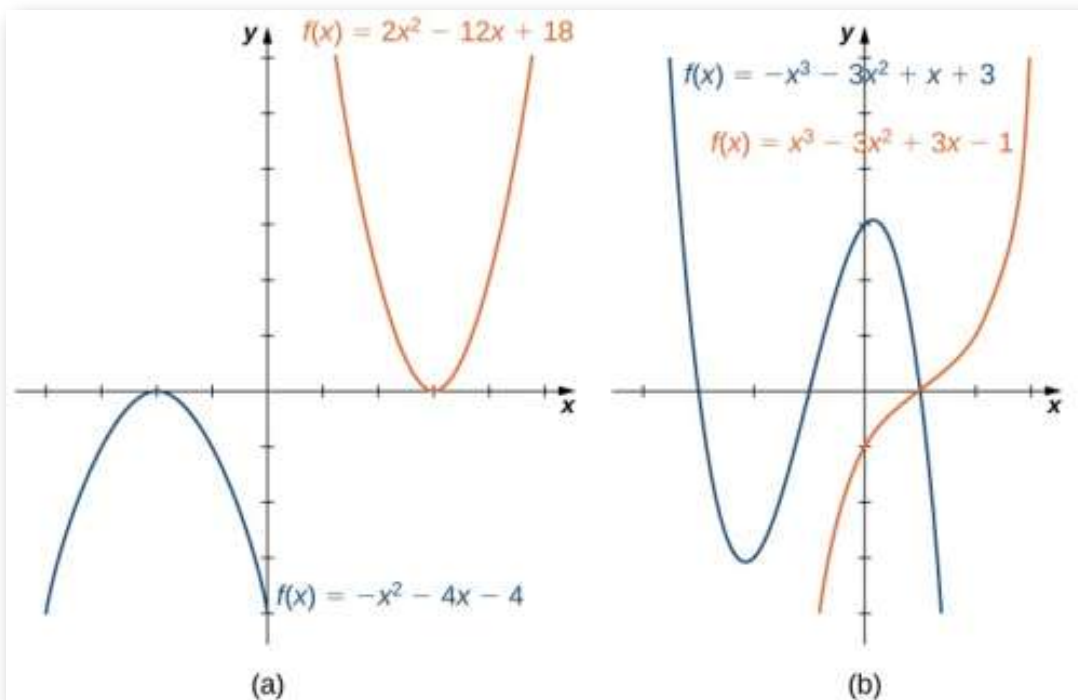


Figura 1.19 (a) Para una función cuadrática, si el coeficiente principal es $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba. Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo. (b) Para una función cúbica, si el coeficiente director a verifica $a > 0$, los valores $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ y los valores $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$. Si el coeficiente principal $a < 0$, la situación sería la contraria.

Ahora consideremos una función cúbica

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

- Si $a > 0$, se cumplirá $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$.
- Si $a < 0$, se cumplirá $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Como podemos ver en ambos gráficos, el término principal del polinomio determina el comportamiento en el infinito. (Ver [Figura 1.19 \(b\)](#)).

Ceros de funciones polinómicas

Otra característica de la gráfica de una función polinómica es los puntos de corte con el eje X . Para determinar estos puntos necesitamos resolver en x la ecuación $f(x) = 0$.

En el caso de la función lineal $f(x) = mx + b$, la intersección se obtiene resolviendo la ecuación $mx + b = 0$. En este caso, vemos que el punto de corte con eje X está dado por $(-b/m, 0)$.

En el caso de una función cuadrática, encontrar la intersección con el eje X requiere encontrar los ceros de una ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$, o lo que es lo mismo, factorizar el polinomio $ax^2 + bx + c = 0$ y encontrar sus ceros. Cuando no es sencillo encontrar estos ceros, se puede utilizar la fórmula cuadrática.

REGLA. La fórmula cuadrática

Consideremos la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{dónde } a \neq 0$$

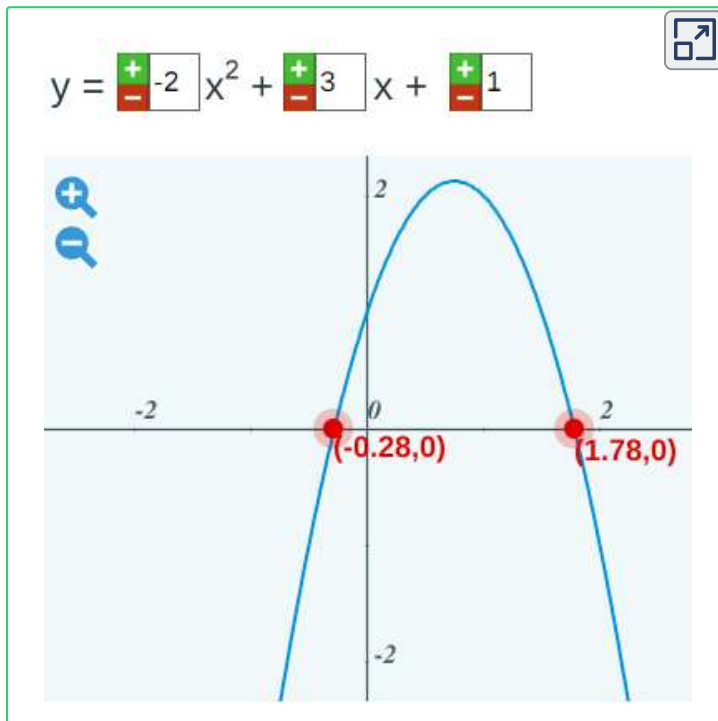
Las soluciones de esta ecuación están dadas por la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si el discriminante $b^2 - 4ac > 0$, esta fórmula nos dice que hay dos números reales que satisfacen la ecuación cuadrática.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, esta fórmula nos dice que solo hay una solución real.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, ningún número real satisface la ecuación cuadrática.



En la siguiente escena se muestra la representación de una función cuadrática y los puntos de corte con el eje de las x o sus ceros.



En el caso de polinomios de mayor grado, puede ser más complicado determinar dónde la gráfica corta al eje X . En algunos casos, es posible encontrar el punto factorizando el polinomio para encontrar sus ceros. En otros casos, es imposible calcular los valores exactos de las intersecciones con el eje X . Sin embargo, como veremos más adelante, en situaciones como estas, podemos utilizar herramientas analíticas para aproximar, con bastante precisión, dónde se localizan las intersecciones.

Aquí nos centraremos en los gráficos de polinomios para los cuales podemos calcular sus ceros explícitamente.



Ejemplo

1.14 Representar funciones polinomiales

Para cada función f ,

- i. describe el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$
- ii. encuentra todos los ceros de f
- iii. bosqueja la gráfica de f .

siendo

a. $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$

b. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.10

Considera la función cuadrática $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$. Encuentra los ceros de f . ¿La parábola se abre hacia arriba o hacia abajo?

Modelos matemáticos

Para describir una gran variedad de situaciones del mundo real se pueden utilizar modelos matemáticos. Un modelo matemático es un método para simular situaciones de la vida real con ecuaciones matemáticas. Los físicos, ingenieros, economistas y otros investigadores desarrollan modelos combinando la observación con datos cuantitativos para desarrollar ecuaciones, funciones, gráficos y otras herramientas matemáticas con las que describir con precisión el comportamiento de varios sistemas. Los modelos son útiles porque ayudan a predecir resultados futuros. Algunos ejemplos de modelos matemáticos incluyen el estudio de la dinámica de la población, las investigaciones de los patrones climáticos y las predicciones de las ventas de productos.

Como ejemplo, consideremos un modelo matemático que una empresa podría usar para describir sus ingresos por la venta de un determinado artículo. La cantidad de ingresos R que una empresa recibe por la venta de n artículos vendidos a un precio de p dólares por artículo, se describe mediante la ecuación $R = pn$. La empresa está interesada en conocer cómo cambian las ventas a medida que varía el precio del artículo. Supongamos que los datos de la Tabla 1.6 se corresponde con el número de unidades que vende una empresa en función del precio por artículo.

p	6	8	10	12	14
n	19.4	18.5	16.2	13.8	12.2

Tabla 1.6 Número de unidades vendidas n (en miles) en función del precio por unidad p (en dólares)

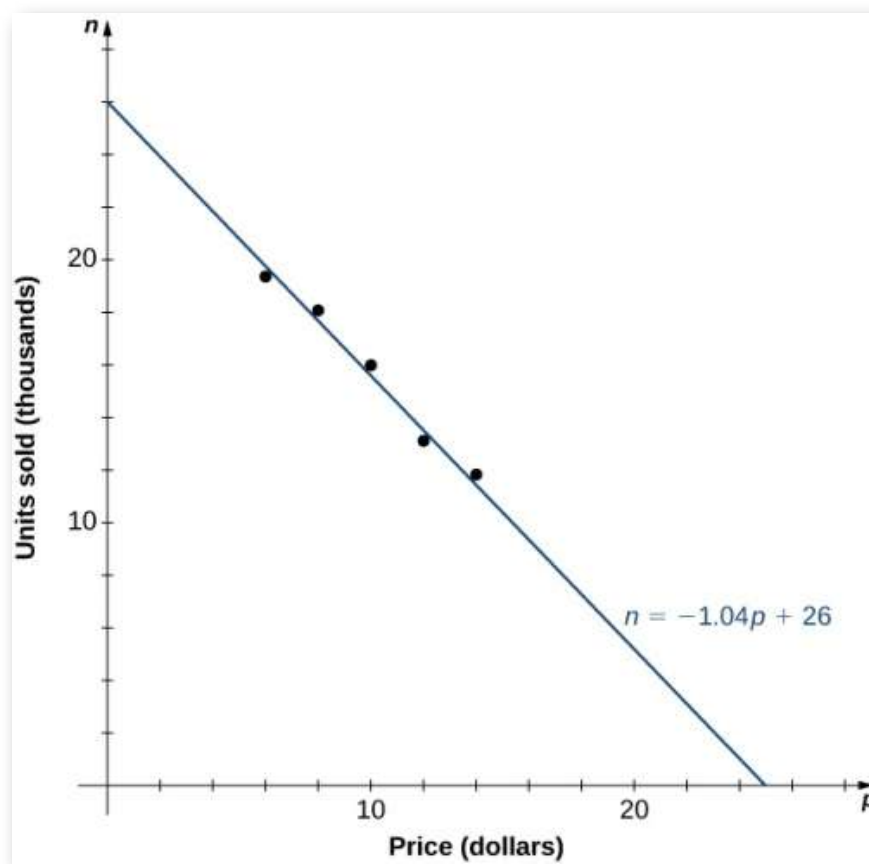


Figura 1.20 Los datos recopilados para el número de artículos vendidos en función del precio son aproximadamente lineales. Usamos la función lineal $n = -1.04p + 26$ para estimar esta función.

En la [Figura 1.20](#), vemos en la gráfica el número de unidades vendidas (en miles) en función del precio (en dólares).

Observamos a partir de la forma del gráfico que el número de unidades vendidas probablemente sea una función lineal del precio por artículo, y los datos pueden aproximarse mediante la función lineal $n = -1.04p + 26$ para $0 \leq p \leq 25$ donde n es el número de unidades vendidas en miles. Usando esta función lineal, los ingresos (en miles de dólares) se pueden estimar mediante la función cuadrática

$$R(p) = p \cdot (-1.04p + 26) = -1.04p^2 + 26p$$

para $0 \leq p \leq 25$.

En el Ejemplo 1.15, utilizaremos esta función cuadrática para predecir la cantidad de ingresos que recibe la empresa según el precio que cobra por artículo. Debemos tener en cuenta que no podemos concluir definitivamente el número real de unidades vendidas para cualquier valor de p . Sin embargo, dados los otros valores de datos y el gráfico que se muestra, parece razonable que la cantidad de unidades vendidas (en miles) considerando que el precio cobrado es p dólares, pueden estar cerca de los valores predichos por la función lineal $n = -1.04p + 26$.



Ejemplo

1.15 Maximizar los ingresos

Una empresa está interesada en predecir la cantidad de ingresos que recibirá según el precio que cobre por un artículo en particular. Usando los datos de la tabla 1.6, la empresa llega a la siguiente función cuadrática para modelar los ingresos R (en miles de dólares) en función del precio por artículo p :

$$R(p) = p(-1.04p + 26) = -1.04p^2 + 26p$$

para $0 \leq p \leq 25$

- Predecir los ingresos si la empresa vende el artículo a un precio de $p = 5$ dólares y $p = 17$ dólares.
- Encuentra los ceros de esta función e interprete el significado de los ceros.
- Dibuja una gráfica de R .
- Utiliza la gráfica para determinar el valor de p que maximiza los ingresos. Encuentra los ingresos máximos.



Solución

1.3.4 Funciones algebraicas

Si se admiten cocientes, potencias fraccionarias de funciones polinomiales, se pueden construir nuevas funciones. Una **función algebraica** es aquella que involucra sumas, diferencias, productos, cocientes, potencias y radicales. Dentro de las funciones algebraicas dos tipos especiales de funciones son **funciones racionales** y las **funciones radicales**.

Así como los números racionales son cocientes de números enteros, las funciones racionales son cocientes de polinomios. En particular, una función racional es cualquier función de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

dónde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{3x - 1}{5x + 2} \quad y \quad g(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$$

son funciones racionales.

Una **función radical** es una función potencial de la forma

$$f(x) = x^{1/n}$$

dónde n un número entero positivo mayor que uno. Por ejemplo, $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ es la función raíz cuadrada y $g(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ es la función de raíz cúbica. Al permitir composiciones de funciones radicales y funciones racionales, podemos crear otras funciones algebraicas. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{4 - x}$ es una función algebraica.



Ejemplo

1.16 Encontrar el dominio y el rango de funciones algebraicas

Para cada una de las siguientes funciones, encontrar el dominio y el rango.

a. $f(x) = \frac{3x-1}{5x+2}$

b. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 1.11

Encuentra el dominio y el rango de la función

$$f(x) = \frac{5x + 2}{2x - 1}$$

Las funciones radicales de la forma $f(x) = x^{1/n}$ tienen características específicas dependiendo de si n es par o impar. Para todos los enteros pares $n \geq 2$, el dominio de $f(x) = x^{1/n}$ es el intervalo $[0, \infty)$. Para todos los enteros impares $n \geq 1$, el dominio de $f(x) = x^{1/n}$ es el conjunto de todos los números reales.

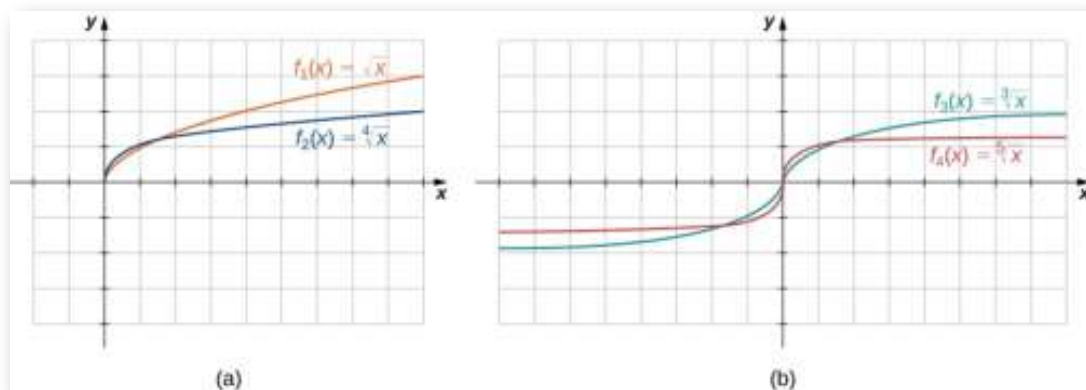


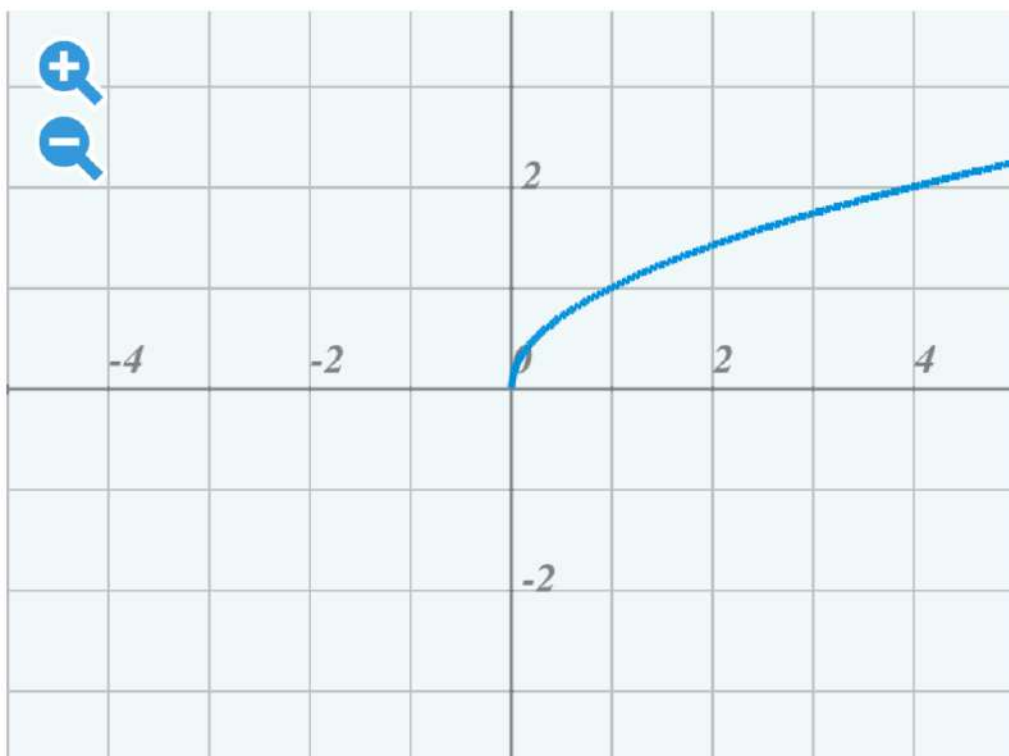
Figura 1.21 (a) Si n es par, el dominio de $f(x) = x^{1/n}$ es $[0, \infty)$. (b) Si n es impar, el dominio de $f(x) = x^{1/n}$ es $(-\infty, \infty)$ y la función es impar.

Ya que $x^{1/n} = (-x)^{1/n}$ para n entero impar, $f(x) = x^{1/n}$ es una función impar si n es impar. Vea las gráficas de funciones radical para diferentes valores de n en [Figura 1.21](#).



En la siguiente escena interactiva se puede representar la función $y = ax^{1/n}$ para distintos valores de a y n . Puede observarse el dominio y su gráfica en el caso de que n sea par o impar.

$$y = \begin{array}{|c|c|} \hline + & \\ \hline - & 1 \\ \hline \end{array} x^{\frac{1}{\begin{array}{|c|c|} \hline + & 2 \\ \hline - & \\ \hline \end{array}}} = x^{\frac{1}{2}}$$





Ejemplo

1.17 Encontrar dominios para funciones algebraicas

Para cada una de las siguientes funciones, determina el dominio de la función.

- a. $f(x) = \frac{3}{x^2-1}$
- b. $f(x) = \frac{2x+5}{3x^2+4}$
- c. $f(x) = \sqrt{4-3x}$
- d. $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.12

Encuentra el dominio para cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{5-2x}{x^2+2} \text{ y } g(x) = \sqrt{5x-1}$$

1.3.5 Funciones trascendentes

Hasta ahora, hemos analizado las funciones algebraicas. Algunas funciones, sin embargo, no se pueden describir mediante operaciones algebraicas básicas.

Estas funciones se conocen como **funciones trascendentes** porque se dice que "trascienden" o van más allá del álgebra.

Las funciones trascendentes más comunes son las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

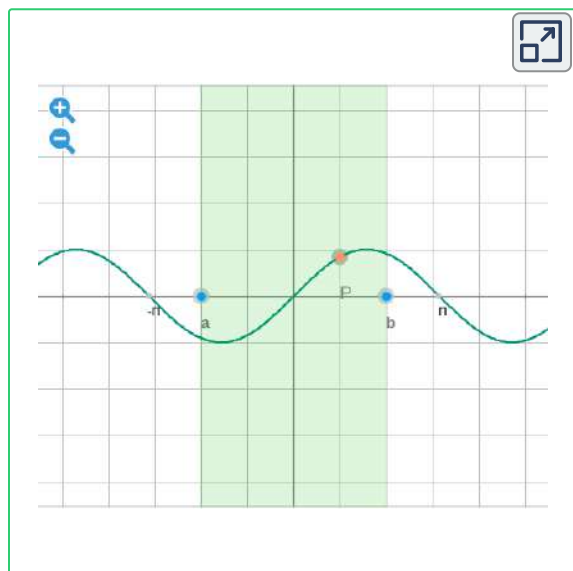
Una **función trigonométrica** relaciona las razones de dos lados de un triángulo rectángulo. Estas funciones son $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$, $\text{tg}(x)$, $\text{cot}(x)$, $\text{sec}(x)$ y $\text{csc}(x)$. Analizaremos estas funciones trigonométricas más adelante en el capítulo 4.

Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = b^x$, donde la base $b > 0, b \neq 1$.

Una **función logarítmica** es una función de la forma $f(x) = \log_b x$ para alguna constante $b > 0, b \neq 1$, donde $\log_b x = y$ si y solo si $b^y = x$. También estudiaremos las funciones exponenciales y logarítmicas más adelante en este capítulo.



En la siguiente escena interactiva se representan las funciones trascendentes anteriores.





Ejemplo

1.18 Clasificación de funciones algebraicas y trascendentes

Clasifica cada una de las siguientes funciones indicando si son algebraicas o trascendentes.

- a. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}}{4x+2}$
- b. $f(x) = 2^{x^2}$
- c. $f(x) = \text{sen}(2x)$



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.13

¿Es $f(x) = x/2$ una función algebraica o trascendente?

1.3.6 Funciones definidas por tramos o a trozos

A veces, una función se define mediante diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. Una función con esta propiedad se conoce como **función definida por tramos o a trozos**. La función valor absoluto es un ejemplo de este tipo de funciones porque la fórmula cambia dependiendo del signo de x :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Otras funciones definidas a trozos pueden representarse mediante fórmulas completamente diferentes, dependiendo de la parte del dominio que se considere.

Para representar una función definida a trozos, graficamos cada parte de la función en su dominio respectivo, en el mismo sistema de coordenadas. Si la fórmula de una función es diferente para los valores de x mayores o menores que a , debemos prestar especial atención a lo que sucede en $x = a$ cuando dibujemos la gráfica de la función. A veces, el gráfico debe incluir un círculo abierto o cerrado para indicar el valor de la función en $x = a$. Examinamos esto en el siguiente ejemplo.



Ejemplo

1.19 Obtener la gráfica de una función definida a trozos

Dibujar la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



Solución



Ejemplo

1.20 Tarifas de estacionamiento descritas por una función definida a trozos

En una gran ciudad, a los conductores se les cobran tarifas variables por estacionarse en un aparcamiento.

Se les cobra 10 dólares por la primera hora o fracción y 2 dólares adicionales por cada hora o fracción hasta un máximo de 30 dólares por día.

El garaje de estacionamiento está abierto desde las 6 de la mañana hasta las 12 de la noche.

- Escribir una función definida por tramos que describa el coste C de aparcar en el garaje de estacionamiento en función de las horas de estacionamiento x .
- Dibujar una gráfica de la función $C(x)$.

 Solución



**Pregunta
de control**

Cuestión 1.15

El coste de enviar una carta por correo es una función del peso de la carta. Suponga que el costo de enviar una carta por correo es 49 centavos por la primera onza y 21 centavos por cada onza adicional.

Escribe una función definida a trozos que describa el coste C en función del peso x para valores mayores que 0 y cumpliendo $x \leq 3$, donde C se mide en centavos y x se mide en onzas.

Nota: Una onza es una medida de peso que equivale a 28,70 gramos

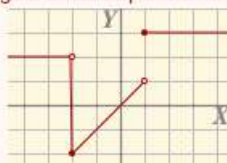


En la siguiente escena del Proyecto Descartes, cuyo autor es [Miguel Ángel Cabezón](#), se puede practicar la representación gráfica de funciones definidas en varios trozos de recta o funciones polinómicas de primer grado. También se presta atención a algunas de sus propiedades, dominio, crecimiento o decrecimiento, recorrido, etc.

Funciones definidas a trozos

Las **funciones definidas a trozos** son funciones que se definen con distintas expresiones algebraicas dependiendo del intervalo.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -\infty < x < -2 \\ x & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 \leq x < +\infty \end{cases}$$



Actividades propuestas

1.3.7 Transformaciones de funciones

Hemos visto varios casos en los que sumando, restado o multiplicado funciones más simples se han construido nuevas funciones. En el ejemplo anterior, por ejemplo, se aplicó la función $y = x^2$ al resultado de restar 2 a la variable x obteniendo la función $f(x) = (x - 2)^2$. Esta resta representa un cambio de la función $y = x^2$ trasladándola dos unidades a la derecha. Un desplazamiento, horizontal o vertical, es un tipo de **transformación de una función**. Otras transformaciones permiten realizar escalas horizontales y verticales y reflexiones sobre los ejes.

Cuando sumamos o restamos la misma constante a cada imagen y de una función dada, se produce un desplazamiento vertical de dicha función. Para $c > 0$, la gráfica de

- $f(x) + c$ es un **desplazamiento vertical** de la gráfica de $f(x)$ **hacia arriba** c unidades
- $f(x) - c$ es un **desplazamiento vertical** de la gráfica de $f(x)$ **hacia abajo** c unidades.

Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 4$ es la gráfica de $y = x^3$ desplazada verticalmente hacia arriba 4 unidades; la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4$ es la gráfica de $y = x^3$ desplazada hacia abajo 4 unidades ([Figura 1.23](#)).

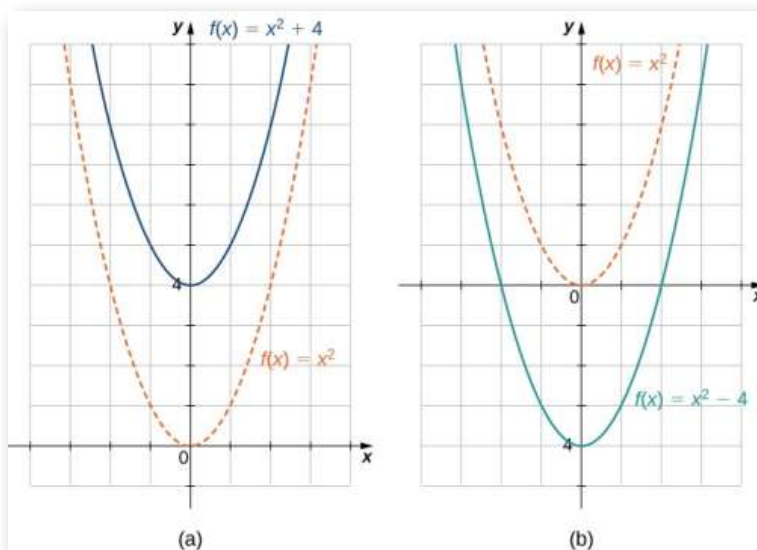


Figura 1.23 (a) Para $c > 0$, la gráfica de $y = f(x) + c$ es un desplazamiento vertical hacia arriba c unidades de la gráfica de $y = f(x)$. (b) Para $c > 0$, la gráfica de $y = f(x) - c$ es un desplazamiento vertical hacia abajo c unidades de la gráfica de $y = f(x)$.

Para producir un **desplazamiento horizontal** de una función, hay que sumar o restar la misma constante a cada punto x del dominio. Para $c > 0$, la gráfica de

- $f(x + c)$ es un desplazamiento de la gráfica de $f(x)$ a la izquierda c unidades;
- la gráfica de $f(x - c)$ será un desplazamiento de la gráfica de $f(x)$ a la derecha c unidades.

¿Por qué el gráfico se desplaza hacia la izquierda al sumar una constante y hacia la derecha al restar una constante? Para responder a esta pregunta, veamos un ejemplo.

Consideremos la función $f(x) = |x + 3|$ y evaluémos esta función en $x - 3$. Ya que $f(x - 3) = |x|$ y $x - 3$ es menor que x , la gráfica de $f(x) = |x + 3|$ es la gráfica de $y = |x|$ desplazada a la izquierda 3 unidades. De manera similar, la gráfica de $f(x) = |x - 3|$ es la gráfica de $y = |x|$ desplazado a la derecha 3 unidades ([Figura 1.24](#)).

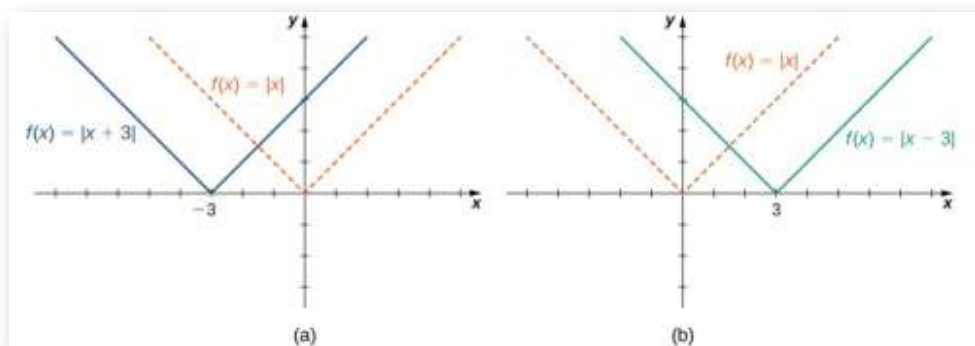


Figura 1.24 (a) Para $c > 0$, la gráfica de $y = f(x + c)$ es un desplazamiento horizontal a la izquierda c unidades de la gráfica de $y = f(x)$. (b) Para $c > 0$, la gráfica de $y = f(x - c)$ es un desplazamiento horizontal a la derecha c unidades de la gráfica de $y = f(x)$.

Se produce una **escala vertical** de un gráfico si multiplicamos todas las imágenes y de una función por la misma constante positiva. Para $c > 0$, la gráfica de la función $cf(x)$ es la gráfica de $f(x)$ escalada verticalmente por un factor c .

- Si $c > 1$, los valores de las imágenes para la función $cf(x)$ son mayores que los valores de las imágenes para la función $f(x)$; por lo tanto, el gráfico se ha estirado verticalmente.
- Si c está comprendido entre 0 y 1, las imágenes de la función $cf(x)$ son más pequeñas, por lo que el gráfico se ha comprimido.

Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = 3x^2$ es la gráfica de $y = x^2$ estirada verticalmente por un factor 3, mientras que el gráfico de $f(x) = x^2/3$ es la gráfica de $y = x^2$ comprimida verticalmente por un factor 3 ([Figura 1.25](#)).

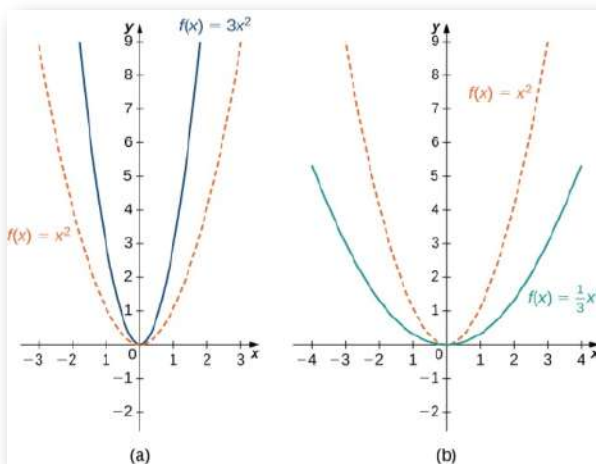


Figura 1.25 (a) Si $c > 1$, la gráfica de $y = cf(x)$ es un tramo vertical de la gráfica de $y = f(x)$. (b) Si $0 < c < 1$, la gráfica de $y = cf(x)$ es una compresión vertical del gráfico de $y = f(x)$.

El **escalado horizontal** de una función ocurre si multiplicamos las entradas x por la misma constante positiva. Para $c > 0$, la gráfica de la función $f(cx)$ es la gráfica de $f(x)$ escalada horizontalmente por un factor c .

1. Si $c > 1$, la gráfica de $f(cx)$ es la gráfica de $f(x)$ comprimida horizontalmente.
2. Si c está comprendido entre 0 y 1, la gráfica de $f(cx)$ es la gráfica de $f(x)$ estirada horizontalmente.

Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = \sqrt{2x}$ y evalúe f en $x/2$. Ya que $f(x/2) = \sqrt{x}$, la gráfica de $f(x) = \sqrt{2x}$ es la gráfica de $y = \sqrt{x}$ comprimida horizontalmente. La gráfica de $y = \sqrt{x/2}$ es un estiramiento horizontal de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ ([Figura 1.26](#)).

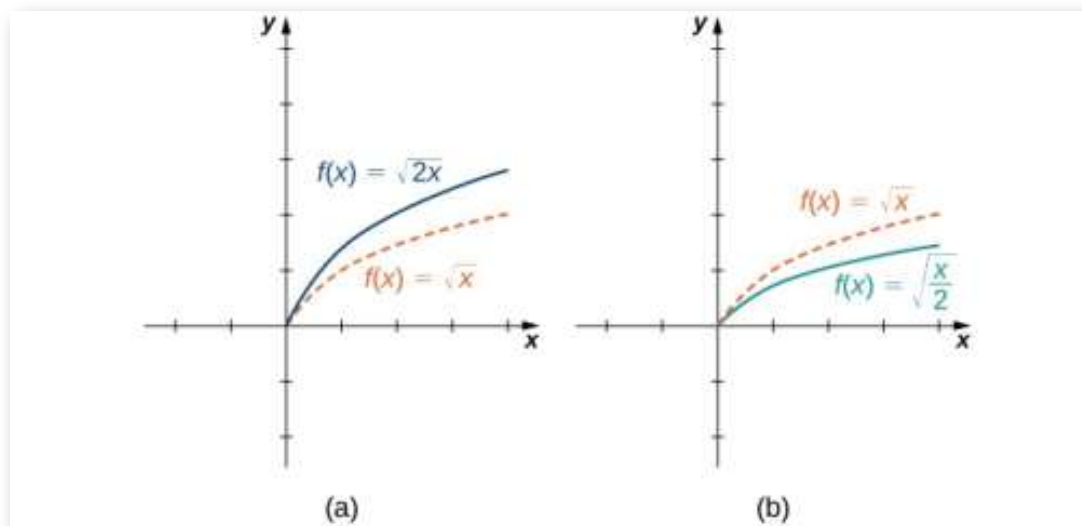


Figura 1.26 (a) Si $c > 1$, la gráfica de $y = f(cx)$ es una compresión horizontal del gráfico de $y = f(x)$. (b) Si $0 < c < 1$, la gráfica de $y = f(cx)$ es un estiramiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$.

Hemos explorado lo que sucede con la gráfica de una función f cuando multiplicamos f por una constante $c > 0$ para obtener una nueva función $cf(x)$. También hemos discutido qué sucede con la gráfica de una función f cuando multiplicamos la variable independiente x por $c > 0$ para obtener una nueva función $f(cx)$. Sin embargo, no hemos abordado lo que sucede con la gráfica de la función si la constante c es negativa.

Si tenemos una constante $c < 0$, podemos escribir c como un número positivo multiplicado por -1 ; pero, ¿qué tipo de transformación obtenemos cuando multiplicamos la función o su argumento por -1 ? Cuando multiplicamos todas las imágenes por -1 , tenemos una **reflexión sobre el eje X** . Cuando multiplicamos todas las entradas por -1 , tenemos una **reflexión sobre el eje y** . Por ejemplo, la gráfica de $f(x) = -(x^3 + 1)$ es la gráfica de $y = (x^3 + 1)$ reflejada sobre el eje X . La gráfica de $f(x) = (-x)^3 + 1$ es la gráfica de $y = x^3 + 1$ reflejada sobre el eje Y ([Figura 1.27](#)).

Si la gráfica de una función consta de más de una transformación de otra gráfica, es importante transformar la gráfica en el orden correcto. Dada una función $f(x)$, la gráfica de la función transformada $y = cf(a(x + b)) + d$ se puede obtener de la gráfica de $y = f(x)$ realizando las transformaciones en el siguiente orden.

1. Desplazamiento horizontal del gráfico de $y = f(x)$. Si $b > 0$ a la izquierda y si $b < 0$, a la derecha.
2. Escala horizontal del gráfico de $y = f(x+b)$ por un factor $|a|$. Si $a < 0$ reflejar el gráfico sobre el eje Y .
3. Escala vertical del gráfico de $y = f(a(x + b))$ por un factor $|c|$. Si $c < 0$, reflejar el gráfico sobre el eje X .
4. Desplazamiento vertical del gráfico de $y = cf(a(x + b))$. Si $d > 0$, hacia arriba y si $d < 0$, hacia abajo.

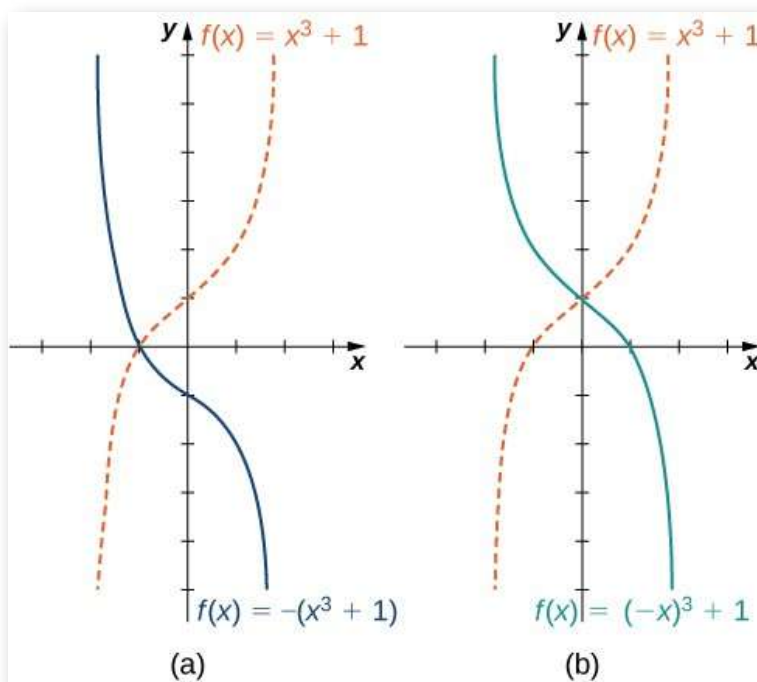
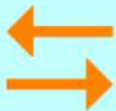


Figura 1.27 (a) La gráfica de $y = -f(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ reflejada sobre el eje X . (b) La gráfica de $y = f(-x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ reflejada sobre el y .



Puedes practicar con la escena interactiva siguiente para ver cómo actúan las distintas transformaciones sobre las gráficas de las funciones.

TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES		
 Desplazamiento horizontal	 Alargamiento y compresión horizontal	 Reflejo horizontal
 Desplazamiento vertical	 Alargamiento y compresión vertical	 Reflejo vertical

A continuación, se resume en la siguiente tabla las diferentes transformaciones y sus efectos en la gráfica de una función.

Transformación de f ($c > 0$)	Efecto de la gráfica de f
$f(x) + c$	Desplazamiento vertical hacia arriba c unidades
$f(x) - c$	Desplazamiento vertical hacia abajo c unidades
$f(x + c)$	Desplazamiento horizontal hacia la derecha c unidades
$f(x) - c$	Desplazamiento horizontal hacia la izquierda c unidades
$cf(x)$	Escala vertical si $c > 1$ Compresión vertical si $0 < c < 1$
$f(cx)$	Escala horizontal si $0 < c < 1$ Compresión vertical si $c > 1$
$-f(x)$	Reflexión sobre el eje x
$f(-x)$	Reflexión sobre el eje y

Tabla 1.7 Transformación de funciones



Ejemplo

1.21 Transformando funciones

Para cada una de las siguientes funciones, trazar un gráfico utilizando una secuencia de transformaciones de una función conocida.

a. $f(x) = -|x + 2| - 3$

b. $f(x) = 3\sqrt{-x} + 1$



Solución



**Pregunta
de control**

Cuestión 1.16

Describir cómo la función $f(x) = -(x + 1)^2 - 4$ se puede representar usando el gráfico de $y = x^2$ y una secuencia de transformaciones.



1.3.8 Ejercicios



Para los siguientes ejercicios, y para cada par de puntos,
a. encuentra la pendiente de la recta que pasa por dichos puntos
b. indica si la recta es creciente, decreciente, horizontal o vertical.

59. $(-2, 4)$ y $(1, 1)$ (**Solución**)

60. $(-1, 4)$ y $(3, -1)$

61. $(3, 5)$ y $(-1, 2)$ (**Solución**)

62. $(6, 4)$ y $(4, -3)$

63. $(2, 3)$ y $(5, 7)$ ([Solución](#))

64. $(1, 9)$ y $(-8, 5)$

65. $(2, 4)$ y $(1, 4)$ ([Solución](#))

66. $(1, 4)$ y $(1, 0)$



Para los siguientes ejercicios, escribe la ecuación de una recta cumpliendo las condiciones dadas.

67. pendiente = -6 y pasa por el punto $(1, 3)$ ([Solución](#))

68. pendiente = 3 y pasa por el punto $(-3, 2)$

69. pendiente = $1/3$ y pasa por el punto $(0, 4)$ ([Solución](#))

70. pendiente = $2/5$ la intersección con el eje $x = 8$

71. pasa por los puntos $(2, 1)$ y $(-2, 1)$ ([Solución](#))

72. pasa por los puntos $(-3, 7)$ y $(1, 2)$

73. intersección con el eje $x = 5$ e intersección con el eje $y = -3$ ([Solución](#))

74. intersección con el eje $x = -6$ e intersección con el eje $y = 9$



Para los siguientes ejercicios y para cada ecuación, obtener
a. el valor de la pendiente m y la intersección con el eje y si la hubiera
b. la gráfica de la recta.

75. $y = 2x - 3$ (Solución)

76. $y = -\frac{1}{7}x + 1$

77. $f(x) = -6$ (Solución)

78. $f(x) = -5x + 4$

79. $4y + 24 = 0$ (Solución)

80. $8x - 4$

81. $3x + 3y = 6$ (Solución)

82. $6x - 5y + 15 = 0$



Para los siguientes ejercicios y para cada polinomio, determina
a. el grado
b. los ceros si los hubiera
c. las intersecciones con el eje y si las hubiera
d. el comportamiento de la gráfica utilizando el coeficiente director
e. si el polinomio es impar, par o ninguna de las dos cosas.

83. $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$ (Solución)

84. $f(x) = -3x^2 + 6x$

85. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ (Solución)

86. $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

87. $f(x) = 3x - x^3$ (Solución)



Para los siguientes ejercicios, utiliza la gráfica de la función $f(x) = x^2$ para representar cada transformada g .

88. $g(x) = x^2 - 1$

89. $g(x) = (x + 3)^2 + 1$ (Solución)



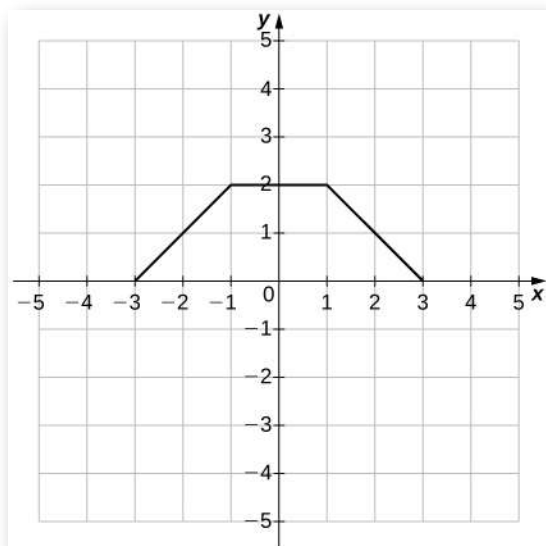
Para los siguientes ejercicios, utiliza la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ para representar cada transformada g .

90. $g(x) = \sqrt{x + 2}$

91. $g(x) = -\sqrt{x} - 1$ (Solución)



Para los siguientes ejercicios, utiliza la gráfica de la función $f(x)$ para representar cada transformada g .



92. $g(x) = f(x) + 1$

93. $g(x) = f(x - 1) + 2$ (**Solución**)



Para los siguientes ejercicios, utiliza la gráfica de la función $f(x)$ para representar cada transformada g y para cada función definida a trozos,

- Evalúa la función en los valores dados.
- Haz un bosquejo de la gráfica.

94.

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ -x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f(-3); f(0); f(2)$$

95.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < 0 \\ 4x - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(-4); f(0); f(2) \text{ (Solución)}$$

96.

$$h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 5 \\ 4 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

$$h(0); h(\pi); h(5)$$

97.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$$g(0); g(-4); g(2) \text{ (Solución)}$$



Para los siguientes ejercicios, determina si la afirmación es cierta o falsa. Explica por qué.

98. $f(x) = \frac{4x+1}{7x-2}$ es una función trascendente.

99. $g(x) = \sqrt{3}x$ es una función impar. (Solución)

100. Una función logarítmica es una función algebraica

101. Una función de la forma $f(x) = x^b$, donde b es un valor real constante, es una función exponencial. (Solución)

102. El dominio de un función raíz par es el conjutno de todos los números reales.

103. [T] Una empresa compra algunos equipos informáticos por 20,500 dólaresa. Al final de un período de 3 años, el valor del equipo ha disminuido linealmente a 12,300 dólares.

- Encuentra una función $y = V(t)$ que determine el valor V del equipo al final de t años.
- Encuentra e interprete el significado de la intersección con el eje x y el eje y para esta función.
- ¿Cuál es el valor del equipo al final de 5 años?
- ¿Cuándo será el valor del equipo de 3000 dólares?

(Solución)

104. [T] El número total de compras online durante las vacaciones de Navidad ha aumentado drásticamente durante los últimos 5 años. En 2012 ($t = 0$), las ventas navideñas totales en línea fueron de 42,3 mil millones de dólares, mientras que en 2013 fueron 48.1 mil millones de dólares.

- Encuentra una función S que estime el total de ventas navideñas online en el año t .
- Interpreta la pendiente de la gráfica de S .
- Utiliza la parte a. para predecir el año en el que las compras online durante la Navidad alcanzará los 60 mil millones de dólares.

105. [T] Una panadería familiar hace cupcakes y los vende en festivales locales al aire libre. Para un festival de música, hay un coste fijo de 125 dólares para montar un puesto de magdalenas. El propietario estima que cuesta 0,75 euros para hacer cada cupcake.

El propietario está interesado en determinar el coste total C como función del número de cupcakes hechos.

- Encuentra una función lineal que relacione el coste C con x , el número de cupcakes hechos.
- Calcula el costo de hornear 160 cupcakes.
- Si el dueño vende los cupcakes a 1,50 dólares cada uno, ¿cuántos pastelitos necesita vender para empezar obteniendo ganancias?

Sugerencia: utiliza la función INTERSECCIÓN en una calculadora para encontrar este número. ([Solución](#))

106. [T] Se espera que una casa comprada por 250,000 dólares valga el doble de su precio de compra en 18 años.

- Encuentra una función lineal que modelice el precio P de la casa versus el número de años t desde la compra original.
- Interpreta la pendiente de la gráfica de P .
- Encuentra el precio de la casa 15 años después de que se comprara originalmente.

107. [T] Se compró un automóvil por 26,000 dólares. El valor del automóvil se deprecia en 1500 dólares por año.

- Encuentra una función lineal que modelice el valor V del coche después de t años.
- Encuentra e interpreta $V(4)$.

(Solución)

108. [T] Un condominio en una zona exclusiva de la ciudad fue comprado por 432,000 dólares. En 35 años vale 60,500 dólares. Calcula la tasa de depreciación.

109. [T] El costo total C (en miles de dólares) para producir un determinado artículo es modelizado por la función $C(x) = 10,50x + 28,500$, donde x es el número de elementos producido. Determina el coste de producir 175 artículos. (Solución)

110. [T] Una profesora le pide a su clase que informe de la cantidad del tiempo que dedicaron a escribir dos tareas. La mayoría de los estudiantes informa que les lleva unos 45 minutos escribir una tarea de cuatro páginas y alrededor de 1,5 horas para escribir una tarea de 9 páginas.

- Encuentra la función lineal $y = N(t)$ que modeliza esta situación, donde N es el número de páginas escritas y t es el tiempo en minutos.
- Utiliza la parte a. para determinar cuántas páginas se pueden escribir en 2 horas.
- Utiliza la parte a. para determinar cuánto tiempo lleva escribir una tarea de 20 páginas.

111. [T] La producción de energía nuclear de las plantas de Estados Unidos (como porcentaje de la capacidad total) se pueden modelizar por la función $P(t) = 1.8576t + 68.052$, donde t es el tiempo en años y $t = 0$ corresponde a principios de 2000. Utiliza el modelo para predecir el porcentaje de producción en 2015. ([Solución](#))

112. [T] La oficina de admisiones de una universidad pública estima que el 65% de los estudiantes que solicitaron admisión a la clase de 2019 realmente se inscribirá.

- Encuentra la función lineal $y = N(x)$, donde N es el número de estudiantes que realmente se matriculan y x es el número de todos los estudiantes a los que se les ofreció admisión a la clase en 2019.
- Si la universidad quiere que el tamaño de la clase de primer año de 2019 sea de 1350, determina cuántos estudiantes deberían ser admitidos.

1.4 Funciones trigonométricas

Objetivos de aprendizaje

- Realizar conversiones de medidas de ángulos entre grados y radianes.
- Reconocer las definiciones triangulares y circulares de las funciones trigonométricas básicas.
- Escribir las identidades trigonométricas básicas.
- Identificar las gráficas y los períodos de las funciones trigonométricas.
- Describir el desplazamiento de una gráfica de seno o coseno de la ecuación de la función.

Las funciones trigonométricas se utilizan para modelizar muchos fenómenos, incluidas ondas sonoras, vibraciones de cuerdas, corriente eléctrica alterna y el movimiento de péndulos. De hecho, casi cualquier movimiento repetitivo o cíclico puede modelizarse mediante alguna combinación de funciones trigonométricas. En esta sección, definimos las seis funciones trigonométricas básicas y observamos algunas de las principales identidades que involucran estas funciones.

1.4.1 Medida en radianes

Para usar funciones trigonométricas, primero debemos entender cómo medir los ángulos. Aunque podemos usar radianes y grados, los radianes son una medida más natural porque están relacionados directamente con el círculo unitario, un círculo con radio 1.

La medida en radianes de un ángulo se define de la siguiente manera. Dado un ángulo θ , sea s la longitud del arco correspondiente en el círculo unidad ([Figura 1.30](#)). Decimos que el ángulo correspondiente al arco de longitud 1 tiene medida en 1 **radián**.

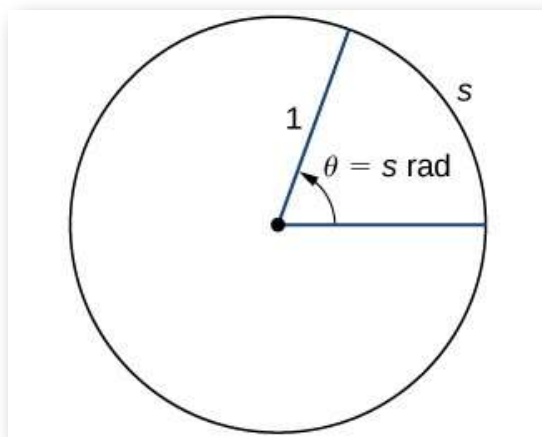


Figura 1.30 La medida en radianes de un ángulo θ está asociado a un arco s con esa longitud en el círculo unitario.

Dado que un ángulo de 360° corresponde a la circunferencia de un círculo, o un arco de longitud 2π en la circunferencia unidad, llegamos a la conclusión de que un ángulo con una medida en grados de 360° tiene una medida en radianes de 2π . Del mismo modo, vemos que 180° es equivalente a π radianes. En la Tabla 1.8 se muestra la relación entre grados y valores en radianes.



En la siguiente escena se puede practicar la conversión entre grados y radianes.

Convertir

30

°

Grados a radianes ▼

30°
 $\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{30 \pi}{180} \text{ rad} =$
0.52rad

Grados	Radianes	Grados	Radianes
0	0	120	$2\pi/3$
30	$\pi/6$	135	$3\pi/4$
45	$\pi/4$	150	$5\pi/6$
60	$\pi/3$	180	π
90	$\pi/2$		

Tabla 1.8 Ángulos comunes expresados en grados y radianes

113



Ejemplo

1.22 Conversión entre radianes y grados

- Convierte 225° en radianes
- Expresa $5\pi/3$ rad en grados



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.17

Expresa 210° usando radianes. Expresa $11\pi/6$ rad usando grados.

1.4.2 Seis funciones trigonométricas básicas

Las funciones trigonométricas nos permiten utilizar medidas de ángulos, en radianes o grados, para encontrar las coordenadas de un punto en cualquier círculo, no solo en un círculo unidad, o para encontrar un ángulo dado un punto en un círculo. También definen la relación entre los lados y ángulos de un triángulo.

Para definir las funciones trigonométricas, primero consideremos el círculo unidad centrado en el origen y un punto $P(x, y)$ en el círculo unidad. Sea θ el ángulo con un lado inicial que se encuentra a lo largo del eje positivo X y con un lado terminal que es el segmento de línea OP . Se dice que un ángulo en esta posición está en la posición estándar ([Figura 1.31](#)).

Podemos entonces definir los valores de las seis funciones trigonométricas para θ en términos de las coordenadas x e y .

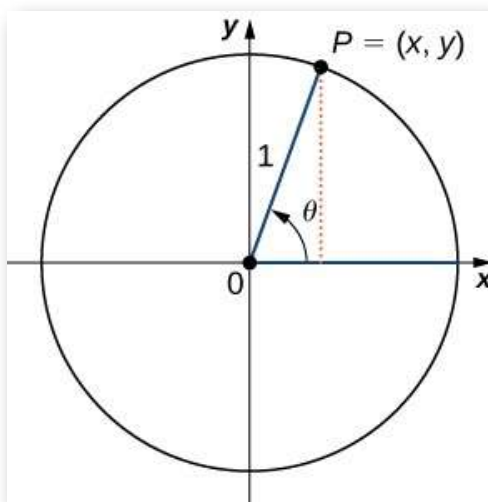


Figura 1.31 El ángulo θ está en posición estándar. Los valores de las funciones trigonométricas para θ se definen en términos de las coordenadas x e y .

DEFINICIÓN

Sea $P(x, y)$ un punto en el círculo unidad centrado en el origen O . Sea θ el ángulo con un lado inicial a lo largo del eje positivo X y un lado terminal dado por el segmento OP .

Las **funciones trigonométricas** se definen entonces como

$$\operatorname{sen}(\theta) = y \quad \operatorname{csc}(\theta) = \frac{1}{y}$$

$$\operatorname{cos}(\theta) = x \quad \operatorname{sec}(\theta) = \frac{1}{x}$$

$$tg(\theta) = \frac{y}{x} \quad cot(\theta) = \frac{x}{y}$$

Si $x = 0$, $sec(\theta)$ y $tg(\theta)$ no están definidas. Si $y = 0$, $cot(\theta)$ y $csc(\theta)$ no están definidas.

Podemos ver que para un punto $P(x, y)$ en un círculo de radio r con un ángulo correspondiente θ , las coordenadas x e y satisfacen

$$cos(\theta) = \frac{x}{r} \quad x = rcos(\theta)$$

$$sin(\theta) = \frac{y}{r} \quad y = rsen(\theta)$$

Los valores de las otras funciones trigonométricas se pueden expresar en términos de x, y y r ([Figura 1.32](#)).

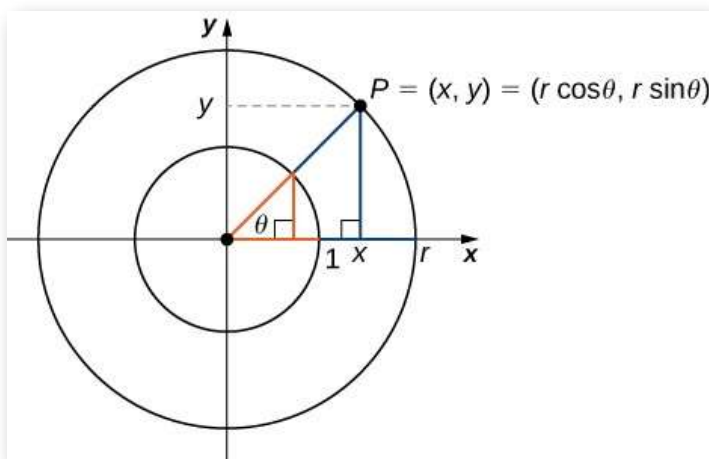


Figura 1.32 Para un punto $P(x, y)$ en un círculo de radio r , las coordenadas x e y satisfacen $x = rcos(\theta)$, $y = rsen(\theta)$.

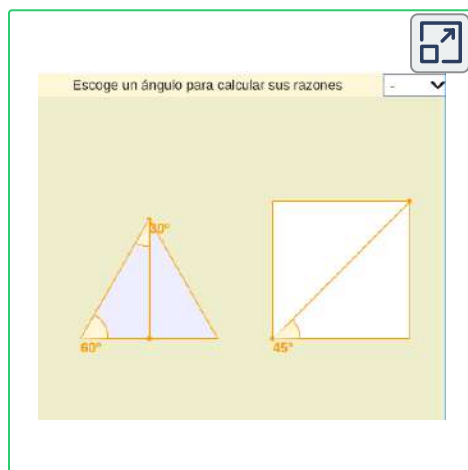
La tabla 1.9 muestra los valores del seno y coseno en los ángulos principales del primer cuadrante, a partir ellos, se pueden determinar los de los ángulos de los otros cuadrantes. El resto de las funciones trigonométricas se calculan fácilmente a partir de los valores del $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$.

θ	$\text{sen}(\theta)$	$\text{cos}(\theta)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Tabla 1.9 sen y cos en ángulos principales del primer cuadrante



En la siguiente escena se muestra cómo obtener las razones trigonométricas elementales. Esta escena está tomada del [Proyecto EDAD](#) y diseñada por la profesora [María José García Cebrian](#)





Pregunta de control

1.23 Evaluación de funciones trigonómicas

Evalúa cada una de las siguientes expresiones.

- a. $\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
- b. $\text{cos}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
- c. $\text{tan}\left(\frac{15\pi}{4}\right)$



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.18

Evalúa $\text{cos}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ y $\text{sen}\left(\frac{-\pi}{6}\right)$.

Como se mencionó anteriormente, las razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se pueden expresar en términos de las funciones trigonométricas evaluadas en cualquiera de los ángulos agudos del triángulo. Sea θ uno de los ángulos agudos. Sea A la longitud del cateto adyacente, O la longitud del cateto opuesta, y H la longitud de la hipotenusa. Inscribiendo el triángulo en un círculo de radio H , como se muestra en la [Figura 1.33](#), vemos que A , H , y O satisfacen las siguientes relaciones :

$$\text{sen}(\theta) = \frac{O}{H} \quad \text{csc}(\theta) = \frac{H}{O}$$

$$\cos(\theta) = \frac{A}{H} \quad \sec(\theta) = \frac{H}{A}$$

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{O}{A} \quad \cot(\theta) = \frac{A}{O}$$

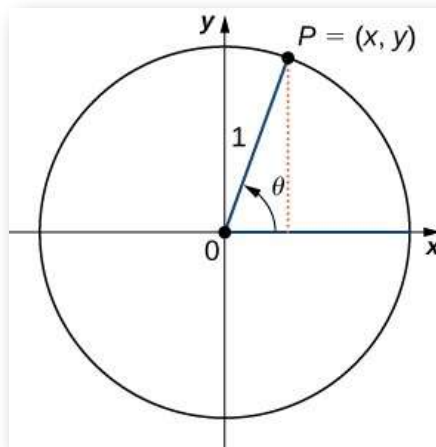


Figura 1.33 Al inscribir un triángulo rectángulo en un círculo, podemos expresar las razones de las longitudes de los lados en términos de las funciones trigonométricas evaluadas en θ .



Ejemplo

1.24 Construyendo una rampa de madera

Se construirá una rampa de madera con un extremo en el suelo y el otro en la parte superior de una pequeña escalera. Si la parte superior de la escalera está a 4 pies del suelo y el ángulo entre el suelo y la rampa debe ser 10° , ¿Cuánta longitud debe tener la rampa?

 **Solución**



Pregunta de control

Cuestión 1.19

Un pintor de casas quiere inclinarse 20 pies de escalera contra una casa. Si el ángulo entre la base de la escalera y el suelo debe ser 60° , ¿A qué distancia de la casa debe colocar la base de la escalera?

1.4.3 Identidades trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una ecuación que involucra funciones trigonométricas que es verdadera para todos los ángulos θ para lo cual se definen las funciones. Podemos usar las identidades para ayudarnos a resolver o simplificar ecuaciones. Las principales identidades trigonométricas se enumeran a continuación.

REGLA. Identidades trigonométricas

Identidades recíprocas

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta) &= \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{cos}(\theta)} & \operatorname{cot}(\theta) &= \frac{\operatorname{cos}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} \\ \operatorname{csc}(\theta) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} & \operatorname{sec}(\theta) &= \frac{1}{\operatorname{cos}(\theta)} \end{aligned}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \operatorname{cos}^2(\theta) = 1 \quad 1 + \operatorname{tg}^2(\theta) = \operatorname{sec}^2(\theta)$$

$$1 + \operatorname{cot}^2(\theta) = \operatorname{csc}^2(\theta)$$

Fórmulas de suma y resta

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Fórmulas de doble ángulo

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$



Ejemplo

1.25 Resolver ecuaciones trigonométricas

Para cada una de las siguientes ecuaciones, utiliza una identidad trigonométrica para encontrar todas las soluciones.

- a. $1 + \cos(2\theta) = \cos\theta$
- b. $\operatorname{sen}(2\theta) = \operatorname{tg}\theta$



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.20

Encuentra todas las soluciones de la ecuación $\cos(2\theta) = \operatorname{sen}\theta$.



Ejemplo

1.26 Demostrando una identidad trigonométrica

Demuestra la identidad trigonométrica $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta$.



Solución



Pregunta de control

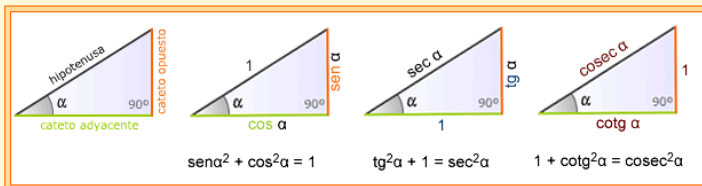
Cuestión 1.21

Demuestra la identidad trigonométrica $1 + \operatorname{ctg}^2 \theta = \operatorname{csc}^2 \theta$.



En la siguiente escena se muestra cómo demostrar alguna de las identidades fundamentales. Esta escena está tomada del [Proyecto EDAD](#) y diseñada por la profesora [María José García Cebrían](#)

Al medir los lados de un triángulo rectángulo se puede tomar como unidad la hipotenusa, o uno de los catetos; obteniéndose en cada caso los triángulos de la figura.



Se ha aplicado el teorema de Pitágoras en las tres situaciones, resultando así otras dos relaciones fundamentales:

$$(1) \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha; \quad (2) 1 + \cotg^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

Estas relaciones nos permiten calcular el seno y el coseno a partir de la tangente:

$$(1) \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$(2) \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{\cotg^2 \alpha + 1}$$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\operatorname{tg}^2 \alpha$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

1.4.4 Gráficas y períodos de las funciones trigonométricas

Hemos visto que a medida que nos movemos alrededor del círculo unidad, los valores de las funciones trigonométricas se repiten. Podemos ver este patrón en las gráficas de las funciones. Sea $P(x, y)$ un punto en el círculo unidad y sea θ el ángulo correspondiente. Como el ángulo θ y $\theta + 2\pi$ corresponden al mismo punto P , los valores de las funciones trigonométricas en θ y en $\theta + 2\pi$ coinciden. En consecuencia, las funciones trigonométricas son **funciones periódicas**.

El **período de una función** f se define como el valor positivo más pequeño p tal que $f(x + p) = f(x)$ para todos los valores x en el dominio de f . Las funciones seno, coseno, secante y cosecante tienen un período de 2π . Dado que las funciones tangente y cotangente se repiten en un intervalo de longitud π , su período es π ([Figura 1.34](#)).

Al igual que con las funciones algebraicas, podemos aplicar transformaciones a funciones trigonométricas. En particular, consideremos la siguiente función:

$$f(x) = A \sin(B(x - \alpha)) + C \quad (1.10)$$

En la [Figura 1.35](#), la constante α provoca un desplazamiento horizontal o de fase. El factor B cambia el período. Esta función seno transformada tendrá un período $2\pi/|B|$. El factor A da como resultado un estiramiento vertical por un factor de $|A|$. Decimos $|A|$ es la "amplitud de F ." La constante C provoca un desplazamiento vertical.

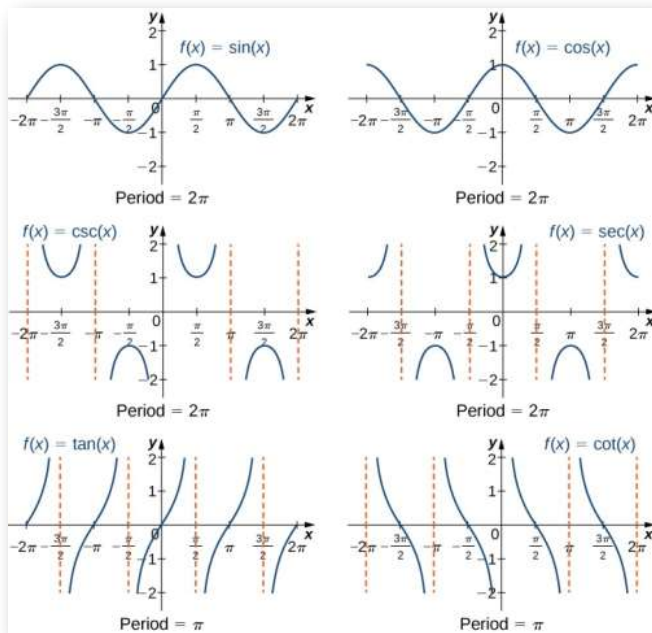


Figura 1.34 Las seis funciones trigonométricas son periódicas.

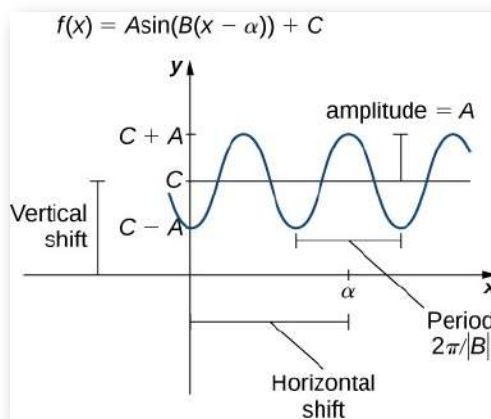


Figura 1.35 Una gráfica de una función seno general.

Se debe notar en la [Figura 1.34](#) que la gráfica de $y = \cos x$ es la gráfica de $y = \sin x$ desplazada a la izquierda $\pi/2$ unidades. Por tanto, podemos escribir

$$\cos x = \sin(x + \pi/2)$$

De manera similar, podemos ver la gráfica de $y = \text{sen}x$ como la de $y = \text{cos}x$ desplazada a la derecha $\pi/2$ unidades, ya que

$$\text{sen}x = \text{cos}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Una curva sinusoidal desplazada surge naturalmente al representar el número de horas de luz del día en una ubicación determinada en función del día del año. Por ejemplo, suponga que una ciudad informa que el 21 de junio es el día más largo del año con 15,7 horas y el 21 de diciembre es el día más corto del año con 8.3 horas. Se puede demostrar que la función

$$h(t) = 3,7\text{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80.5)\right) + 12$$

es un modelo para el número de horas de luz del día h en función del día del año t ([Figura 1.36](#)).

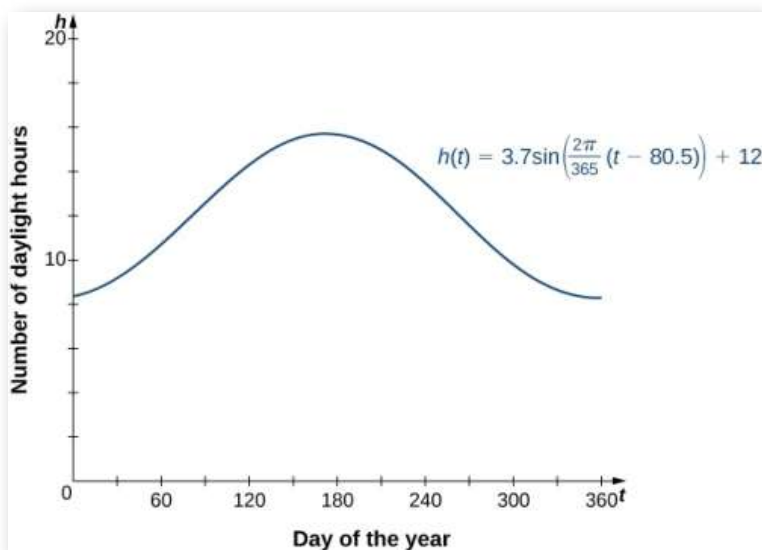
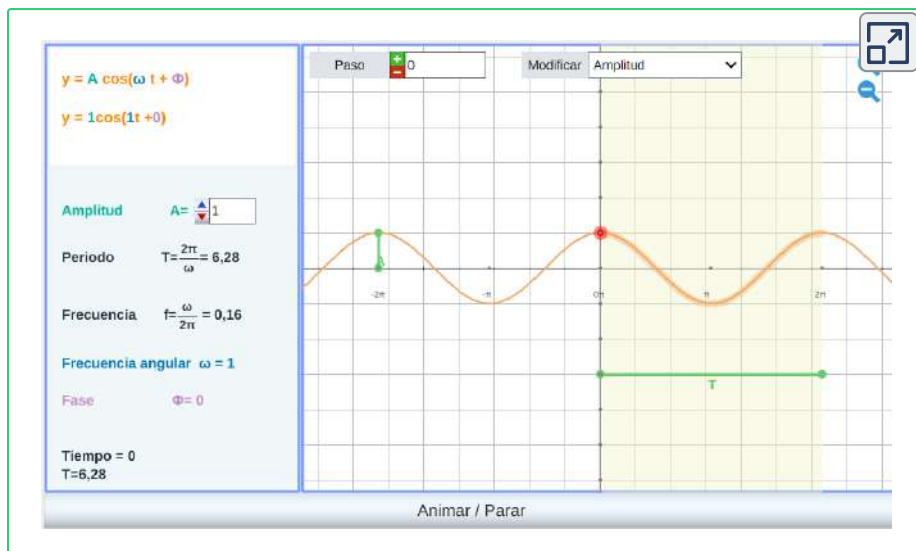


Figura 1.36 Las horas de luz diurna en función del día del año pueden modelizarse mediante una curva sinusoidal desplazada.



En la siguiente escena se muestra cuál es el periodo, la amplitud y la fase en una función cosenoidal.



Ejemplo

1.27 Dibujar el gráfico de una curva sinusoidal transformada

Dibuja la gráfica de $f(x) = 3\text{sen}(2(x - \frac{\pi}{4})) + 1$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.22

Describe la relación entre la gráfica de $f(x) = 3\text{sen}(4x) - 5$ y la gráfica de $y = \text{sen}(x)$.



1.4.5 Ejercicios



Para los siguientes ejercicios, convierte cada ángulo en grado en radianes. Escribe las respuestas como un múltiplo de π

113. 240° (Solución)

114. 15°

115. -60° (Solución)

116. -225°

117. 330° (Solución)



Para los siguientes ejercicios, convierte cada ángulo en radianes en grados.

118. $\pi/2 \text{ rad}$

119. $\frac{7\pi}{6} \text{ rad}$ (Solución)

120. $\frac{11\pi}{2} \text{ rad}$

121. $-3\pi \text{ rad}$ (Solución)

122. $\frac{5\pi}{12} \text{ rad}$



Evalúa los siguientes valores.

123. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ (Solución)

124. $\operatorname{tg}\left(\frac{19\pi}{4}\right)$

125. $\operatorname{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$ (Solución)

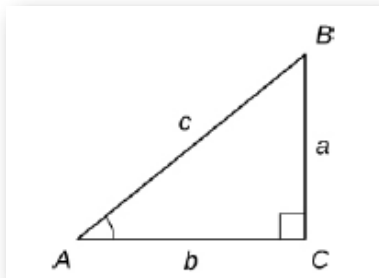
126. $\sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$

127. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (Solución)

128. $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$



Para los siguientes ejercicios, consideramos el triángulo rectángulo ABC con un ángulo recto en C.



- Encuentra el lado que falta del triángulo.
- Encuentra los seis valores de funciones trigonométricas para el ángulo A.
- Cuando sea necesario, redondee a un decimal.

129. $a = 4, c = 7$ ([Solución](#))

130. $a = 21, c = 29$

131. $a = 85.3, b = 125.4$ ([Solución](#))

132. $b = 40, c = 41$

133. $a = 84, b = 13$ ([Solución](#))

134. $b = 28, c = 35$



Para los siguientes ejercicios, P es un punto en el círculo unitario.

a. Encuentra el valor (exacto) de las coordenadas faltantes de cada punto

b. encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas para el ángulo θ con un lado terminal que pasa por el punto P . Racionalizar denominadores.

135. $P(\frac{7}{25}, y), y > 0$ ([Solución](#))

136. $P(\frac{-15}{17}, y), y < 0$

137. $P(x, \frac{\sqrt{7}}{3}), x < 0$ ([Solución](#))

138. $P(x, -\frac{\sqrt{15}}{4}), x > 0$



Para los siguientes ejercicios, simplifica cada expresión escribiendo primero en términos de senos y cosenos. La respuesta final no debe quedar únicamente en senos y cosenos.

$$139. \tan^2(x) + \operatorname{sen}(x) \operatorname{csc}(x) \text{ (Solución)}$$

$$140. \sec(x) \operatorname{sen}(x) \cot(x)$$

$$141. \frac{\tan^x}{\sec^x} \text{ (Solución)}$$

$$142. \sec(x) - \cos(x)$$

$$143. (1 + \operatorname{tg}\theta)^2 - 2\operatorname{tg}\theta \text{ (Solución)}$$

$$144. \operatorname{sen}(x)(\operatorname{csc}x - \operatorname{sen}x)$$

$$145. \frac{\cos t}{\operatorname{sent}} + \frac{\operatorname{sent}}{1+\cos t} \text{ (Solución)}$$

$$146. \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\cot^2 x}$$



Para los siguientes ejercicios, verifica que cada ecuación es una identidad.

$$147. \frac{\operatorname{tg}\theta \cot\theta}{\operatorname{csc}\theta} = \operatorname{sen}\theta$$

$$148. \frac{\sec^2\theta}{\operatorname{tg}\theta} = \sec\theta \operatorname{csc}\theta$$

$$149. \frac{\operatorname{sen}(t)}{\operatorname{csc}(t)} + \frac{\cos(t)}{\sec t} = 1$$

$$150. \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)+1} + \frac{\cos(x)-1}{\operatorname{sen}x} = 0$$

$$151. \cot\alpha + \tan\alpha = \sec\alpha \operatorname{csc}\alpha$$

$$152. \operatorname{sen}^2\alpha + \tan^2\alpha + \cos^2\alpha = \sec\alpha$$

$$153. \frac{1}{1-\operatorname{sen}\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{sen}\alpha} = 2\sec^2\alpha$$

$$154. \frac{\tan\theta - \cot\theta}{\operatorname{sen}\theta \cos\theta} = \sec^2\theta - \csc^2\theta$$



Para los siguientes ejercicios, resolver las ecuaciones trigonométricas en el intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$.

$$155. 2\operatorname{sen}\theta - 1 = 0 \text{ (Solución)}$$

$$156. 1 + \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$157. 2\tan^2\theta = 2 \text{ (Solución)}$$

$$158. 4\operatorname{sen}^2\theta - 2 = 0$$

$$159. \sqrt{3}\cot\theta + 1 = 0 \text{ (Solución)}$$

$$160. 3\sec\theta - 2\sqrt{3} = 0$$

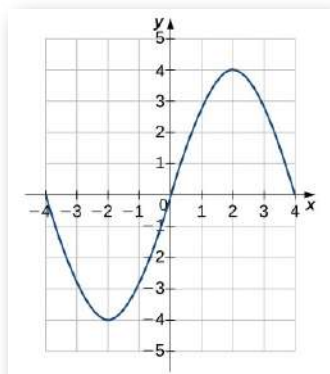
$$161. 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta \text{ (Solución)}$$

$$162. \csc^2\theta + 2\csc\theta + 1 = 0$$



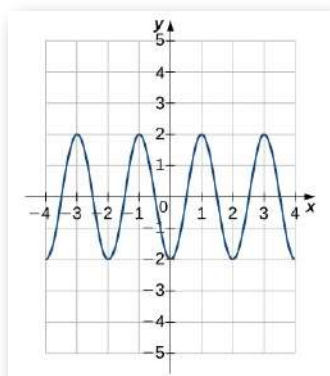
En los siguientes ejercicios, cada gráfico corresponde a una función de la forma $y = A\operatorname{sen}(Bx)$ o $y = \cos(Bx)$, donde $B > 0$. Escribe la expresión de la función correspondiente a la gráfica.

163.

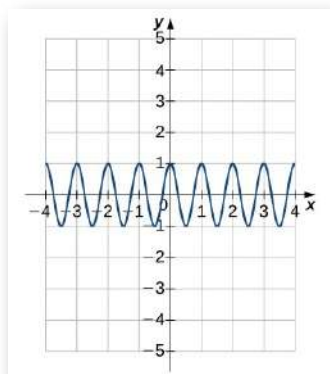


(Solución)

164.

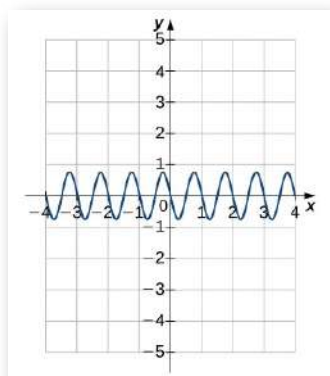


165.



([Solución](#))

166.



En los siguientes ejercicios, encuentra

- la amplitud
- el periodo
- la fase

167. $y = \text{sen}(x - \pi/4)$ ([Solución](#))

168. $y = 3\cos(2x + 3)$

169. $y = \frac{-1}{2}\text{sen}\left(\frac{1}{4}x\right)$ ([Solución](#))

170. $y = 2\cos(x - \pi/3)$

171. $y = -3\text{sen}(\pi x + 2)$ ([Solución](#))

172. $y = 4\cos(2x - \pi/2)$

173. [T] El diámetro de una rueda que gira por el suelo. es de 40 pulg. Si la rueda gira en un ángulo de 120° , ¿cuántas pulgadas se mueve? Aproximarlo al valor entero más cercano. (**Solución**)

174. [T] Encuentra la longitud del arco interceptado por un ángulo central θ en un círculo de radio r . Redondea a la centésima más cercana.

- a. $r = 12,8 \text{ cm}, \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$
- b. $r = 4,378 \text{ cm}, \theta = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$
- c. $r = 0,964 \text{ cm}, \theta = 50^\circ$
- d. $r = 8,55 \text{ cm}, \theta = 325^\circ$.

175. [T] Cuando un punto P se mueve alrededor de un círculo, la medida del ángulo central recorrido cambia. La rapidez de cambio de este ángulo se llama velocidad angular, ω , y viene dada por $\omega = \theta/t$, donde θ está en radianes y t es el tiempo. Encuentra la velocidad angular para los datos siguientes redondeando a la milésima más cercana.

- a. $\theta = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}, t = 10 \text{ seg.}$
- b. $\theta = \frac{3\pi}{5} \text{ rad}, t = 18 \text{ seg.}$
- c. $\theta = \frac{2\pi}{9} \text{ rad}, t = 1 \text{ min.}$
- d. $\theta = 23.76 \text{ rad}, t = 14 \text{ min.}$

(**Solución**)

176. [T] Se necesita un total de 250.000 m^2 de terreno para construir una planta de energía nuclear. Supongamos que se decide que el área en que se va a construir la central eléctrica debe ser circular.

- Calcula el radio del área terrestre circular.
- Si el área terrestre va a formar un sector de 45° de un círculo en lugar de un círculo completo, encuentra la longitud del lado curvo.

177. [T] El área de un triángulo isósceles con lados iguales de longitud x es $12x^2 \sin \theta$, donde θ es el ángulo formado por los dos lados. Encuentra el área de un triángulo isósceles con lados iguales de 8 pulgadas de longitud y ángulo $\theta = \frac{5\pi}{12}$ rad. (Solución)

178. [T] Una partícula viaja en una trayectoria circular a una velocidad angular constante ω . La velocidad angular está modelada por la función $\omega = 9|\cos(\pi t - \pi/12)|$. Determina la velocidad angular en $t = 9$ seg.

179. [T] Una corriente alterna para enchufes en una casa tiene voltaje dado por la función $V(t) = 150\cos 368t$, donde V es el voltaje en voltios en el tiempo t en segundos.

- Encuentra el período de la función e interpreta su significado.
- Determina el número de períodos al cabo de 1 segundo.

(Solución)

180. [T] La cantidad de horas de luz diurna en el noreste de una ciudad está modelada por la función $N(t) = 12 + 3\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right]$ donde t es el número de días después del 1 de enero.

- Encuentra la amplitud y el período.
- Determina el número de horas de luz del día más largo del año.
- Determina el número de horas de luz del día más corto del año.
- Determina el número de horas de luz natural 90 días después del 1 de enero.
- Dibuja la gráfica de la función para un período a partir del 1 de enero.

1.5 Funciones inversas

Objetivos de aprendizaje

1. Determinar las condiciones para cuando una función tiene una inversa.
2. Utilizar la prueba de línea horizontal para reconocer cuándo una función es uno a uno..
3. Encontrar la inversa de una función dada.
4. Dibujar la gráfica de una función inversa.
5. Construir nuevas funciones a partir de dos o más funciones dadas.
6. Evaluar funciones trigonométricas inversas.

Una función inversa de una función invierte la operación realizada por esta función. En esta sección, definimos formalmente una función inversa y establecemos las condiciones necesarias para que exista una función inversa. Examinamos cómo encontrar una función inversa y estudiamos la relación entre la gráfica de una función y la de su inversa. Finalmente aplicaremos estas ideas para definir y discutir las propiedades de las funciones trigonométricas inversas.

1.5.1 Existencia de una función inversa

Vamos a comenzar con un ejemplo. Se considera una función f dada por $y = f(x)$, a menudo nos interesa encontrar para cada valor y en la imagen qué valor o valores x tienen asignado dicho valor y por la aplicación f .

Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^3 + 4$. Para cualquier punto en la imagen $y = x^3 + 4$, podemos resolver esta ecuación para encontrar el valor x , operando será $x = \sqrt[3]{y - 4}$. Esta ecuación define a x como una función de y . Denotando esta función como f^{-1} , se escribirá $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y - 4}$. Para cada x

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3 + 4) = x$$

Así, esta nueva función, f^{-1} , "deshace" lo que la función original f "hizo". Una función con esta propiedad se llama **función inversa** de la función original.

DEFINICIÓN.

Dada una función f con dominio D y rango R , su **función inversa** (si existe) es la función f^{-1} cuyo dominio es R y el rango es D tal que $f^{-1}(y) = x$ si y solo si $f(x) = y$.

Es decir, para una función f y su inversa f^{-1} se cumple

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } D$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{para todo } y \text{ en } R$$

La función f^{-1} se lee como "función inversa de f ". Aquí el -1 no se usa como exponente y

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

La [Figura 1.37](#), muestra la relación entre el dominio y rango de f y el dominio y rango de f^{-1} .

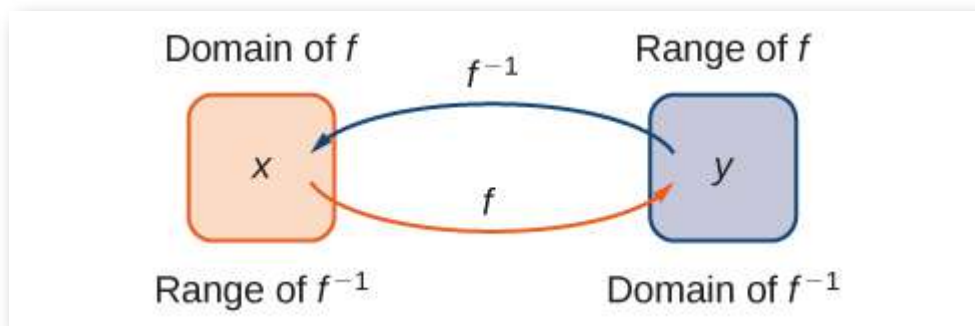


Figura 1.37 Dada una función f y su inversa f^{-1} , $f^{-1}(y) = x$ si y solo si $f(x) = y$. El rango de f se convierte en el dominio de f^{-1} y el dominio de f se convierte en el rango de f^{-1} .

Recuerda que una función tiene exactamente una imagen para cada punto del dominio. Por lo tanto, para definir una función inversa, necesitamos asignar a cada entrada a exactamente una imagen. Por ejemplo, intentemos encontrar la función inversa para $f(x) = x^2$. Resolviendo la ecuación $y = x^2$ para x , llegamos a la ecuación $x = \pm\sqrt{y}$. Esta ecuación no describe x como una función de y porque hay dos soluciones para esta ecuación a partir de cualquier valor $y > 0$. El problema de tratar de encontrar una función inversa para $f(x) = x^2$ es que hay dos valores que tienen la misma imagen cumpliendo $y > 0$. La función $f(x) = x^3 + 4$ analizada anteriormente no tenía este problema. Para esa función, cada punto del origen se asigna a una imagen diferente. Una función que envía cada entrada a una imagen diferente se llama **función uno-uno** o **función inyectiva**.

DEFINICIÓN

Una función f es **uno-uno** si $f(x_1) \neq f(x_2)$ cuando $x_1 \neq x_2$

Una forma de determinar si una función es uno-uno es analizando su gráfica. Como hemos dicho, si una función es uno-uno, no se pueden enviar dos puntos del c a una misma imagen.

Por lo tanto, si trazamos una línea horizontal en cualquier lugar del plano XY , no puede cortar a la gráfica más de una vez. Observamos que esta **prueba de la recta horizontal** es diferente de la prueba de la recta vertical. La prueba de la recta vertical permite determinar si una gráfica corresponde a una función. La prueba de la recta horizontal determina si una función es uno-uno ([Figura 1.38](#)).

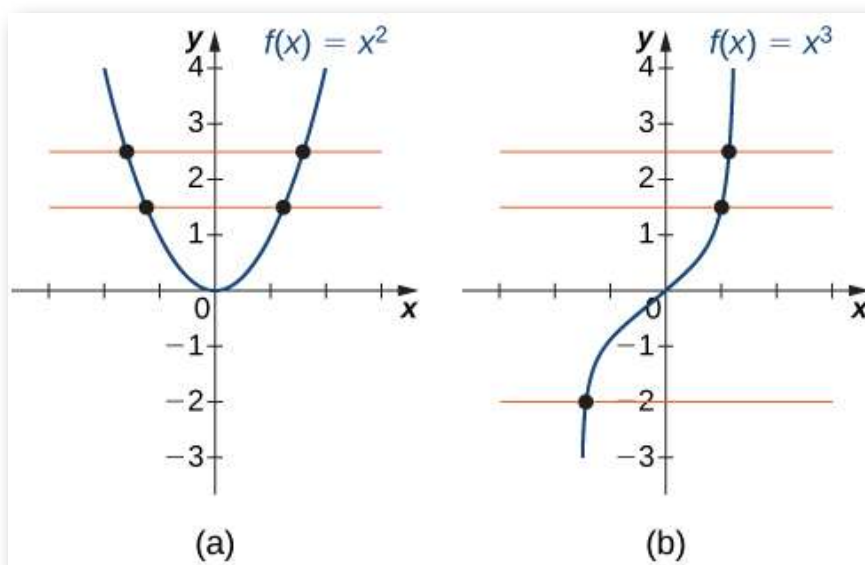


Figura 1.38 a) La función $f(x) = x^2$ no es uno a uno porque falla la prueba de la línea horizontal. (b) La función $f(x) = x^3$ es uno a uno porque pasa la prueba de la línea horizontal.

REGLA. Test de la recta horizontal

Una función f es **uno-uno o inyectiva** si y solo si cada recta horizontal corta la gráfica de f a lo sumo una vez.

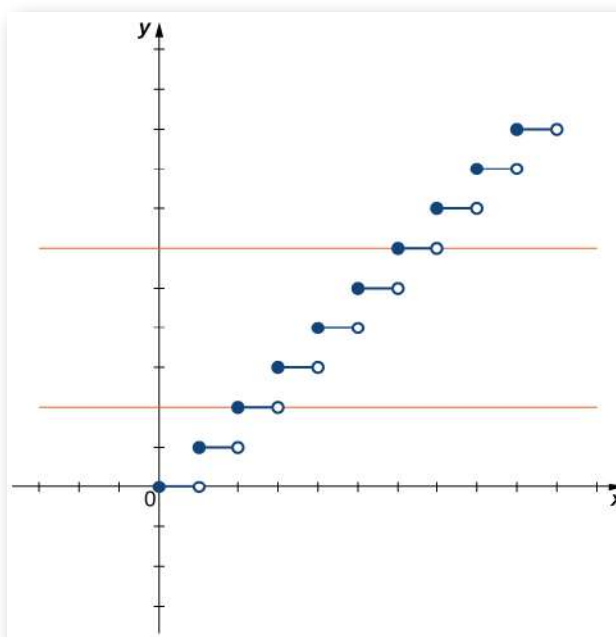


Ejemplo

1.28 Determinar si una función es uno-uno

Para cada una de las siguientes funciones, utilizar el test de la recta horizontal para determinar si la función es uno-uno

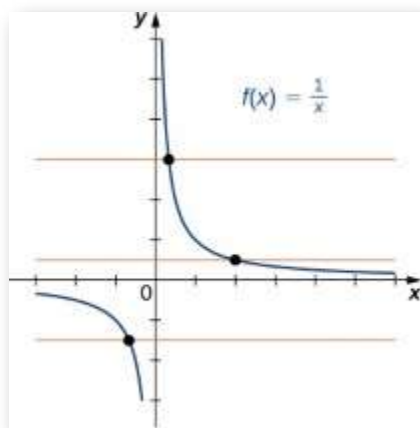
a.



b. $f(x) = 1/x$



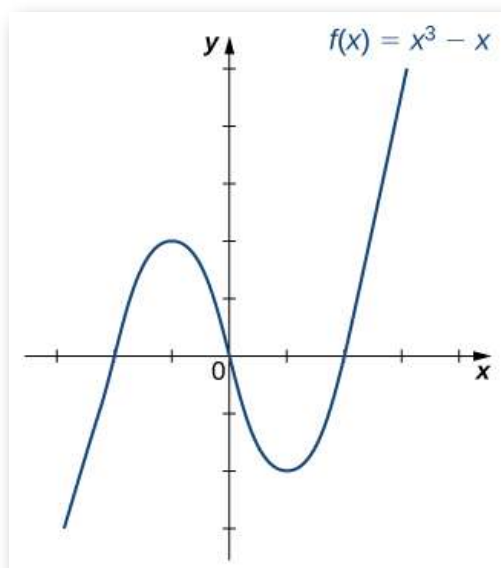
Solución



Pregunta
de control

Cuestión 1.23

¿Es la función f , cuya gráfica se muestra a continuación, una función uno-uno?



1.5.2 Encontrar la inversa de una función

Nosotros ahora podemos considerar funciones uno a uno y mostrar cómo encontrar sus inversas. Recuerda que una función mapea elementos del dominio f con elementos del rango de f . La función inversa mapea cada elemento del rango de f de nuevo a su elemento correspondiente del dominio de f . Para encontrar la función inversa de una función uno-uno f , dada cualquier y en el rango de f , necesitamos determinar qué x en el dominio de f satisface $f(x) = y$. Dado que f es uno a uno, existe exactamente uno de esos valores x . Podemos encontrar ese valor x resolviendo la ecuación $f(x) = y$ para x .

Al hacerlo, podemos escribir x como una función de y donde el dominio de esta función es el rango de f y el rango de esta nueva función es el dominio de f . En consecuencia, esta función es la inversa de f , y escribimos $x = f^{-1}(y)$. Dado que normalmente usamos la variable x para denotar la variable independiente e y para denotar la variable dependiente, a menudo intercambiamos los roles de x e y , y escribimos $y = f^{-1}(x)$. Representando la función inversa de esta manera veremos su utilidad más adelante cuando graficamos una función f y su inversa f^{-1} en los mismos ejes.

Estrategia para encontrar una función inversa

1. Resolver la ecuación $y = f(x)$ para x
2. Intercambiar las variables x e y para escribir $y = f^{-1}(x)$



Ejemplo

1.29 Encontrando la función inversa

Encuentra la inversa de la función $f(x) = 3x - 4$. Indica el dominio y el rango de esta función y comprueba que se cumple $f^{-1}(f(x)) = x$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.24

Encuentra la inversa de la función $f(x) = \frac{3x}{x-2}$. Indica el dominio y el rango de esta función.

Graficar funciones inversas

Consideremos la relación entre la gráfica de una función f y la gráfica de su inversa. Consideremos la gráfica de f que se muestra en la [Figura 1.39](#) y consideremos también un punto (a, b) en el gráfico. Si $b = f(a)$, entonces $f^{-1}(b) = a$. Por lo tanto, cuando representemos f^{-1} , el punto (b, a) está en el gráfico. Como resultado, la gráfica de f^{-1} es un reflejo de la gráfica de f sobre la recta $y = x$.

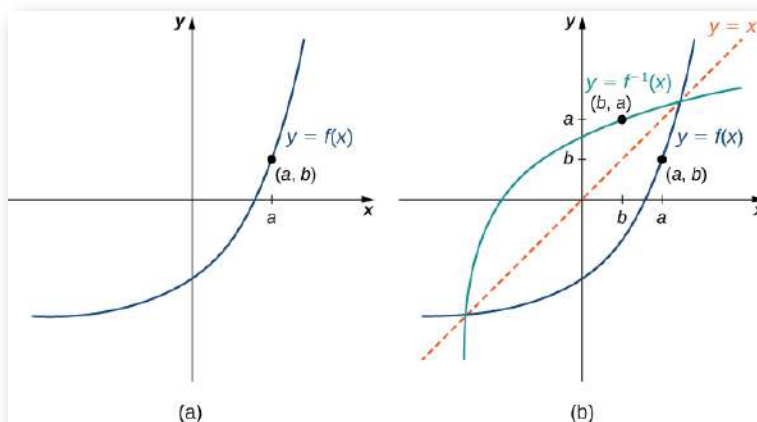


Figura 1.39 a) La gráfica de esta función f muestra el punto (a, b) en el gráfico de f . (b) Dado que (a, b) está en la gráfica de f , el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1} . La gráfica de f^{-1} es un reflejo de la gráfica de f sobre la recta $y = x$



Ejemplo

1.30 Representando gráficas de funciones inversas

Para la gráfica de f en la siguiente imagen, dibuje una gráfica de f^{-1} trazando la recta $y = x$ y usando simetría. Identifique el dominio y el rango de f^{-1} .



Solución



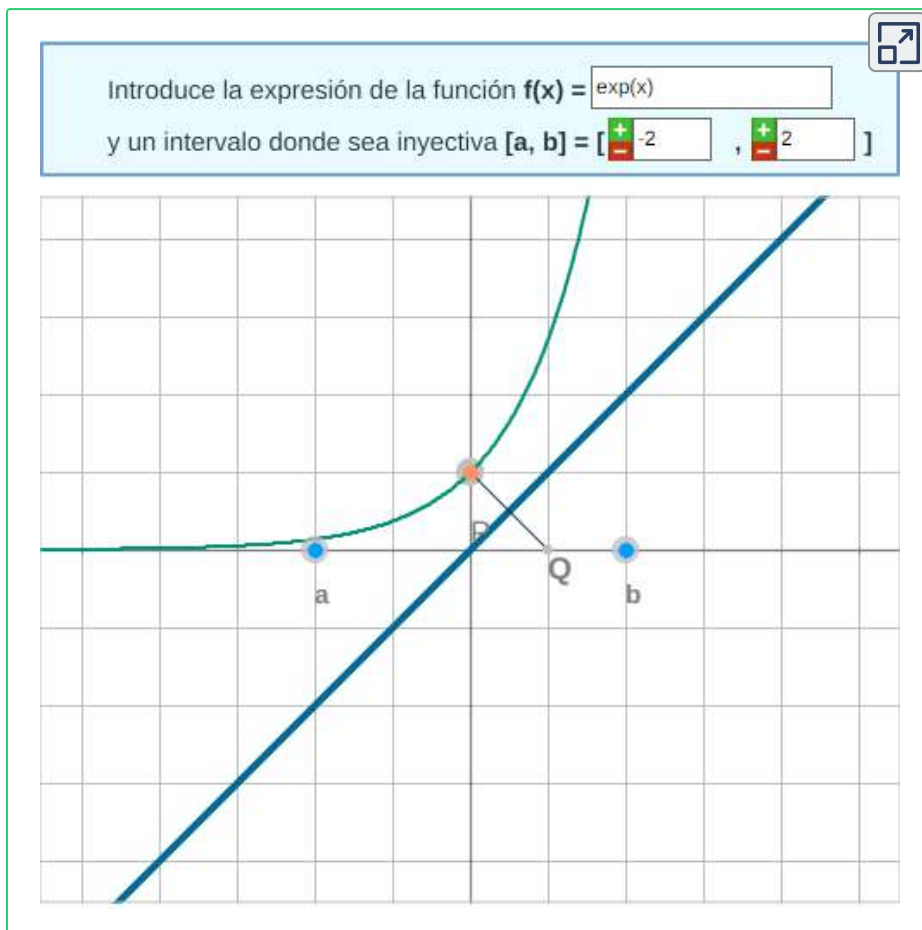
Pregunta de control

Cuestión 1.25

Dibuja la gráfica de $f(x) = 2x + 3$ y la gráfica de su inversa usando la propiedad de simetría de las funciones inversas.



En la siguiente escena interactiva puedes arrastrar el punto sobre la función y ver cómo se va representando la gráfica de la función inversa



Restricción de dominios

Como hemos visto, $f(x) = x^2$ no tiene función inversa porque no es uno-uno. Sin embargo, podemos elegir un subconjunto del dominio de f tal que la función sea uno-uno. Este subconjunto se denomina **dominio restringido**.

Al restringir el dominio de f , podemos definir una nueva función g tal que el dominio de g es el dominio restringido de f y $g(x) = f(x)$ para todo x en el dominio de g . Entonces podemos definir una función inversa para g en ese dominio.

Por ejemplo, dado que $f(x) = x^2$ es uno-uno en el intervalo $[0, \infty)$, podemos definir una nueva función g tal que el dominio de g es $[0, \infty)$ y $g(x) = x^2$ para todo x en su dominio. Como g es una función uno-uno, tiene una función inversa, dada por la fórmula $g^{-1}(x) = x$.

Por otro lado, la función $f(x) = x^2$ también es uno-uno en el dominio $(-\infty, 0]$. Por lo tanto, podemos definir una nueva función h tal que su dominio es $(-\infty, 0]$ y $h(x) = x^2$ para todos los valores de x en el dominio de h . De esta manera, la función h es uno-uno y tendrá inversa que vendrá dada por $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ (Figura 1.40).

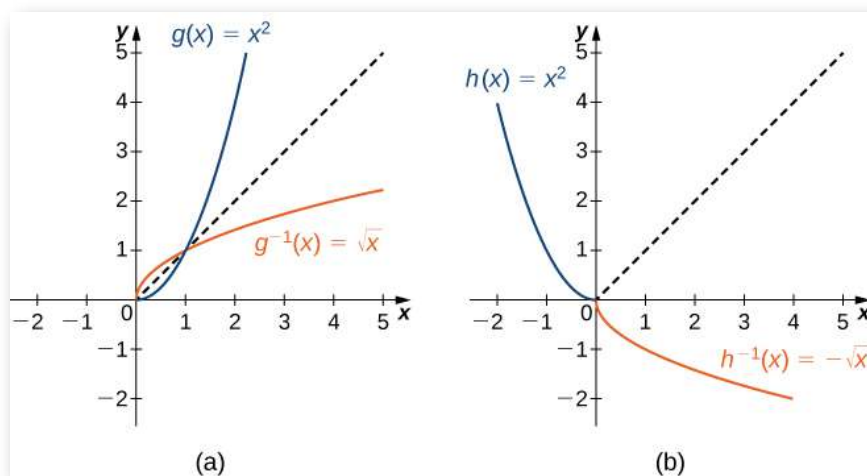


Figura 1.40 (a) Para $g(x) = x^2$ restringido a $[0, \infty)$, se tiene $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
(b) Para $h(x) = x^2$ restringido para $(-\infty, 0]$, se tendrá $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.



Ejemplo

1.31 Restricción del dominio

Consideremos la función $f(x) = (x + 1)^2$.

- Dibuja la gráfica de f y utiliza la prueba de la línea horizontal para demostrar que f no es uno-uno.
- Muestra que f es uno-uno en el dominio restringido $[-1, \infty)$. Determina el dominio y rango para la función inversa de f en este dominio restringido y encuentra una fórmula para f^{-1} .



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.26

Consideremos $f(x) = \frac{1}{x^2}$ restringido al dominio $(-\infty, 0)$. Comprueba que f es uno-uno en este dominio. Determina también el dominio y el rango de la inversa de f y encuentra una fórmula para f^{-1} .

1.5.3 Funciones trigonométricas inversas

Las seis funciones trigonométricas básicas vistas en apartados anteriores son periódicas y, por lo tanto, no son uno-uno. Sin embargo, si restringimos el dominio de una función trigonométrica a un intervalo en el que es uno-uno, podemos definir su función inversa.

Consideremos la función seno ([Figura 1.34](#)). La función seno es uno-uno en un número infinito de intervalos, pero la convención estándar es restringir el dominio al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Al hacerlo, definimos la función inversa del seno en el dominio $[-1, 1]$ tal que para cualquier x en este intervalo, la función inversa del seno nos dice qué ángulo θ en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ satisface $\text{sen}\theta = x$.

De forma similar, podemos restringir los dominios de las otras funciones trigonométricas para definir funciones trigonométricas inversas, que son funciones que determina qué ángulo en un cierto intervalo tiene un valor trigonométrico específico.

DEFINICIÓN

La función **inversa del seno**, denotada por sen^{-1} o *arcsen*, y la función **inversa del coseno**, denotada por cos^{-1} o *arcos*, están definidas en el dominio

$$D = \{x / -1 \leq x \leq 1\}$$

de la forma

$$\text{sen}^{-1}(x) = y \quad \text{si y solo si} \quad \text{sen}(y) = x \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^{-1}(x) = y \quad \text{si y solo si} \quad \cos(y) = x \quad 0 \leq y \leq \pi$$

La función **inversa de la tangente**, denotada por $\tan^{-1}$ o *arctg*, y la función **inversa de la cotangente**, denotada por $\cot^{-1}$ o *arcot*, están definidas en el dominio

$$D = \{x / \infty < x < \infty\}$$

de la forma

$$\tan^{-1}(x) = y \quad \text{si y solo si} \quad \tan(y) = x \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$\cot^{-1}(x) = y \quad \text{si y solo si} \quad \cot(y) = x \quad 0 < y < \pi$$

La función **inversa de la cosecante**, denotada por $\csc^{-1}$ o *arccsc*, y la función **inversa de la secante**, denotada por $\sec^{-1}$ o *arsec*, están definidas en el dominio

$$D = \{x / |x| \geq 1\}$$

de la forma

$$\csc^{-1}(x) = y \quad \text{si y solo si} \quad \csc(y) = x \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad y \neq 0$$

$$\sec^{-1}(x) = y \quad \text{si y solo si} \quad \sec(y) = x \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad y \neq \pi/2$$

Para representar las funciones trigonométricas inversas, utilizamos las gráficas de las funciones trigonométricas restringidas a los dominios definidos anteriormente y reflejamos las gráficas sobre la recta $y = x$ ([Figura 1.41](#)).

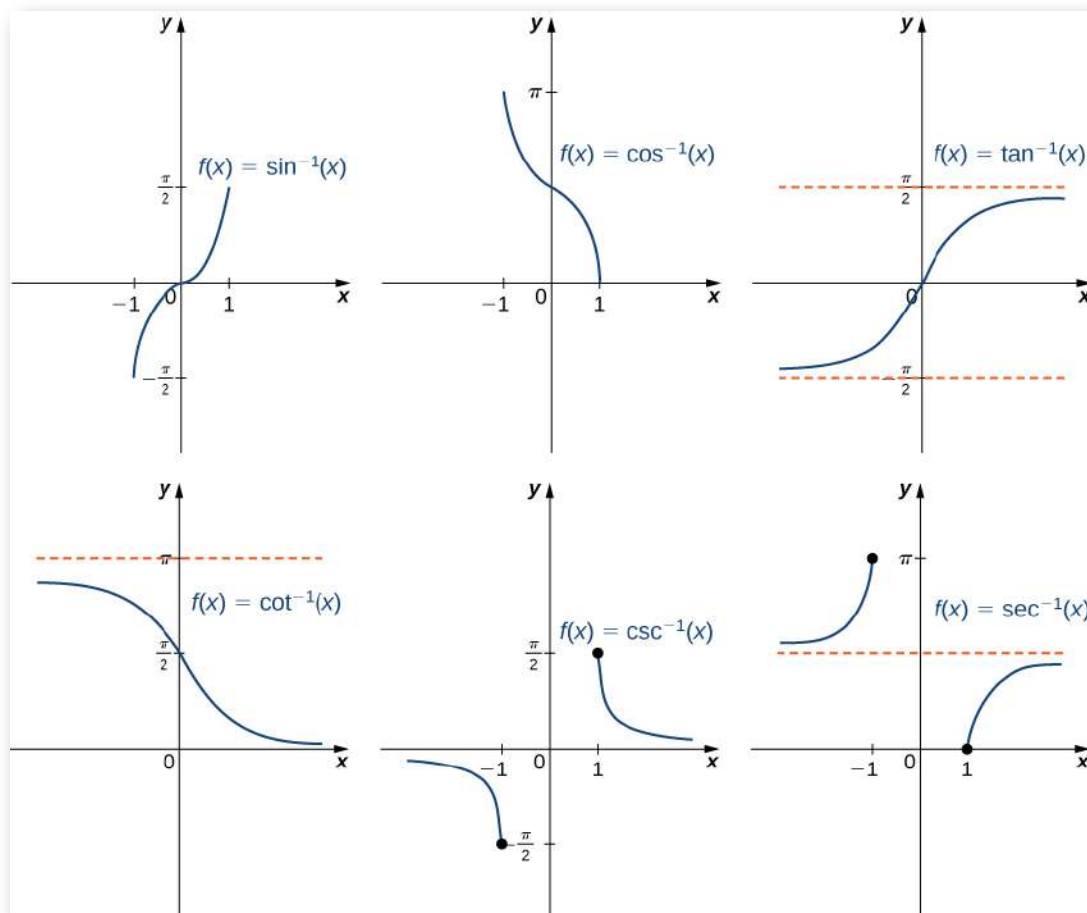
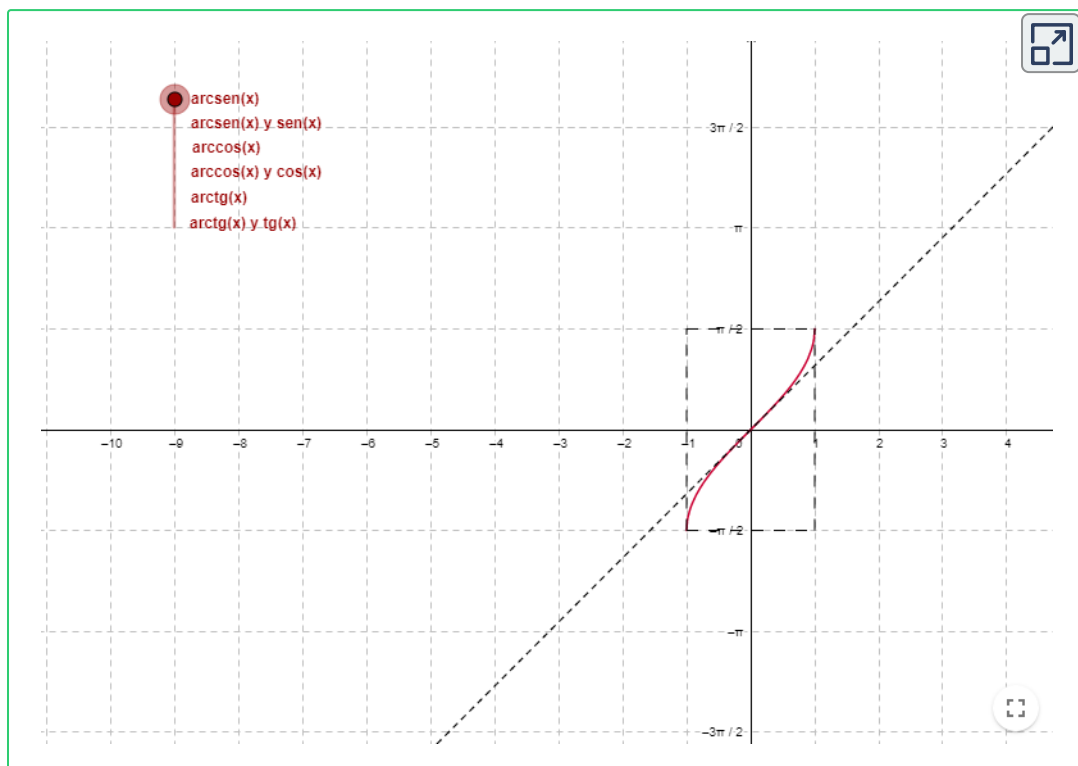


Figura 1.41 La gráfica de cada una de las funciones trigonométricas inversas es un reflejo sobre la recta $y = x$ de la función trigonométrica restringida correspondiente.

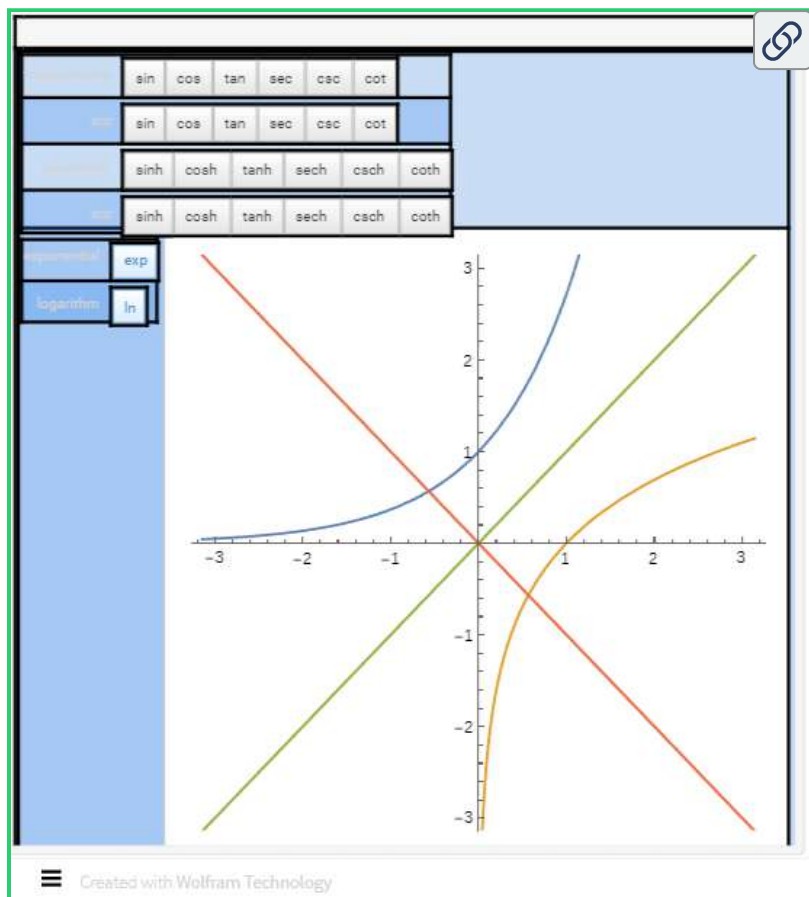


En la siguiente escena realizada en Geogebra por [Ana Garcia](#) puedes ver cómo las gráficas de las funciones trigonométricas inversas son el reflejo respecto de la recta $y = x$ de la función original.





En la siguiente escena interactiva puedes practicar representando las principales funciones trascendentes y sus inversas.



Al evaluar una función trigonométrica inversa, la salida es un ángulo. Por ejemplo, para evaluar $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ necesitamos encontrar un ángulo θ tal que $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

Claramente, muchos ángulos tienen esta propiedad. Sin embargo, dada la definición de $\cos^{-1}$, necesitamos el ángulo θ que no solo resuelve esta ecuación, sino que también se encuentra en el intervalo $[0, \pi]$. Concluimos que $\cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$

Ahora consideramos una composición de una función trigonométrica y su inversa. Por ejemplo, las dos expresiones siguientes $\text{sen}(\text{sen}^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}))$ y $\text{sen}^{-1}(\text{sen}(\pi))$. Para la primera expresión, lo simplificamos de la siguiente manera:

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})) = \text{sen}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para la segunda expresión, se tiene

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}(\pi)) = \text{sen}^{-1}(0) = 0$$

Si pensamos que la función inversa "deshace" lo que "hace" la función original, entonces, ¿por qué no se cumple $\text{sen}^{-1}(\text{sen}(\pi)) = \text{sen}^{-1}(0) = \pi$? Recordando nuestra definición de funciones inversas, una función f y su inversa f^{-1} satisfacen las condiciones $f(f^{-1}(y)) = y$ para todos y en el dominio de f^{-1} y $f^{-1}(f(x)) = x$ para todos los puntos x en el dominio f , ¿qué pasa entonces? El problema es que la función inversa del seno, sen^{-1} está restringida al dominio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Por lo tanto, para x en este intervalo es cierto que

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}(x)) = x$$

Sin embargo, para valores de x fuera de este intervalo, la ecuación no tiene que cumplirse aunque esté definido para todos los números reales x el valor de $\text{sen}^{-1}(\text{sen}(x))$.

¿Qué ocurre para $\text{sen}(\text{sen}^{-1}(y))$? ¿Ocurre lo mismo? La respuesta es no. Dado que el dominio de sen^{-1} es el intervalo $[-1, 1]$, concluimos que $\text{sen}(\text{sen}^{-1}(y)) = y$ si $-1 \leq y \leq 1$ y la expresión no está definida para otros valores de y . En resumen,

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1}(y)) = y \quad \text{si} \quad -1 \leq y \leq 1$$

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}(x)) = x \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

De manera similar, para la función coseno, se tendrá

$$\cos(\cos^{-1}(y)) = y \quad \text{si} \quad -1 \leq y \leq 1$$

$$\cos^{-1}(\cos(x)) = x \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

De forma análoga se pueden obtener las mismas propiedades para el resto de funciones y sus inversas.



Ejemplo

1.32 Evaluación de expresiones que involucran funciones trigonométricas inversas

Evalúa cada una de las siguientes expresiones.

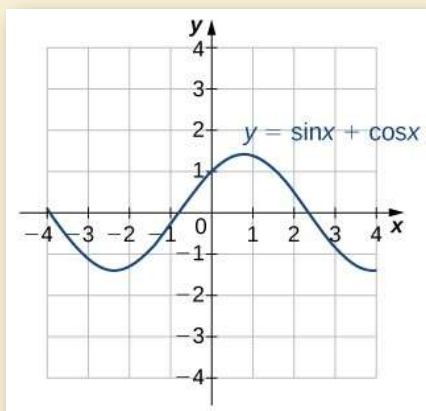
- $\text{sen}^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.
- $\text{tg}(\text{tg}^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{3}}))$.
- $\cos^{-1}(\cos(-\frac{5\pi}{4}))$.
- $\text{sen}^{-1}(\cos(\frac{2\pi}{3}))$.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

En muchas áreas de la ciencia, la ingeniería y las matemáticas, es útil conocer el valor máximo que puede obtener una función, incluso si no conocemos su valor exacto en un instante dado. Por ejemplo, si tenemos una función que describe la resistencia de una viga de techo, querríamos saber el peso máximo que la viga puede soportar sin romperse. Si tenemos una función que describe la velocidad de un tren, querríamos saber su velocidad máxima antes de que salte de los rieles. El diseño seguro a menudo depende de conocer los valores máximos.

Este proyecto describe un ejemplo simple de una función con un valor máximo que depende de dos coeficientes de ecuación. Veremos que los valores máximos pueden depender de varios factores además de la variable independiente x .

1. Considera la gráfica en [Figura 1.42](#), de la función $y = \sin x + \cos x$. Describe su gráfica. ¿Es periódica? ¿Cómo lo sabes?



- Usando una calculadora gráfica u otro dispositivo gráfico, estima los valores x e y del punto máximo para el gráfico (el primer punto donde $x > 0$). Puede resultar útil expresar el valor de x como un múltiplo de π .
- Ahora considera otras gráficas de la forma $y = A \sin x + B \cos x$ para varios valores de A y B . Dibuja la gráfica cuando $A = 2$ y $B = 1$, y encuentra los valores x e y para el punto máximo. (Recuerda expresar el valor de x como un múltiplo de π , si es posible). ¿Se ha movido?
- Repite para $A = 1$, $B = 2$. ¿Existe alguna relación con lo que encontró en la parte (2)?
- Completa la siguiente tabla, agregando algunas opciones propias para A y B :

A	0	1	1	1	2	2	3	4
B	1	0	1	2	1	2	4	3
A	$\sqrt{3}$	1	12	5				
B	1	$\sqrt{3}$	5	12				

Tabla 1.11 Valores de 2^x para obtener una lista de números racionales aproximados $2^{\sqrt{2}}$

- Intenta averiguar la fórmula para los valores de y .
- La fórmula para los valores de x es un poco más difícil. Los puntos más útiles de la tabla son $(1, 1)$, $(1, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 1)$. (Sugerencia: considera las funciones trigonométricas inversas).

8. Si encontraste fórmulas para las partes (5) y (6), demuestra que funcionan juntas. Es decir, sustituya la fórmula del valor x que encontró en $y = A\sin x + B\cos x$ y simplifíquela para llegar a la fórmula del valor y que encontró.

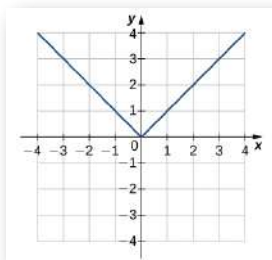


1.5.4 Ejercicios



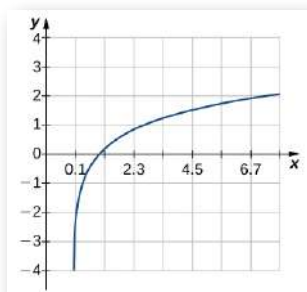
Para los siguientes ejercicios, usa la prueba de la línea horizontal para determinar si cada uno de los gráficos dados es uno-uno.

183.

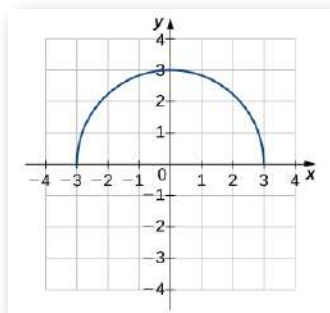


(Solución)

184.

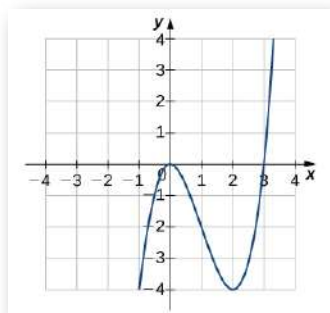


185.

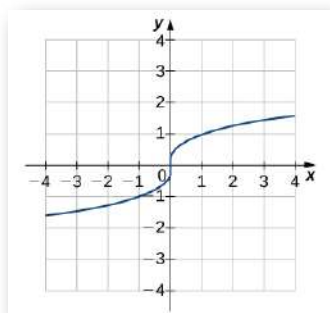


(Solución)

186.

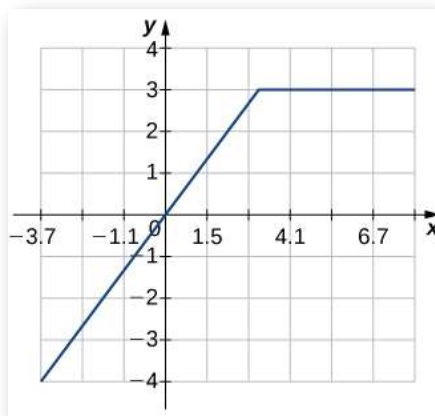


187.



(Solución)

188.



Para los siguientes ejercicios, a. encontrar la función inversa, y b. encuentra el dominio y rango de la función inversa.

189. $f(x) = x^2 - 4$, $x \geq 0$ ([Solución](#))

190. $f(x) = \sqrt{3}x - 4$

191. $f(x) = x^3 + 1$ ([Solución](#))

192. $f(x) = (x - 1)^2$, $x \leq 1$

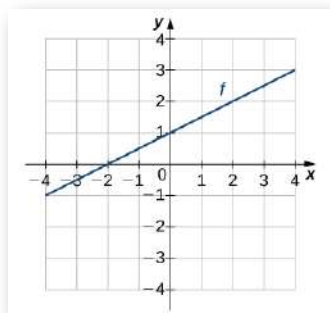
193. $f(x) = \sqrt{x - 1}$ ([Solución](#))

194. $f(x) = \frac{1}{x+2}$



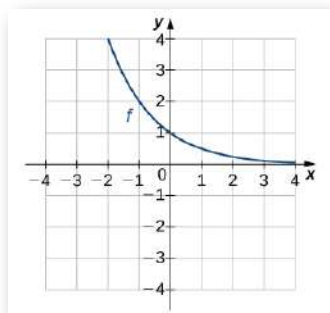
Para los siguientes ejercicios, usa la gráfica de f para bosquejar la gráfica de su función inversa.

195.

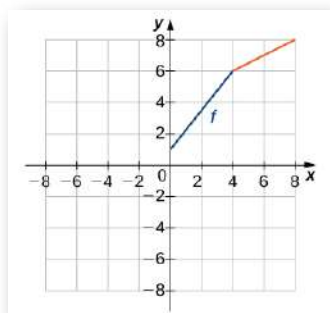


(Solución)

196.

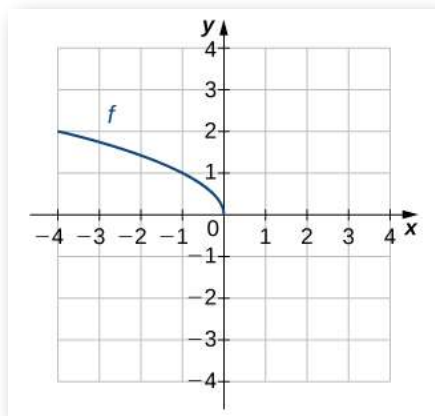


197.



(Solución)

198.



Para los siguientes ejercicios, usa la composición para determinar qué pares de funciones son inversas.

199. $f(x) = 8x, g(x) = x/8$ ([Solución](#))

200. $f(x) = 8x + 3, g(x) = \frac{x-3}{8}$

201. $f(x) = 5x - 7, g(x) = \frac{x+5}{7}$ ([Solución](#))

202. $f(x) = \frac{2}{3}x + 2, g(x) = \frac{3}{2}x + 3$

203. $f(x) = \frac{1}{x-1}, x \neq 1, g(x) = \frac{1}{x} + 1, x \neq 0$ ([Solución](#))

204. $f(x) = x^3 + 1, g(x) = (x - 1)^{1/3}$

205. $f(x) = x^2 + 2x + 1, x \geq 1, g(x) = -1 + \sqrt{x}, x \geq 0$
([Solución](#))

206. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq x \leq 2, g(x) = \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq x \leq 2$



Para los siguientes ejercicios, evalúe las funciones. Dar el valor exacto.

207. $\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ ([Solución](#))

208. $\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

209. $\cot^{-1} (1)$ ([Solución](#))

210. $\sen^{-1} (-1)$

211. $cs^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ ([Solución](#))

212. $\cos^{-1} \left(\tan^{-1} (\sqrt{3}) \right)$

213. $\sen^{-1} \left(\cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$ ([Solución](#))

214. $\tan^{-1} \left(\tan^{-1} \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)$

215. $\tan^{-1} \left(\tan^{-1} \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)$ ([Solución](#))

216. La función $C = T(F) = (5/9)(F - 32)$ convierte grados Fahrenheit a grados Celsius.

- Halla la función inversa $F = T^{-1}(C)$.
- ¿Para qué se usa la función inversa?

217. [T] La velocidad V (en centímetros por segundo) de la sangre en una arteria a una distancia x cm del centro de la arteria se puede modelar mediante la función $V = f(x) = 500(0.04 - x^2)$ para $0 \leq x \leq 0.2$.

- Encuentra $x = f^{-1}(V)$.
- Interpreta para qué se usa la función inversa.
- Encuentra la distancia desde el centro de una arteria con una velocidad de 15 cm/seg, 10 cm/seg y 5 cm/seg.

(Solución)

218. [T] Una función que convierte las tallas de los vestidos en los Estados Unidos a las de Europa viene dada por $D(x) = 2x + 24$.

- Encuentra las tallas de vestidos europeos que corresponden a las tallas 6, 8, 10 y 12 en los Estados Unidos.
- Busca la función que convierte las tallas de vestidos europeos en tallas de vestidos estadounidenses.
- Utiliza la parte b. para encontrar las tallas de vestido en los Estados Unidos que corresponden a 46, 52, 62 y 70.

219. [T] El costo de eliminar una toxina de un lago está modelado por la función $C(p) = 75p/(85 - p)$, donde C es el costo (en miles de dólares) y p es la cantidad de toxina en un lago pequeño (medido en partes por mil millones [ppb]). Este modelo es válido solo cuando la cantidad de toxina es inferior a 85 ppb.

- Encuentra el costo de eliminar 25 ppb, 40 ppb y 50 ppb de la toxina del lago.
- Encuentra la función inversa

- c. Utiliza la parte b. para determinar la cantidad de toxina que se elimina por 50,000 dólares.

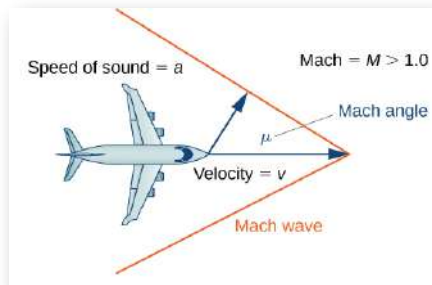
(Solución)

220. [T] Un coche de carreras acelera a una velocidad dada por $v(t) = \frac{25}{4}t + 54$, donde v es la velocidad (en pies por segundo) en el tiempo t .

- a. Encuentra la velocidad del automóvil a los 10 segundos.
b. Encuentra la función inversa.
c. Utiliza la parte b. para determinar cuánto tarda el automóvil en alcanzar una velocidad de 150 pies/seg.

221. [T] El número de Mach de un avión M es la relación entre su velocidad y la velocidad del sonido. Cuando un avión vuela a una altitud constante, su ángulo de Mach viene dado por $\mu = 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{M}\right)$. Encuentra el ángulo de Mach (al grado más cercano) para los siguientes números de Mach.

- a. $M = 1.4$
b. $M = 2.8$
c. $M = 4.3$



(Solución)

222. [T] Usando $\mu = 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{M}\right)$, encuentra el número de Mach M para los siguientes ángulos.

- a. $\mu = \frac{\pi}{6}$
- b. $\mu = \frac{2\pi}{7}$
- c. $\mu = \frac{3\pi}{8}$

223. [T] La temperatura promedio (en grados Celsius) de una ciudad en el norte de los Estados Unidos se puede modelar mediante la función $T(x) = 5 + 18\sin\left[\frac{\pi}{6}(x - 4.6)\right]$, donde x es el tiempo en meses y $x = 1.00$ corresponde al 1 de enero. Determina el mes y el día en que la temperatura promedio es de 21°C . ([Solución](#))

224. [T] La profundidad (en pies) del agua en un muelle cambia con la subida y bajada de las mareas. Está modelado por la función $D(t) = 5\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{7\pi}{6}\right) + 8$, donde t es el número de horas después de la medianoche. Determine la primera vez después de la medianoche cuando la profundidad es de 11.75 pies.

225. [T] Un objeto que se mueve en un movimiento armónico simple es modelado por la función $s(t) = -6\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, donde s se mide en pulgadas y t se mide en segundos. Determine la primera vez que la distancia recorrida es de 4.5 pulg. ([Solución](#))

226. [T] Una galería de arte local tiene un retrato de 3 pies de altura que se cuelga a 2.5 pies por encima del nivel de los ojos de una persona promedio. El ángulo de visión θ se puede modelar mediante la función $\theta = \tan^{-1}\frac{5.5}{x} - \tan^{-1}\frac{2.5}{x}$, donde x es la distancia (en pies) del retrato. Encuentra el ángulo de visión cuando una persona está a 4 pies del retrato.

227. [T] Usa una calculadora para evaluar $\tan^{-1}(\tan(2.1))$ y $\cos^{-1}(\cos(2.1))$. Explique ambos resultados. ([Solución](#))

228. [T] Usa una calculadora para evaluar $\sin(\sin^{-1}(-2))$ y $\tan(\tan^{-1}(-2))$. Explique ambos resultados.

1.6 Función exponencial y logarítmica

Objetivos de aprendizaje

1. Identificar la forma de una función exponencial.
2. Explicar la diferencia entre las gráficas de x^b y b^x .
3. Reconocer la importancia del número e .
4. Identificar la forma de una función logarítmica.
5. Explicar la relación entre funciones exponenciales y logarítmicas.
6. Describir cómo calcular un logaritmo en una base diferente.
7. Identificar las funciones hiperbólicas, sus gráficas e identidades básicas.

En esta sección examinaremos las funciones exponenciales y logarítmicas y, utilizando las propiedades de estas funciones, se resolverán ecuaciones con términos exponenciales o logarítmicos. Analizaremos el significado y la importancia del número e y definiremos también las funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas, que se definen a partir de combinaciones de funciones exponenciales y logarítmicas. En el capítulo de aplicaciones de las integrales se presentarán definiciones alternativas de las funciones exponenciales y logarítmicas viendo que tienen las mismas propiedades independientemente de cómo se definan.

1.6.1 Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales surgen en muchas aplicaciones. Un ejemplo común es el crecimiento de la población.

Por ejemplo, si una población comienza con P_0 individuos y luego crece a una tasa anual de 2%, su población después de 1 año será

$$P(1) = P_0 + 0.02P_0 = P_0(1 + 0.02) = 1.02P_0.$$

Su población después de 2 años será

$$P(2) = P(1) + 0.02P(1) = 1.02 \cdot P(1) = (1.02)^2 P_0.$$

En general, su población después t años es

$$P(t) = P_0(1.02)^t$$

que es una función exponencial. De manera más general, cualquier función de la forma $f(x) = b^x$, dónde $b > 0$, $b \neq 1$, es una función exponencial con **base** b y **exponente** x . Las funciones exponenciales tienen bases constantes y exponentes variables. Debes tener en cuenta que una función de la forma $f(x) = x^b$ para alguna constante b no es una función exponencial sino una función potencial.

Para ver la diferencia entre una función exponencial y una función potencial, compararemos las funciones $y = x^2$ e $y = 2^x$. En la tabla 1.10, vemos que ambos 2^x y x^2 se acercan al infinito cuando $x \rightarrow \infty$. Sin embargo, 2^x se vuelve más grande que x^2 y crece más rápidamente a medida que $x \rightarrow \infty$. En la dirección opuesta, cuando $x \rightarrow -\infty$, $x^2 \rightarrow \infty$, mientras $2^x \rightarrow 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal para $y = 2^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x^2	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36
2^x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

Tabla 1.10 Valores de x^2 y 2^x

En la [Figura 1.43](#) representamos ambas curvas $y = x^2$ e $y = 2^x$ para mostrar en qué se diferencian las gráficas.

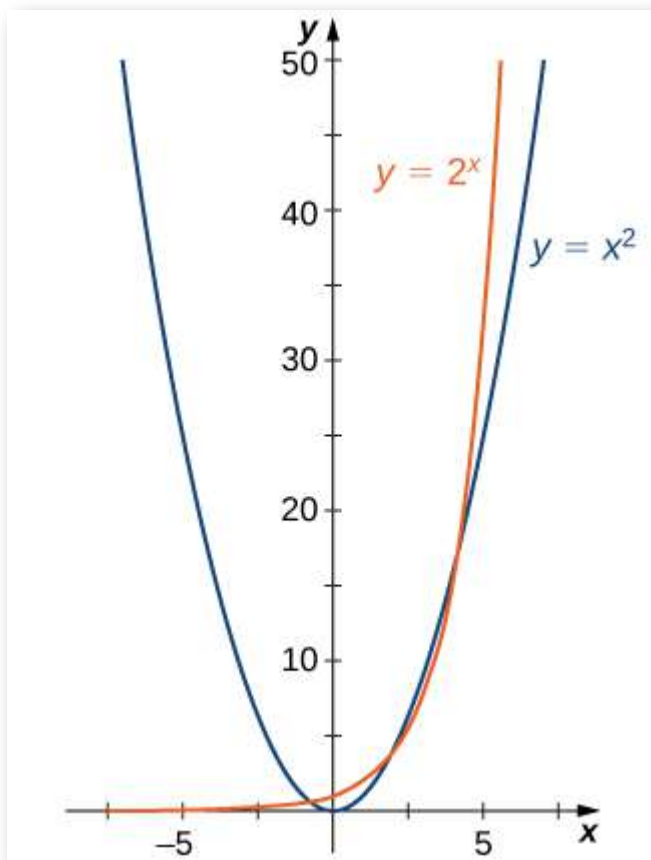


Figura 1.43. Ambas curvas 2^x y x^2 se acercan al infinito cuando $x \rightarrow \infty$, pero 2^x crece más rápidamente que x^2 . Cuando $x \rightarrow -\infty$, $x^2 \rightarrow \infty$, mientras que $2^x \rightarrow 0$.

Evaluar funciones exponenciales

Recordemos en primer lugar las propiedades de los exponentes:

- Si x es un número entero positivo, entonces definimos $b^x = b \cdot b \dots b$ (con x factores de b). Además, b^0 se define como 1.
- Si x es un número entero negativo, entonces $x = -y$ para un entero positivo y , y definimos $b^x = b^{-y} = 1/b^y$.
- Si x es un número racional, entonces $x = p/q$, dónde p y q son enteros y $b^x = b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p}$. Por ejemplo, $9^{3/2} = \sqrt[2]{9^3} = 27$.

Sin embargo, ¿cómo se define b^x si x es un numero irracional? Por ejemplo, ¿qué entendemos por $2^{\sqrt{2}}$? Esta es una pregunta demasiado compleja para que podamos responderla completamente en este momento; sin embargo, podemos hacer una aproximación.

En la tabla 1.11, enumeramos algunos números racionales que se acercan $\sqrt{2}$, y también los valores de 2^x para cada número racional x . Afirmamos que si elegimos números racionales x acercándose cada vez más a $\sqrt{2}$, los valores de 2^x se acercan más y más a algún número L . Definimos ese número L como el valor de $2^{\sqrt{2}}$.

x	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421	1.414213
2^x	2.639	2.65737	2.66475	2.665119	2.665138	2.665143

Tabla 1.11Valores de 2^x para obtener una lista de números racionales aproximados $2^{\sqrt{2}}$



Ejemplo

1.33 Crecimiento de bacterias

Supongamos que se sabe que una población particular de bacterias duplica su tamaño cada 4 horas. Si un cultivo comienza con 1000 bacterias, el número de bacterias después 4 horas es $n(4) = 1000 \cdot 2$. El número de bacterias después de 8 horas es $n(8) = n(4) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^2$. En general, la cantidad de bacterias después $4m$ horas es $n(4m) = 1000 \cdot 2^m$. Considerando $t = 4m$, vemos que el número de bacterias después de t horas es $n(t) = 1000 \cdot 2^{t/4}$. Encuentra la cantidad de bacterias después de 6 horas, después de 10 horas, y después de 24 horas.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.27

Dada la función exponencial $f(x) = 100 \cdot 3^{x/2}$, evaluar $f(4)$ y $f(10)$.



Visita el enlace [enlace](#) para ver otro ejemplo de crecimiento poblacional exponencial.

Representación de funciones exponenciales

Para cualquier base $b > 0$, $b \neq 1$, la función exponencial $f(x) = b^x$ está definida para todos los números reales x y $b^x > 0$. Por tanto, el dominio de $f(x) = b^x$ es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $(0, \infty)$.

Para representar b^x , observamos que para $b > 1$, b^x crece en $(-\infty, \infty)$ y $b^x \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$, mientras que $b^x \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$. Por otro lado, si b está comprendido entre 0 y 1, $f(x) = b^x$ decrece en $(-\infty, \infty)$ y $b^x \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$ mientras que $b^x \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$ ([Figura 1.44](#)).

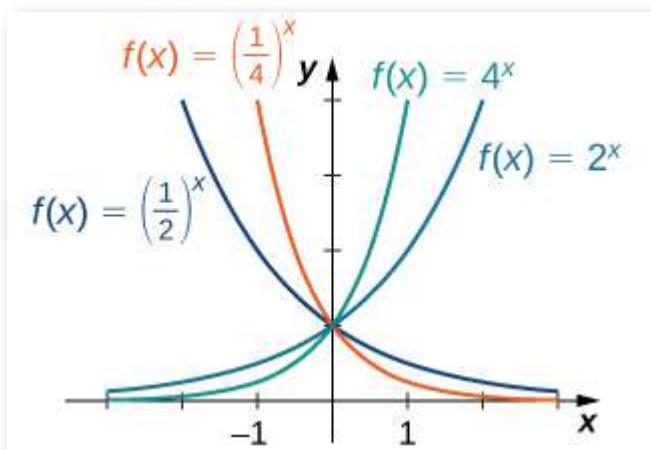
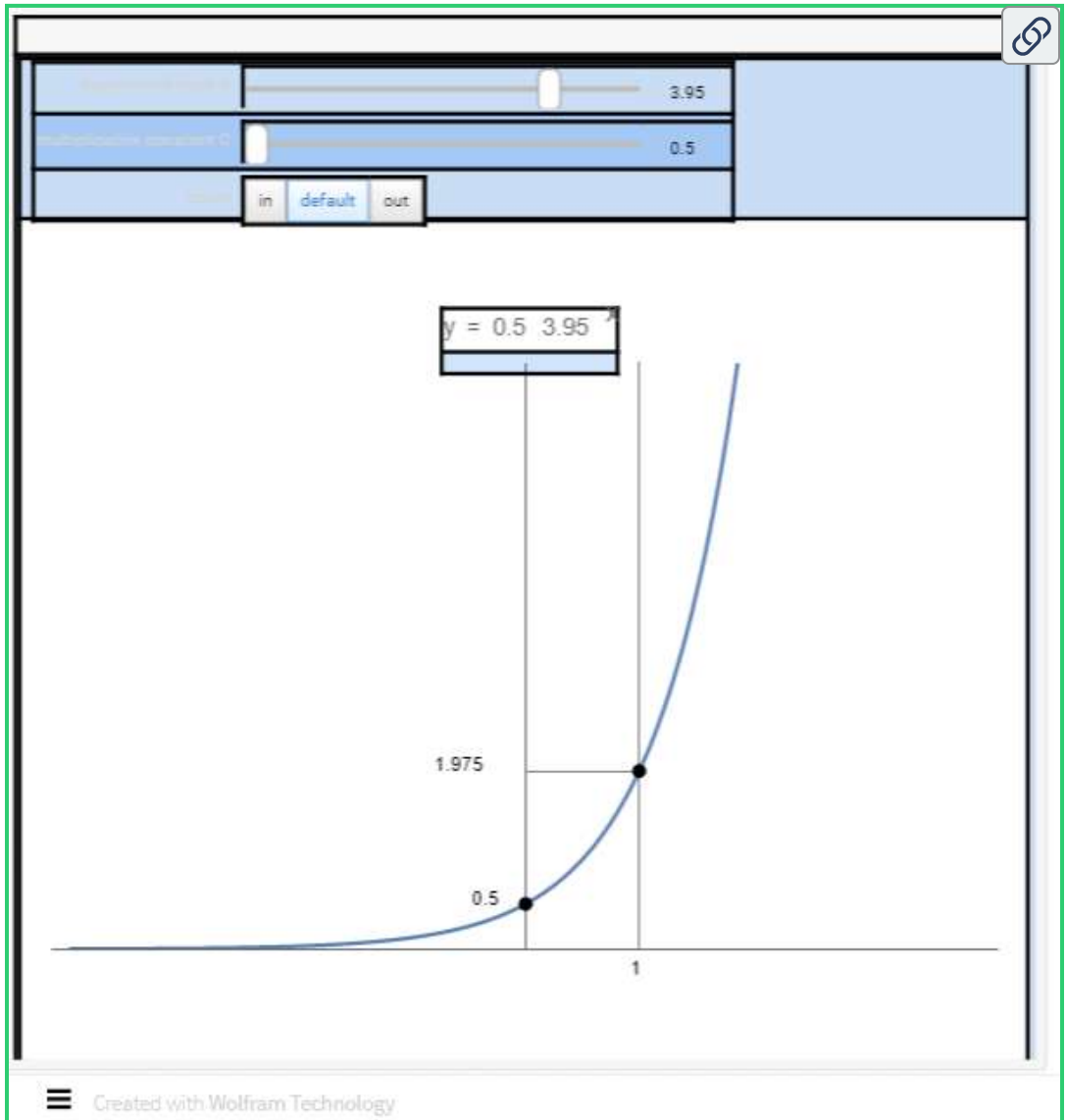


Figura 1.44. Si $b > 1$, se tiene que b^x crece en $(-\infty, \infty)$. Si $0 < b < 1$, se cumple b^x decrece en $(-\infty, \infty)$.



La siguiente escena interactiva, a la que se puede acceder desde este [enlace](#), permite la exploración de las gráficas de funciones exponenciales.



Debemos tener en cuenta que las funciones exponenciales satisfacen las leyes generales de los exponentes. Para recordar estas leyes, las establecemos como reglas.

REGLA. Leyes de los exponentes

Para cualquier constante $a > 0$, $b > 0$, y para todo x e y ,

1. $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$

2. $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

3. $(b^x)^y = b^{xy}$

4. $(ab)^x = a^x b^x$

5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$



Ejemplo

1.34 Usando las leyes de los exponentes

Usa las leyes de los exponentes para simplificar cada una de las siguientes expresiones.

a. $\frac{(2x^{2/3})^3}{(4x^{-1/3})^2}$

b. $\frac{(x^3 y^{?1})^2}{(xy^2)^{-2}}$



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.28

Usa las leyes de los exponentes para simplificar $\frac{6x^{-3}y^2}{12x^{-4}y^5}$

1.6.2 El número e

En las aplicaciones del mundo real aparece un tipo especial de función exponencial. Para introducirla, consideremos el siguiente ejemplo de crecimiento exponencial que surge del interés compuesto en una cuenta de ahorros. Supongamos que una persona invierte P dólares en una cuenta de ahorros con una tasa de interés anual compuesto, r . La cantidad de dinero después de 1 año es

$$A(1) = P + rP = P(1 + r)$$

La cantidad de dinero después 2 años es

$$A(2) = A(1) + rA(1) = P(1 + r) + rP(1 + r) = P(1 + r)^2$$

De manera más general, la cantidad después de t años es

$$A(t) = P(1 + r)^t$$

Si el dinero se capitaliza 2 veces al año, la cantidad de dinero después de medio año es

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = P + \left(\frac{r}{2}\right)P = P\left(1 + \frac{r}{2}\right).$$

La cantidad de dinero después de 1 es

$$A(1) = A\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{r}{2}\right)A\left(\frac{1}{2}\right) = P\left(1 + \frac{r}{2}\right) + \frac{r}{2}P\left(1 + \frac{r}{2}\right) = P\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$$

Después de t años, la cantidad de dinero en la cuenta es

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}.$$

De manera más general, si el dinero está compuesto n veces al año, la cantidad de dinero en la cuenta después de t años viene dado por la función

$$A(t) = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

¿Qué ocurre cuándo $n \rightarrow \infty$? Para responder a esta pregunta, denotando $m = n/r$ se tendrá

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mrt}$$

Examinamos el comportamiento de $(1 + 1/m)^m$ cuando $m \rightarrow \infty$, usando una tabla de valores (Tabla 1.12).

m	10	100	1000	10,000	100,000	1,000,000
$(1 + \frac{1}{m})^m$	2.5937	2.7048	2.71692	2.71815	2.718268	2.718280

Tabla 1.12 Valores de $(1 + 1/m)^m$ cuando $m \rightarrow \infty$.

Mirando esta tabla, parece que $(1 + 1/m)^m$ se acerca a un número entre 2.7 y 2.8 cuando $m \rightarrow \infty$. De hecho, se puede demostrar que $(1 + 1/m)^m$ converge a un número cuando $m \rightarrow \infty$, a este valor le llamaremos **número e** . Con seis cifras decimales de precisión, $e \approx 2.718282$.

La letra e fue utilizado por primera vez para representar este número por el matemático suizo Leonhard Euler durante la década de 1720. Aunque Euler no descubrió el número, mostró muchas conexiones importantes entre e y las funciones logarítmicas.

Todavía usamos la notación e hoy para honrar el trabajo de Euler porque aparece en muchas áreas de las matemáticas y porque podemos usarlo en muchas aplicaciones prácticas.

Volviendo a nuestro ejemplo de cuenta de ahorros, podemos concluir que si una persona pone P dólares en una cuenta a una tasa de interés anual r compuesto continuamente, entonces $A(t) = Pe^{rt}$. Esta función puede resultarle familiar. Dado que las funciones que contienen términos con el número e surgen a menudo en aplicaciones, llamamos a la función $f(x) = e^x$ la **función exponencial natural**. Esta función no solo es interesante por la definición del número e , sino también, como se analiza a continuación, su gráfica tiene una propiedad importante.

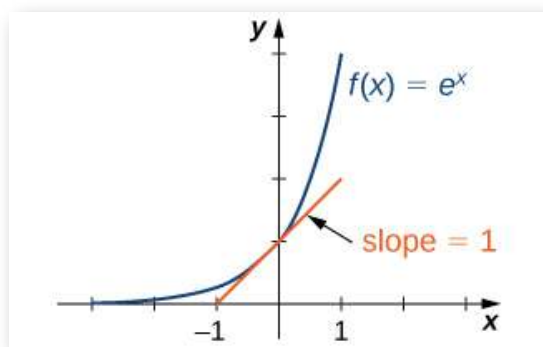


Figura 1.45. La gráfica de $f(x) = e^x$ tiene una recta tangente con pendiente 1 en $x = 0$.

Como $e > 1$, sabemos que e^x es creciente $(-\infty, \infty)$. En la [Figura 1.45](#), mostramos la gráfica de $f(x) = e^x$ junto con una recta tangente a la gráfica en $x = 0$. Aunque daremos una definición precisa de recta tangente en el capítulo dedicado a las derivadas, informalmente, diremos que una recta tangente a una gráfica de f en un punto $x = a$ es una recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ y tiene

la misma "pendiente" que f en ese punto. La función $f(x) = e^x$ es la única función exponencial b^x con recta tangente en $x = 0$ que tiene una pendiente con valor 1. Como veremos más adelante en el texto, tener esta propiedad hace que la función exponencial natural sea la función exponencial más simple para usar en muchos casos.



Ejemplo

1.35 Interés compuesto

Supongamos que 500 dólares se invierten en una cuenta a una tasa de interés anual de $r = 5.5\%$, compuesto continuo.

- Sea t el número de años después de la inversión inicial y $A(t)$ la cantidad de dinero en la cuenta en el momento t . Encuentra una fórmula para $A(t)$.
- Encuentra la cantidad de dinero en la cuenta después 10 años y después 20 años.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.29

Si 750 dólares se invierten en una cuenta a una tasa de interés anual del 4% , compuesto continuo, encuentra una fórmula para la cantidad de dinero en la cuenta después de t años. Encuentra la cantidad de dinero después de 30 años.

1.6.3 Funciones logarítmicas

Una vez introducidas las funciones exponenciales; podemos analizar sus inversas; que son las funciones logarítmicas. Estos son útiles cuando necesitamos considerar cualquier fenómeno que varíe en una amplia gama de valores; como el pH en química o los decibelios en los niveles de sonido.

La función exponencial $f(x) = b^x$ es uno-uno, con dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(0, \infty)$. Por lo tanto, tiene una función inversa, llamada **función logarítmica con base b** . Para cualquier $b > 0$, b distinto de 1, la función logarítmica con base b , que se denota $\log_b$, tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $(-\infty, \infty)$, y satisface

$$\log_b(x) = y \text{ si y solo si } b^y = x.$$

Por ejemplo,

$$\log_2(8) = 3 \text{ ya que } 2^3 = 8$$

$$\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2 \text{ ya que } 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

$$\log_2(8) = 3 \text{ ya que } 2^3 = 8$$

$$\log_b(1) = 0 \text{ ya que } b^0 = 1$$

Además, dado que $y = \log_b(x)$ y $y = b^x$ son funciones inversas,

$$\log_b(b^x) = x \text{ y } b^{\log_b(x)} = x.$$

La función logarítmica más utilizada es la función $\log_e$ y como utiliza el número e como base, se llama **logaritmo natural**.

Aquí usamos la notación $\ln(x)$ o $\ln x$ para la función $\log_e(x)$. Por ejemplo,

$$\ln(e) = \ln_e(e) = 1 \quad \ln(e^3) = \log_e(e^3) = 3 \quad \ln(1) = \log_e(1) = 0.$$

Dado que las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x)$ son inversas entonces

$$\ln(e^x) = x \quad \text{y} \quad e^{\ln(x)} = x,$$

y sus gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$ ([Figura 1.46](#)).

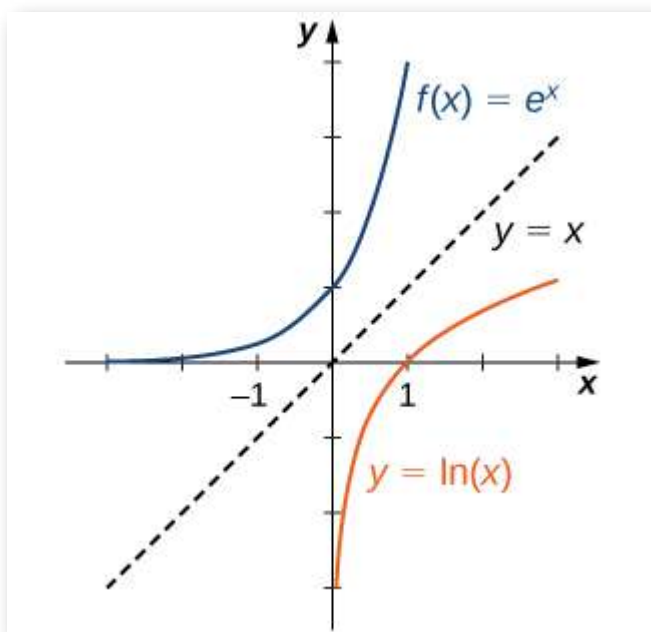


Figura 1.46. Las funciones $y = e^x$ y $y = \ln(x)$ son inversas entre sí, por lo que sus gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$.



Haciendo clic en el siguiente [enlace](#), puedes ver un ejemplo de una escala logarítmica de base 10.

En general, para cualquier base $b > 0$, b distinto de 1, la función $g(x) = \log_b(x)$ es simétrica con respecto a la recta $y = x$ de la función $f(x) = b^x$. Usando este hecho y las gráficas de las funciones exponenciales, representamos $\log_b$ para varios valores de $b > 1$ (Figura 1.47).

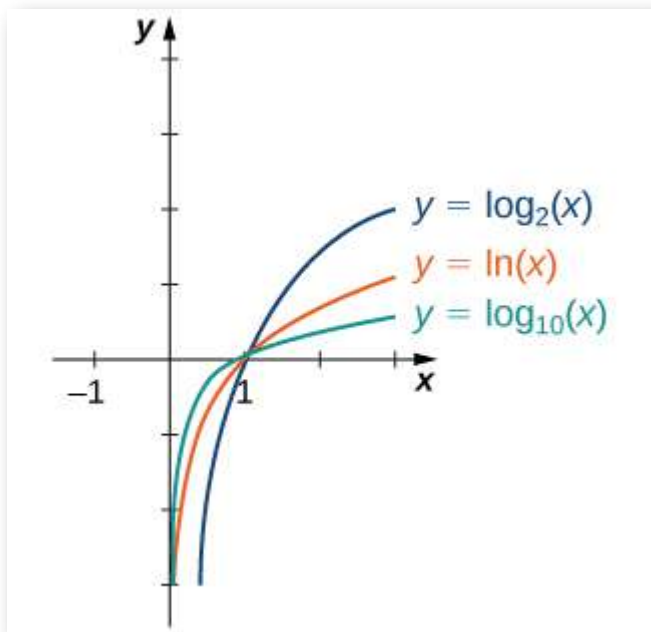


Figura 1.47. Gráficas de $y = \log_b(x)$ para los valores $b = 2$; e ; 10.

Antes de resolver algunas ecuaciones en las que aparecen funciones exponenciales y logarítmicas, repasemos las propiedades básicas de los logaritmos.

REGLA. Propiedades de los logaritmos

Si $a, b, c > 0$, siendo $b \neq 1$, y r es un número real, entonces

- Propiedad del producto: $\log_b(ac) = \log_b(a) + \log_b(c)$
- Propiedad del cociente: $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b(a) - \log_b(c)$
- Propiedad de la potencia: $\log_b(a^r) = r\log_b(a)$



Ejemplo

1.36 Resolver ecuaciones con funciones exponenciales

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones en x :

a. $5^x = 2$

b. $e^x + 6e^{-x} = 5$



Solución



**Pregunta
de control**

Cuestión 1.30

Resuelve $\frac{e^{2x}}{3+e^{2x}} = 1/2$.



Ejemplo

1.37 Resolver ecuaciones con funciones logarítmicas

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones en x .

- a. $\log(1/x) = 4$
- b. $\log_{10} \sqrt{x} + \log_{10} x = 2$
- c. $\ln(2x) - 3\ln(x^2) = 0$

 Solución



Pregunta
de control

Cuestión 1.31

Resolver $\ln(x^3) - 4\ln(x) = 1$.

Al evaluar una función logarítmica con una calculadora, es posible que haya notado que las únicas opciones son $\log_{10}$ o $\log$, llamado **logaritmo decimal**, o $\ln$, que es el **logaritmo natural**. Sin embargo, las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas se pueden expresar en términos de cualquier base deseada b . Si necesitas usar una calculadora para evaluar una expresión con una base diferente, puedes aplicar primero las fórmulas de cambio de base. Usando este cambio de base, normalmente escribimos una función exponencial o logarítmica dada en términos de las funciones exponencial natural y logarítmica natural.

REGLA. Fórmulas de cambio de base

Sea $a > 0$, $b > 0$, y $a \neq 1$, $b \neq 1$

1. $a^x = b^{x \log_b a}$ para cualquier número real x .
Si $b = e$, esta ecuación se reduce a $a^x = e^{x \log_e a} = e^{x \ln a}$.
2. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ para cualquier número real $x > 0$.
Si $b = e$, esta ecuación se reduce a $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Prueba

Propiedad 1. Para la primera fórmula de cambio de base, comenzamos haciendo uso de la propiedad de potencia de las funciones logarítmicas. Sabemos que para cualquier base $b > 0, b \neq 1$, se tiene $\log_b a^x = x \log_b a$. Por lo tanto

$$b^{\log_b(a^x)} = b^{x \log_b a}$$

Además, sabemos que b^x y $\log_b(x)$ son funciones inversas. Por lo tanto,

$$b^{\log_b(a^x)} = a^x$$

Combinando estas dos últimas igualdades, llegamos a la conclusión de que

$$a^x = b^{x \log_b a}$$

Propiedad 2. Mostremos que

$$(\log_b a) \cdot (\log_a x) = \log_b x$$

Consideramos $u = \log_b a$, $v = \log_a x$, $w = \log_b x$. Mostraremos que $u \cdot v = w$.

Por la definición de funciones logarítmicas, sabemos que $b^u = a$, $a^v = x$ y $b^w = x$. De las ecuaciones anteriores, vemos que

$$b^{uv} = (b^u)^v = a^v = x = b^w.$$

Por lo tanto, $b^{uv} = b^w$. Dado que las funciones exponenciales son uno-uno, podemos concluir que $u \cdot v = w$.



Ejemplo

1.38 Cambios de base

Utiliza una herramienta de cálculo y la función logaritmo natural para evaluar $\log_3 7$ mediante la fórmula de cambio de base presentada anteriormente.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 1.32

Utiliza el cambio de base y una herramienta de cálculo para evaluar $\log_4 6$.



Ejemplo

1.39 Apertura del capítulo. La escala de Richter para terremotos



Figura 1.48. (crédito: modificación del trabajo de Robb Hannawacker, NPS).

En 1935, Charles Richter desarrolló una escala (ahora conocida como escala de Richter) para medir la magnitud de un terremoto. Esta escala es una escala logarítmica de base 10, y se puede describir como se indica a continuación.

Consideremos un terremoto con magnitud R_1 en la escala de Richter y un segundo terremoto con magnitud R_2 en la escala de Richter. Supongamos $R_1 > R_2$, lo que significa el terremoto de magnitud R_1 es más fuerte, pero ¿cuánto más fuerte es respecto del otro terremoto?

Una forma de medir la intensidad de un terremoto es usando un sismógrafo para medir la amplitud de las ondas del terremoto. Si A_1 es la amplitud medida para el primer terremoto y A_2 para el segundo, entonces las amplitudes y magnitudes de los dos terremotos satisfacen la siguiente ecuación:

$$R_1 - R_2 = \log_{10} \left(\frac{A_1}{A_2} \right).$$

Consideremos un terremoto que mide 8 en la escala de Richter y un terremoto que mide 7 en la escala de Richter. Luego,

$$8 - 7 = \log_{10} \left(\frac{A_1}{A_2} \right).$$

Por lo tanto,

$$\log_{10} \left(\frac{A_1}{A_2} \right) = 1,$$

lo que implica $\frac{A_1}{A_2} = 10$ o $A_1 = 10A_2$. Ya que A_1 es 10 veces el tamaño de A_2 , decimos que el primer terremoto es 10 veces más intenso que el segundo.

Por otro lado, si un terremoto mide 8 en la escala de Richter y otro mide 6, entonces la intensidad relativa de los dos terremotos satisface la ecuación

$$\log_{10} \left(\frac{A_1}{A_2} \right) = 8 - 6 = 2$$

Por lo tanto, $A_1 = 100A_2$. Es decir, el primer terremoto es 100 veces más intenso que el segundo.

¿Cómo podemos usar funciones logarítmicas para comparar la severidad relativa del terremoto de magnitud 9 en Japón en 2011 con el terremoto de magnitud 7.3 en Haití en 2010?



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 1.33

Compare la severidad relativa de una magnitud de un terremoto de 8.4 y otro de intensidad 7.4.

1.6.4 Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se definen en términos de ciertas combinaciones de e^x y e^{-x} . Estas funciones surgen de forma natural en diversas aplicaciones de la ingeniería y la física, incluido el estudio de las ondas del agua y las vibraciones de las membranas elásticas. Otro uso común de una función hiperbólica es la representación de una cadena o cable colgante, también conocido como catenaria ([Figura 1.49](#)). Si introducimos un sistema de coordenadas de modo que el punto bajo de la cadena se encuentra a lo largo del eje Y , podemos describir la altura de la cadena en términos de una función hiperbólica. Empecemos entonces por definir estas funciones.

DEFINICIÓN

- **Coseno hiperbólico:** $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- **Seno hiperbólico:** $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- **Tangente hiperbólica:** $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

DEFINICIÓN

- Cosecante hiperbólica $cschx = \frac{1}{senhx} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$
- Secante hiperbólico $sechx = \frac{1}{coshx} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$
- Cotangente hiperbólica $cothx = \frac{coshx}{senhx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$



Figura 1.49. La forma de una hebra de seda en una telaraña se puede describir en términos de una función hiperbólica. La misma forma se aplica a una cadena o cable que cuelga de dos soportes con solo su propio peso. (crédito: "Mtpaley", Wikimedia Commons).

Usando la definición de $cosh(x)$ y principios de la física, se puede demostrar que la altura de una cadena colgante, como la de Figura 1.49, puede ser descrito por la función $h(x) = acosh(x/a) + c$ para ciertas constantes a y c .

Pero, ¿por qué estas funciones se denominan **funciones hiperbólicas**? Para responder a esta pregunta, consideremos la expresión $\cosh^2 t - \sinh^2 t$. Usando la definición de $\cosh$ y $\sinh$, se tiene

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1.$$

Esta identidad es análoga a la identidad trigonométrica

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Aquí, dado un valor t , el punto $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$ se encuentra en la hipérbola unidad

$$x^2 - y^2 = 1$$

([Figura 1.50](#)).

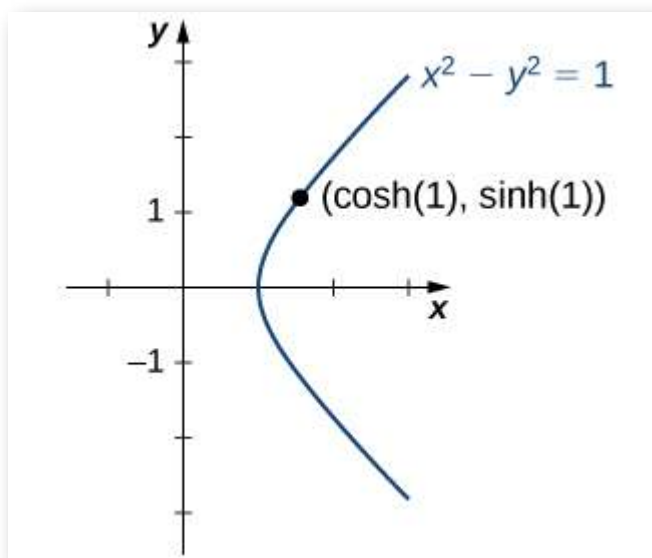
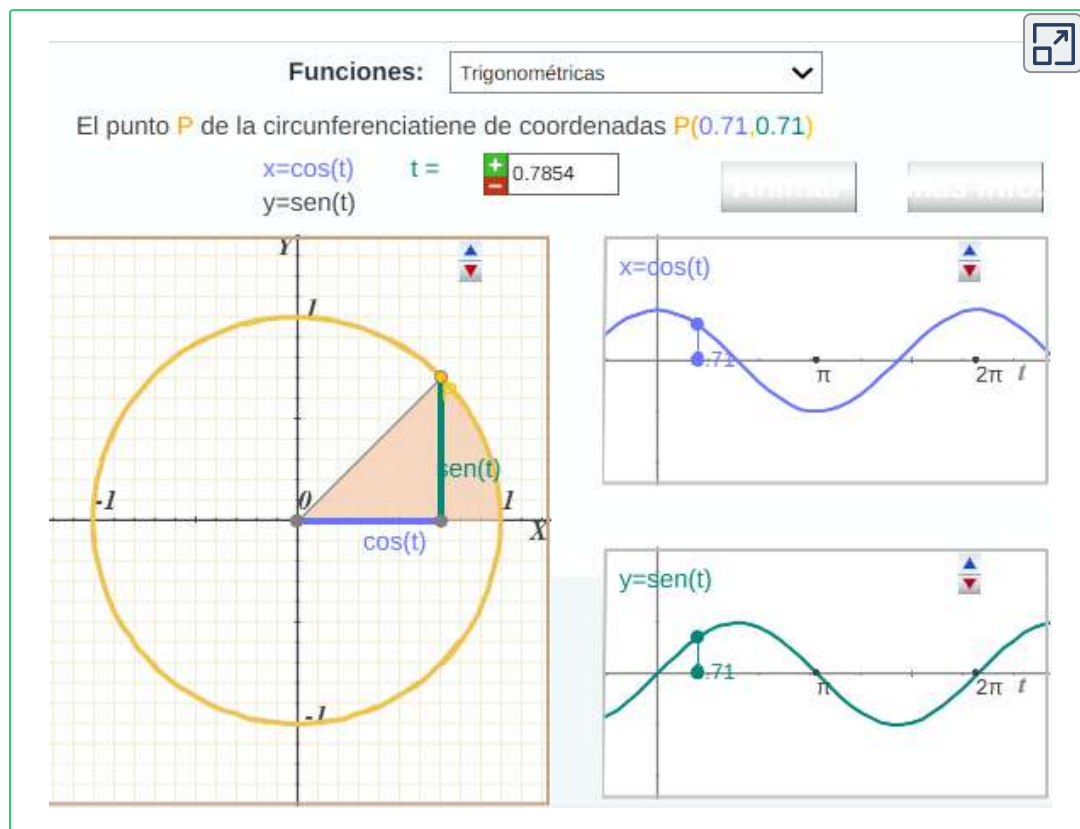


Figura 1.50. La hipérbola unitaria $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$.



En la siguiente escena del [Proyecto Descartes](#) se puede comprobar la relación entre las funciones trigonométricas y la circunferencia unidad y las funciones hiperbólicas y la hipérbola unitaria.



Gráficos de funciones hiperbólicas

Para representar la gráfica de $\cosh x$ y $\sinh x$, hacemos uso del hecho de que ambas funciones se acercan $(1/2)e^{-x}$ cuando $x \rightarrow \infty$, ya que $e^{-x} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, $\cosh x$ se aproxima a $1/2e^{-x}$, mientras que $\sinh(x)$ se aproxima a $-1/2e^{-x}$. Por lo tanto, usando las gráficas de $1/2e^x$, $1/2e^{-x}$, y $-1/2e^{-x}$ como guías, podremos representar $\cosh x$ y $\sinh(x)$. Para representar $\tanh x$, usamos el hecho de que $\tanh(0) = 0$, $-1 < \tanh(x) < 1$ para todos los valores x , $\tanh x \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$, y $\tanh x \rightarrow -1$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

Las gráficas de las otras tres funciones hiperbólicas se pueden bosquejar usando las gráficas de $\cosh$, $\sinh x$, y $\tanh x$ ([Figura 1.51](#)).

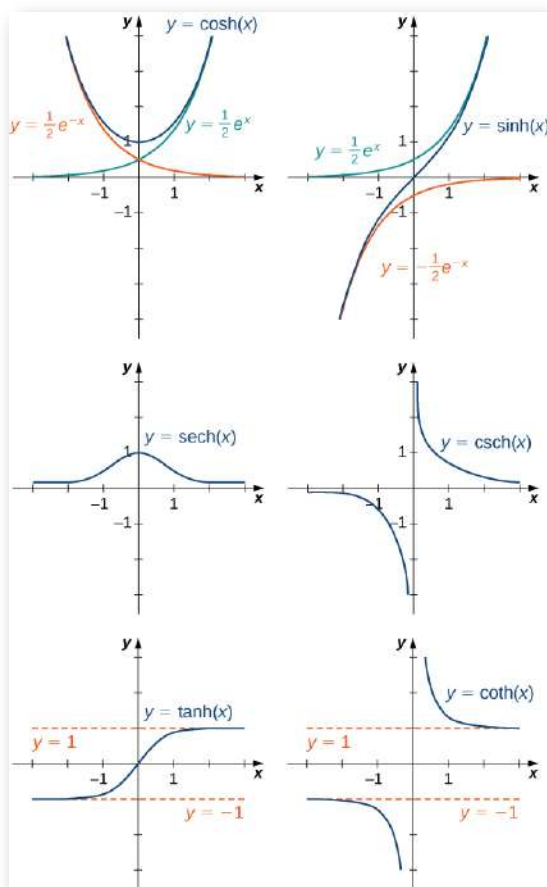


Figura 1.51. Las funciones hiperbólicas implican combinaciones de e^x y e^{-x} .

Identidades que incluyen funciones hiperbólicas

La identidad $\cosh^2 t - \sinh^2 t$, se muestra en la [Figura 1.50](#), es una de varias identidades relativas a las funciones hiperbólicas, algunas de las cuales se enumeran a continuación.

Las primeras cuatro propiedades se derivan fácilmente de las definiciones de seno hiperbólico y coseno hiperbólico. Excepto por algunas diferencias en los signos, la mayoría de estas propiedades son análogas a las identidades de las funciones trigonométricas.

REGLA. Identidades de las funciones hiperbólicas

- $\cosh(-x) = \cosh x$
- $\sinh(-x) = -\sinh x$
- $\cosh x + \sinh(x) = e^x$
- $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
- $\coth^2(x) - 1 = \operatorname{csch}^2 x$
- $\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh(y)$
- $\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh(y)$



Ejemplo

1.40 Evaluación de funciones hiperbólicas

- Simplifica $\sinh(5 \cdot \ln x)$.
- Si $\sinh(x) = 3/4$, encuentra los valores de las cinco funciones hiperbólicas restantes



Solución



Pregunta de control

1.34 Evaluación de funciones hiperbólicas

Simplifica $\cosh(2 \cdot \ln x)$.

Funciones hiperbólicas inversas

De las gráficas de las funciones hiperbólicas, vemos que todas ellas son uno-uno excepto $\cosh(x)$ y $\sech(x)$. Si restringimos los dominios de estas dos funciones al intervalo $[0, \infty)$, entonces todas las funciones hiperbólicas son uno-uno, y podemos definir las funciones hiperbólicas inversas. Dado que las funciones hiperbólicas en sí mismas se definen a partir de las funciones exponenciales, las funciones hiperbólicas inversas se definirán mediante funciones logarítmicas.

DEFINICIÓN Funciones hiperbólicas inversas

- $\operatorname{senh}^{-1} x = \operatorname{arcsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\operatorname{cosh}^{-1}(x) = \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- $\operatorname{tanh}^{-1}(x) = \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
- $\operatorname{coth}^{-1}(x) = \operatorname{arccot}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
- $\operatorname{sech}^{-1}(x) = \operatorname{arcsech}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$
- $\operatorname{csch}^{-1}(x) = \operatorname{arccsch}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$

Veamos cómo deducir la primera ecuación. Los demás se demostrarían de forma similar. Supongamos $y = \operatorname{senh}^{-1} x$. Luego, $x = \operatorname{senh}(y)$ y, por la definición de la función del seno hiperbólico, $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$. Por lo tanto,

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0.$$

Multiplicando esta ecuación por e^y , obtenemos

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Esto se puede resolver como una ecuación cuadrática, con la solución

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Ya que $e^y > 0$, la única solución es la que tiene el signo positivo. Aplicando el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación, llegamos a la conclusión de que

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$



Ejemplo

1.41 Evaluación de funciones hiperbólicas inversas

Evalúa cada una de las siguientes expresiones: $\sinh^{-1}(2)$, $\tanh^{-1}(1/4)$



Solución



1.6.5 Ejercicios



Para los siguientes ejercicios, evalúa las funciones exponenciales dadas como se indica, con una precisión de dos dígitos significativos después del decimal.

229. $f(x) = 5^x$, a. $x = 3$, b. $x = \frac{1}{2}$, c. $x = \sqrt{2}$ ([Solución](#))

230. $f(x) = (0.3)^x$, a. $x = -1$, b. $x = 4$, c. $x = -1.5$

231. $f(x) = 10^x$, a. $x = -2$, b. $x = 4$, c. $x = \frac{5}{3}$ (Solución)

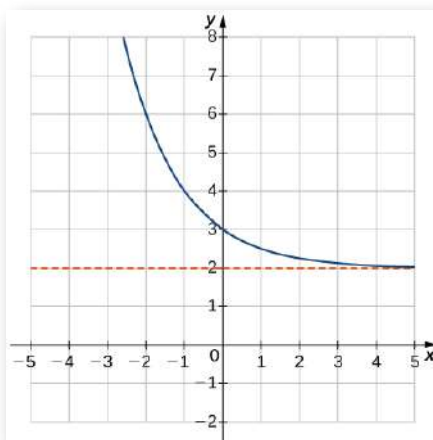
232. $f(x) = e^x$, a. $x = 2$, b. $x = -3.2$, c. $x = \pi$



Une la función exponencial con el gráfico correcto.

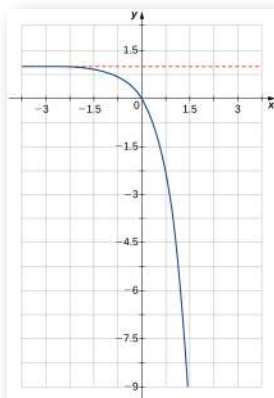
- $y = 4^{-x}$
- $y = 2^{x-1}$
- $y = 2^{x+1}$
- $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$
- $y = -3^{-x}$
- $y = 1 - 5^x$

233.

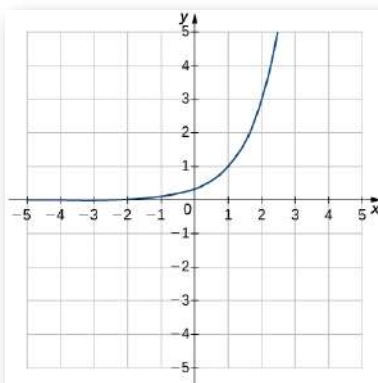


(Solución)

234.

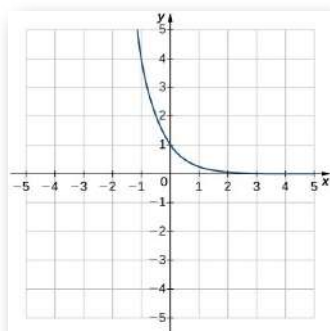


235.

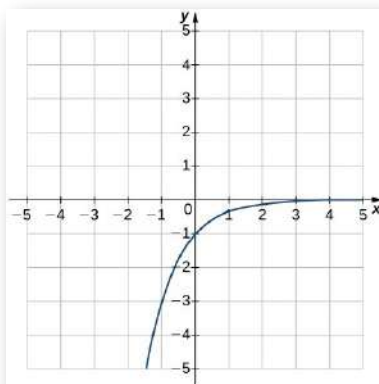


(Solución)

236.

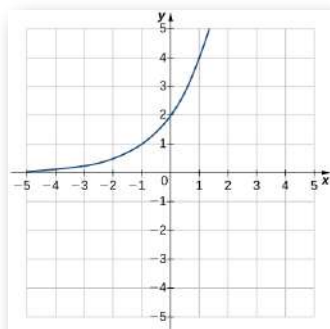


237.



([Solución](#))

238.



Para los siguientes ejercicios, dibuja la gráfica de la función exponencial. Determina el dominio, el rango y la asíntota horizontal.

239. $f(x) = e^x + 2$ ([Solución](#))

240. $f(x) = -2^x$

241. $f(x) = 3^{x+1}$ ([Solución](#))

242. $f(x) = 4^x - 1$

243. $f(x) = 1 - 2^{-x}$ (Solución)

244. $f(x) = 5^{x+1} + 2$

245. $f(x) = e^{-x} - 1$ (Solución)



Para los siguientes ejercicios, escribe la ecuación en forma exponencial equivalente.

246. $\log_3 81 = 4$

247. $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ (Solución)

248. $\log_5 1 = 0$

249. $\log_5 25 = 2$ (Solución)

250. $\log 0.1 = -1$

251. $\ln \left(\frac{1}{e^3} \right) = -3$ (Solución)

252. $\log_9 3 = 0.5$

253. $\ln 1 = 0$ (Solución)



Para los siguientes ejercicios, escribe la ecuación en forma logarítmica equivalente.

254. $2^3 = 8$

255. $4^{-2} = \frac{1}{16}$ (Solución)

256. $10^2 = 100$

257. $9^0 = 1$ ([Solución](#))

258. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

259. $\sqrt[3]{64} = 4$ ([Solución](#))

260. $e^x = y$

261. $9^y = 150$ ([Solución](#))

262. $b^3 = 45$

263. $4^{-3/2} = 0.12$



Para los siguientes ejercicios, dibuje la gráfica de la función logarítmica. Determine el dominio, el rango y la asíntota vertical.

264. $f(x) = 3 + \ln x$

265. $f(x) = \ln(x - 1)$ ([Solución](#))

266. $f(x) = \ln(-x)$

267. $f(x) = 1 - \ln(x)$ ([Solución](#))

268. $f(x) = \log x - 1$

269. $f(x) = \ln(x + 1)$ ([Solución](#))



Para los siguientes ejercicios, usa las propiedades de los logaritmos para escribir las expresiones como suma, diferencia y/o producto de logaritmos.

270. $f(x) = \log x^4 y$

271. $f(x) = \log_3 \frac{9a^3}{b}$ ([Solución](#))

272. $f(x) = \ln a \sqrt[3]{b}$

273. $f(x) = \ln_5 \sqrt{12xy^3}$ ([Solución](#))

274. $f(x) = \ln_4 \frac{\sqrt[3]{xy}}{64}$

275. $f(x) = \ln \left(\frac{6}{\sqrt{e^3}} \right)$ ([Solución](#))



Para los siguientes ejercicios, resuelve exactamente la ecuación exponencial.

276. $5^x = 125$

277. $e^{3x} - 1 = 0$ ([Solución](#))

278. $8^x = 4$

279. $4^{x+1} - 21 = 0$ ([Solución](#))

280. $3^{x/14} = \frac{1}{10}$

281. $10^x = 7.21$ ([Solución](#))

282. $4 \cdot 2^{3x} - 20 = 0$

283. $7^{3x-2} = 11$ ([Solución](#))



Para los siguientes ejercicios, resuelve, si es posible, la ecuación logarítmica exactamente.

284. $\log_3 x = 0$

285. $\log_5 x = -2$ ([Solución](#))

286. $\log_4(x + 5) = 0$

287. $\log(2x - 7) = 0$ ([Solución](#))

288. $\log\sqrt{x + 3} = 2$

289. $\log_6(x + 9) + \log_6(x) = 2$ ([Solución](#))

290. $\log_4(x + 2) - \log_6(x - 1) = 0$

291. $\ln x + \ln(x - 2) = \ln 4$ ([Solución](#))



Para los siguientes ejercicios, usa la fórmula de cambio de base y base 10 o base e para evaluar las expresiones dadas. Responde en forma exacta y aproximada, redondeando a cuatro cifras decimales.

292. $\log_5 47$

293. $\log_7 82$ ([Solución](#))

294. $\log_6 103$

295. $\log_{0.5} 211$ ([Solución](#))

296. $\log_2 \pi$

297. $\log_{0.2} 0.452$ ([Solución](#))

298. Reescribe las siguientes expresiones en términos de exponenciales y simplifica.

- $2\cosh(\ln x)$
- $\cosh(4x) + \sinh(4x)$
- $\cosh(2x) - \sinh(2x)$
- $\ln(\cosh(x) + \sinh(x)) + \ln(\cosh(x) - \sinh(8x))$

299. [T] El número de bacterias N en un cultivo después de t días puede modelarse mediante la función $N(t) = 1300 \cdot (2)^{t/4}$. Encuentra la cantidad de bacterias presentes después de 15 días. ([Solución](#))

300. [T] La demanda D (en millones de barriles) de petróleo en un país rico en petróleo está dada por la función $D(p) = 150 \cdot (2.7)^{-0.25p}$, donde p es el precio (en dólares) de un barril de petróleo. Encuentra la cantidad de petróleo demandada (al millón de barriles más cercano) cuando el precio está entre 15 y 20 dólares.

301. [T] La cantidad A de una inversión de 100.000 dólares que se paga de forma continua y compuesta durante t años está dada por $A(t) = 100.000e^{0.055t}$. Encuentra la cantidad A acumulada en 5 años. ([Solución](#))

302. [T] Una inversión se capitaliza mensualmente, trimestralmente o anualmente y viene dada por la función $A = P \left(1 + \frac{j}{n}\right)^{nt}$, donde A

es el valor de la inversión en el momento t , P es el principio inicial que se invirtió, j es la tasa de interés anual, y n es la cantidad de veces que se capitaliza el interés por año. Dada una tasa de interés anual del 3.5% y un principio inicial de 100,000 dólares, encuentra la cantidad A acumulados en 5 años por intereses compuestos

- diario
- mensual
- trimestral
- anual

303. [T] La concentración de iones de hidrógeno en una sustancia se denota por $[H^+]$, medido en moles por litro. El pH de una sustancia está definido por la función logarítmica $pH = -\log[H^+]$. Esta función se utiliza para medir la acidez de una sustancia. El pH del agua es 7. Una sustancia con un pH inferior a 7 es un ácido, mientras que una que tiene un pH superior a 7 es una base.

- Encuentra el pH de las siguientes sustancias. Redondea las respuestas a un dígito.
- Determina si la sustancia es un ácido o una base.
 1. Huevos: $[H^+] = 1.6 \times 10^{-8}$ mol/L
 2. Cerveza: $[H^+] = 3.16 \times 10^{-3}$ mol/L
 3. Jugo de tomate: $[H^+] = 7.94 \times 10^{-5}$ mol/L

(Solución)

304. [T] El yodo-131 es una sustancia radiactiva que se desintegra según la función $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-0.08664t}$, donde Q_0 es la cantidad inicial de una muestra de la sustancia y t está en días. Determina

cuánto tiempo tarda (al día más cercano) para que el 95% de una cantidad decaiga.

305. [T] Según el Banco Mundial, a finales de 2013 ($t=0$) la población de Estados Unidos era de 316 millones y estaba aumentando de acuerdo con el siguiente modelo: $P(t) = 316e^{0.0074t}$, donde P se mide en millones de personas y t se mide en años posteriores a 2013.

- Según este modelo, ¿cuál será la población de Estados Unidos en 2020?
- Determine cuándo la población de EE. UU. Será el doble de la de 2013.

(Solución)

306. [T] La cantidad A acumulada después de 1000 dólares se invierte durante t años a una tasa de interés del 4% está modelada por la función $A(t) = 1000(1.04)^t$.

- Encuentra la cantidad acumulada después de 5 años y 10 años.
- Determina cuánto tiempo tarda en triplicarse la inversión original.

307. [T] Se sabe que una colonia de bacterias cultivada en un laboratorio se duplica en 12 horas. Supongamos, inicialmente, que hay 1000 bacterias presentes.

- Usa la función exponencial $Q = Q_0 e^{kt}$ para determinar el valor k , que es la tasa de crecimiento de las bacterias. Redondea a cuatro decimales.
- Determina aproximadamente cuánto tardan en crecer 200,000 bacterias.

(Solución)

308. [T] La población de conejos en una reserva de caza se duplica cada 6 meses. Supongamos que inicialmente había 120 conejos.

- Usa la función exponencial $P = P_0 a^t$ para determinar la constante de tasa de crecimiento a . Redondea a cuatro decimales.
- Utiliza la función del inciso a) para determinar aproximadamente cuánto tiempo tarda la población de conejos en llegar a 3500.

309. [T] El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud de 8.3 en la escala de Richter. Al mismo tiempo, en Japón, un terremoto de magnitud 4.9 causó solo daños menores. Aproximadamente, ¿cuánta más energía fue liberada por el terremoto de San Francisco que por el terremoto de Japón?

(Solución)

Capítulo II

Límites

2.1 Introducción

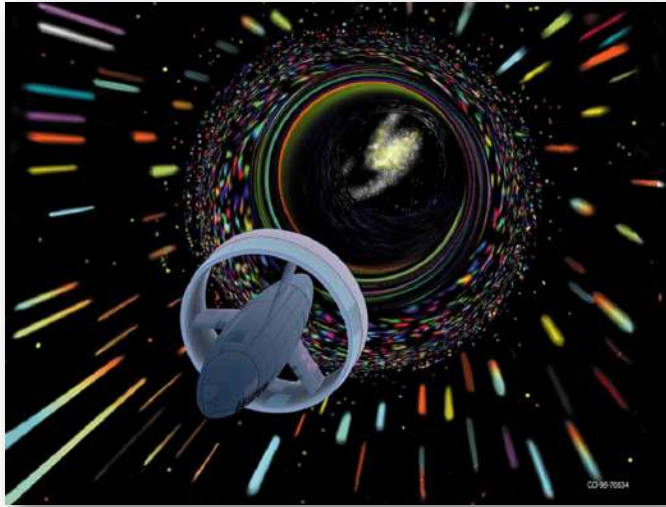


Figura 2.1 La visión de la exploración humana por parte de la Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio (NASA) a partes distantes del universo ilustra la idea de los viajes espaciales a altas velocidades. Pero, ¿hay un límite en la velocidad a la que puede ir una nave espacial? (crédito: NASA)

Los escritores de ciencia ficción a menudo imaginan naves espaciales que pueden viajar a planetas lejanos en galaxias distantes. Sin embargo, en 1905, Albert Einstein demostró que existe un límite de la rapidez con la que puede viajar cualquier objeto. El problema es que cuanto más rápido se mueve un objeto, más masa alcanza (en forma de energía), según la ecuación

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

donde m_o es la masa del objeto en reposo, v es su velocidad y c es la velocidad de la luz. ¿Cuál es este límite de velocidad? (Exploraremos más este problema en el ejemplo 2.12.)

La idea de un límite es fundamental para todo el cálculo. Comenzamos este capítulo examinando por qué los límites son tan importantes. Luego, continuamos describiendo cómo encontrar el límite de una función en un punto dado. No todas las funciones tienen límites en todos los puntos, discutiremos qué significa y cómo podemos saber si una función tiene o no un límite en un valor particular. Este capítulo se introduce de manera informal e intuitiva, aunque no siempre será suficiente este planteamiento si necesitamos probar un enunciado matemático que implica límites. La última sección de este capítulo presenta la definición más precisa de límite y muestra cómo probar si una función tiene límite.

2.2 Introducción al cálculo

Objetivos de aprendizaje

1. Describir el problema de la tangente y cómo condujo a la idea de una derivada.
2. Explicar cómo interviene la idea de un límite en la resolución del problema de la tangente.
3. Reconocer una tangente a una curva en un punto como el límite de las rectas secantes.
4. Identificar la velocidad instantánea como el límite de la velocidad promedio en un intervalo de tiempo pequeño.
5. Describir el problema del área y cómo se resolvió mediante la integral.
6. Explicar cómo la idea de límite está involucrada en la resolución del problema de área.
7. Reconocer cómo las ideas de límite, derivada e integral llevaron a los estudios de series infinitas y cálculo multivariable.

A medida que nos embarquemos en nuestro estudio del cálculo, veremos cómo su desarrollo surgió a partir de soluciones comunes a problemas prácticos en áreas de ingeniería física, como el problema de los viajes espaciales planteado en el primer capítulo. Dos problemas clave llevaron a la formulación inicial del cálculo:

1. el problema de la tangente, o cómo determinar la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto; y
2. el problema del área, o cómo determinar el área bajo una curva.

2.2.1 El problema de la tangente y el cálculo diferencial

La tasa de cambio es uno de los conceptos más críticos en cálculo. Comenzamos nuestra investigación de las tasas de cambio observando las gráficas de tres rectas: $f(x) = -2x - 3$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$, y $h(x) = 2$, se muestra en la [Figura 2.2](#).

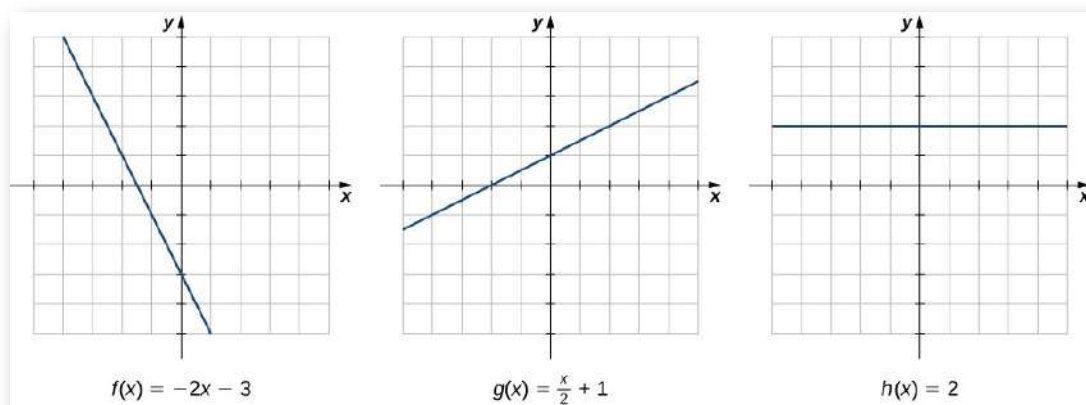


Figura 2.2 La tasa de cambio de una función lineal es constante en cada uno de estos tres gráficos, con la constante determinada por la pendiente.

A medida que nos movemos de izquierda a derecha a lo largo de la gráfica de $f(x) = -2x - 3$, vemos que la gráfica disminuye a una tasa constante. Por cada 1 unidad que nos movemos hacia la derecha a lo largo del eje x , la coordenada y disminuye en 2 unidades. Esta tasa de cambio está determinada por la pendiente de la recta: -2 . De manera similar, la pendiente de $1/2$ en la función $g(x)$ nos dice que por cada cambio en x de 1 unidad hay un cambio correspondiente en y de $1/2$ unidad. La función $h(x) = 2$ tiene una pendiente de cero, lo que indica que los valores de la función permanecen constantes. Vemos que la pendiente de cada función lineal indica la **tasa de cambio** de la función.

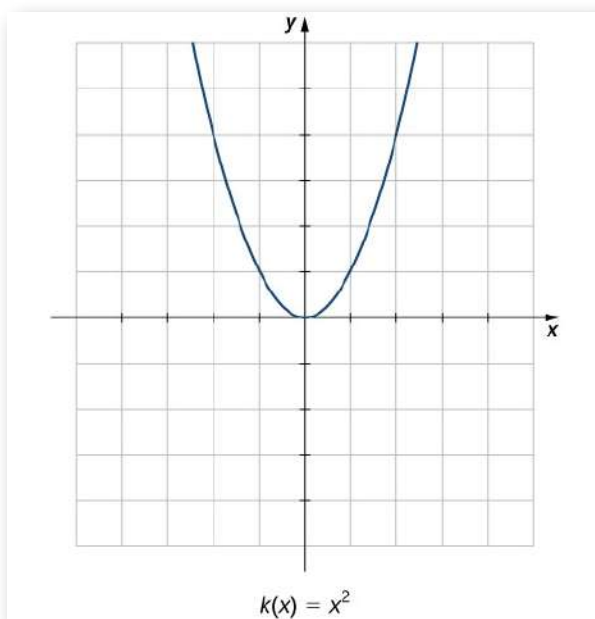


Figura 2.3 La función $k(x) = x^2$ no tiene una tasa de cambio constante.

Compara las gráficas de estas tres funciones con la gráfica de $k(x) = x^2$ ([Figura 2.3](#)).

La gráfica de $k(x) = x^2$ comienza desde la izquierda disminuyendo rápidamente, luego comienza a disminuir más lentamente y se nivela, y finalmente comienza a aumentar, lentamente al principio, seguido de una tasa de aumento creciente a medida que se mueve hacia la derecha. A diferencia de una función lineal, ningún número representa la tasa de cambio de esta función. Naturalmente, preguntamos: ¿Cómo medimos la tasa de cambio de una función no lineal?

Podemos aproximar la tasa de cambio de una función $f(x)$ en un punto $(a, f(a))$ de su gráfica tomando otro punto $(x, f(x))$ en la gráfica de $f(x)$, trazando una recta a través de los dos puntos y calculando la pendiente de esta recta que se llama **recta secante**. La [Figura 2.4](#) muestra una recta secante a una función $f(x)$ en un punto $(a, f(a))$.

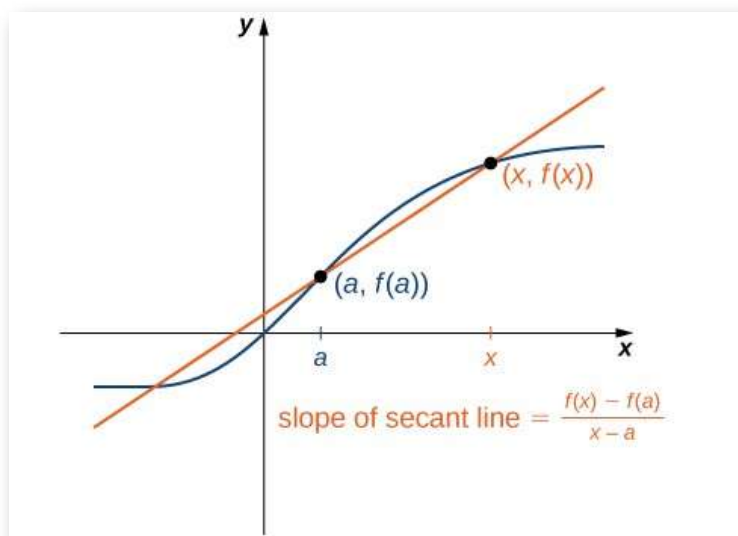


Figura 2.4 La pendiente de una recta secante que pasa por un punto $(a, f(a))$ estima la tasa de cambio de la función en el punto $(a, f(a))$.

Definimos formalmente a continuación una recta secante.

DEFINICIÓN

La **secante** de la función $f(x)$ a través de los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$ es la recta que pasa por estos puntos. Su pendiente está dada por

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2.1)$$

La precisión de aproximar la tasa de cambio de la función con una recta secante depende de qué tan cerca esté x de a . Como vemos en la [Figura 2.5](#), si x está más cerca de a , la pendiente de la recta secante es una mejor medida de la tasa de cambio de $f(x)$ en a .

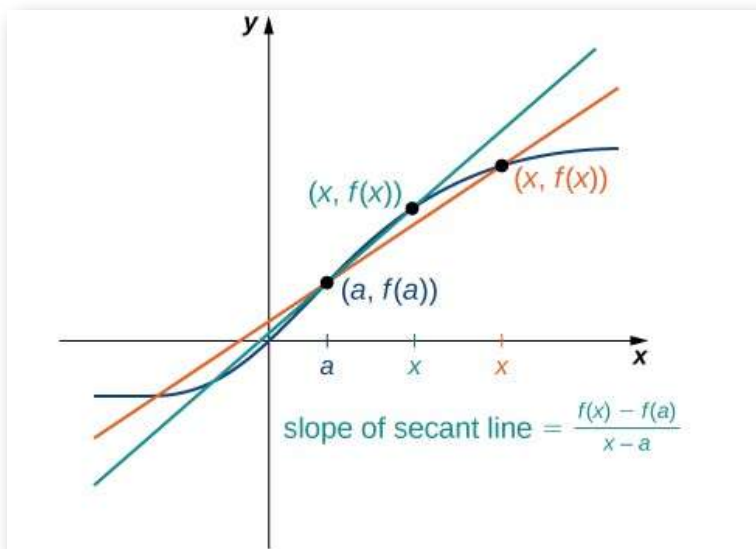


Figura 2.5 A medida que x se acerca a a , la pendiente de la recta secante se vuelve una mejor aproximación a la tasa de cambio de la función $f(x)$ en a .

Las propias rectas secantes se acercan a una recta que se llama **tangente** a la función $f(x)$ como se muestra en la [Figura 2.6](#)). La pendiente de la recta tangente a la gráfica en a mide la tasa de cambio de la función en dicho punto. Este valor también representa la **derivada de la función $f(x)$ en a** , o la **tasa de cambio** de la función en este punto. Esta derivada se denota por $f'(a)$.

El cálculo diferencial es el campo del cálculo que se ocupa del estudio de las derivadas y sus aplicaciones.

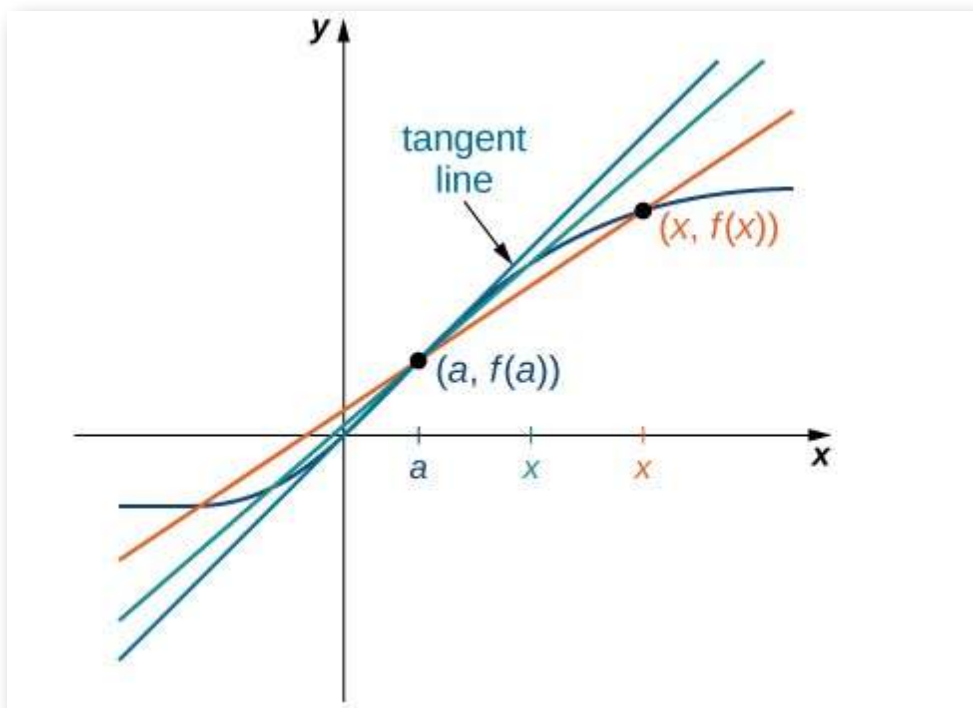
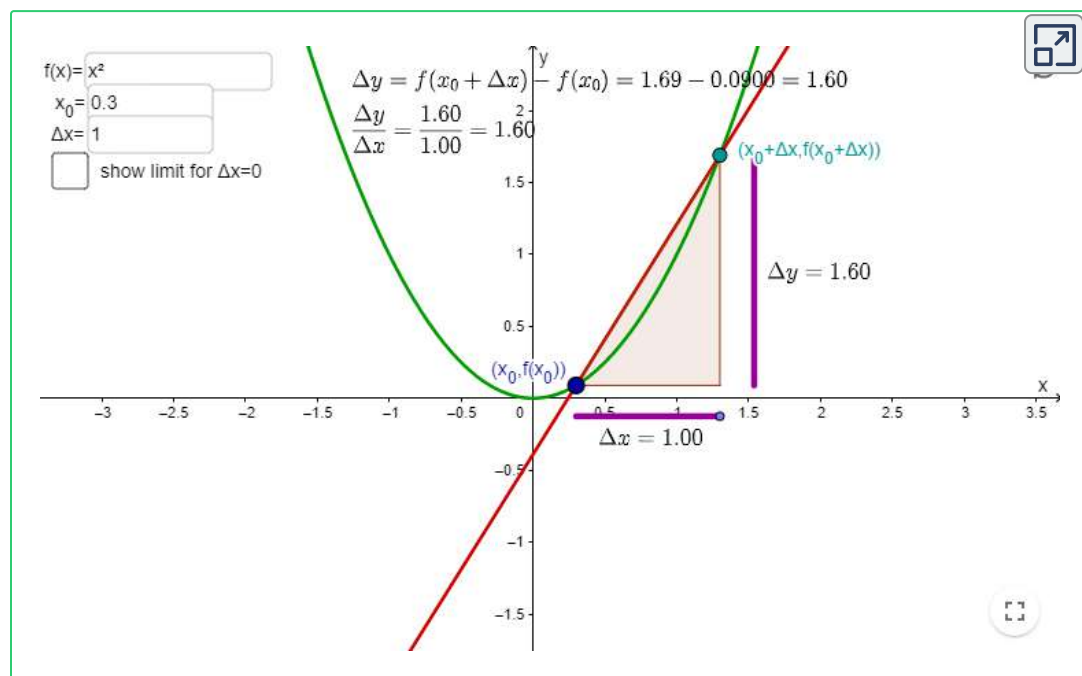


Figura 2.6 Resolución del problema de la tangente: a medida que x se acerca a a , las líneas secantes se acercan a la tangente.



Para obtener una demostración interactiva de la pendiente de una línea secante que puede manipular usted mismo, visite este applet

Enlace: https://mathinsight.org/applet/secant_line_slope.



Ejemplo

2.1 Encontrar pendientes de rectas secantes

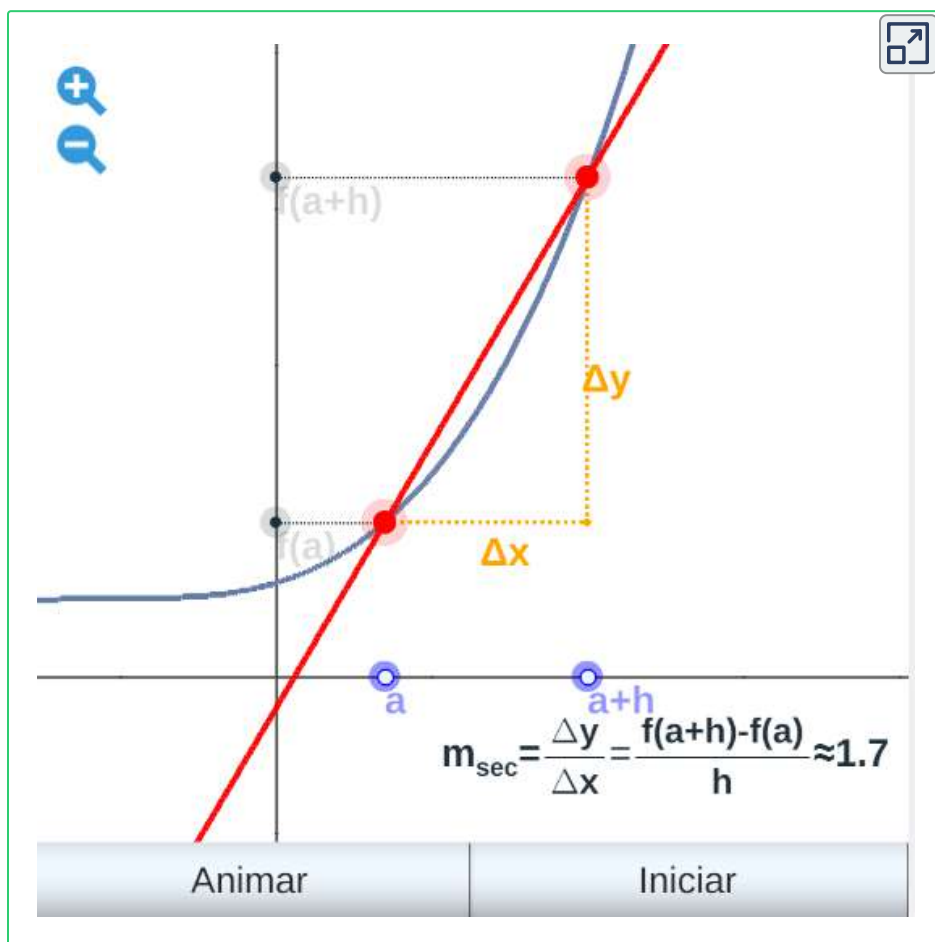
Estima la pendiente de la recta tangente (tasa de cambio) a $f(x) = x^2$ en $x = 1$ encontrando pendientes de las rectas secantes a través de $(1, 1)$ y cada uno de los siguientes puntos en la gráfica de $f(x) = x^2$.

- a. $(2, 4)$
- b. $(32, 94)$

 Solución



En la siguiente escena interactiva puedes observar cómo cuando h tiende a cero la recta secante se convierte en recta tangente.





Pregunta de control

Cuestión 2.1

Estima la pendiente de la recta tangente (tasa de cambio) a $f(x) = x^2$ en $x = 1$ encontrando pendientes de rectas secantes a través de $(1, 1)$ y el punto $(54, 2516)$ en la gráfica de $f(x) = x^2$.

Continuamos nuestra investigación explorando una pregunta relacionada. Teniendo en cuenta que la velocidad puede considerarse como la tasa de cambio de la posición, suponga que tenemos una función, $s(t)$, que da la posición de un objeto a lo largo de un eje de coordenadas en un momento dado t . ¿Podemos usar estas mismas ideas para crear una definición razonable de la velocidad instantánea en un tiempo dado $t = a$?

Comenzamos aproximando la velocidad instantánea con una velocidad promedio. Primero, recuerde que la rapidez de un objeto que viaja a una tasa constante es la razón entre la distancia recorrida y el tiempo que ha viajado. Definimos la velocidad promedio de un objeto durante un período de tiempo como el cambio en su posición dividido por la duración del período de tiempo.

DEFINICIÓN

Sea $s(t)$ la posición de un objeto que se mueve a lo largo de un eje de coordenadas en el tiempo t . La **velocidad promedio** del objeto durante un intervalo de tiempo $[a, t]$ donde $a < t$ (o $[t, a]$ si $t < a$) es

$$v_{med} = \frac{s(t) - s(a)}{t - a} \quad (2.2)$$

A medida que t se elige más cerca de a , la velocidad promedio se acerca a la velocidad instantánea. Tenga en cuenta que encontrar la velocidad promedio de una función de posición durante un intervalo de tiempo es esencialmente lo mismo que encontrar la pendiente de una recta secante a una función.

Además, para encontrar la pendiente de una recta tangente en un punto a , dejamos que los valores de x se acerquen a a en la pendiente de la recta secante. De manera similar, para encontrar la velocidad instantánea en el tiempo a , dejamos que los valores t se acerquen a a en la velocidad promedio. Este proceso de permitir que x o t se acerquen a a en una expresión se llama **calcular un límite**. Por tanto, podemos definir la velocidad instantánea como sigue.

DEFINICIÓN

Para una función de posición $s(t)$, la **velocidad instantánea** en un tiempo $t = a$ es el valor al que se acercan las velocidades promedio en intervalos de la forma $[a, t]$ y $[t, a]$ a medida que los valores de t se acercan a a , siempre que exista tal valor.

El ejemplo 2.2 ilustra este concepto de límites y velocidad media.



Ejemplo

2.2 Encontrar la velocidad media

Se deja caer una roca desde una altura de 64 pies. Se determina que su altura (en pies) sobre el suelo t segundos después (para $0 \leq t \leq 2$) viene dado por $s(t) = -16t^2 + 64$. Encuentra la velocidad promedio de la roca en cada uno de los intervalos de tiempo dados. Usa esta información para adivinar la velocidad instantánea de la roca en el tiempo $t = 0.5$.

- a. $[0.49, 0.5]$
- b. $[0.5, 0.51]$



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.2

Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas de modo que su posición en el tiempo t está dada por $s(t) = t^3$. Estima su velocidad instantánea en el tiempo $t = 2$ calculando su velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[2, 2.001]$.

2.2.2 El problema del área y el cálculo integral

Ahora dirigimos nuestra atención a una pregunta clásica del cálculo. Muchas cantidades en física, por ejemplo, cantidades de trabajo, pueden interpretarse como el área bajo una curva. Esto nos lleva a plantearnos la pregunta: ¿Cómo podemos encontrar el área entre la gráfica de una función y el eje x en un intervalo ([Figura 2.8](#))?

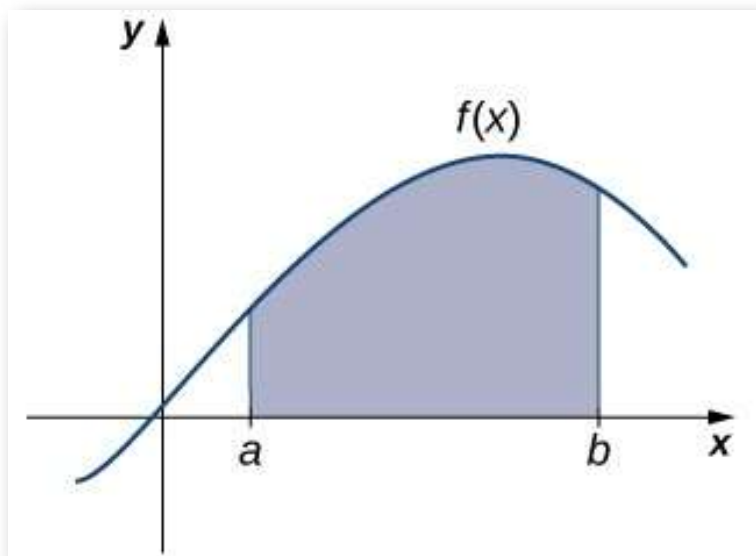


Figura 2.8 El problema del área: ¿Cómo encontramos el área de la región sombreada?.

Como en la respuesta a nuestras preguntas anteriores sobre la velocidad, primero intentaremos aproximar la solución. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en intervalos más pequeños que permitirán definir rectángulos aproximantes. La aproximación del área proviene de sumar las áreas de estos rectángulos ([Figura 2.9](#)).

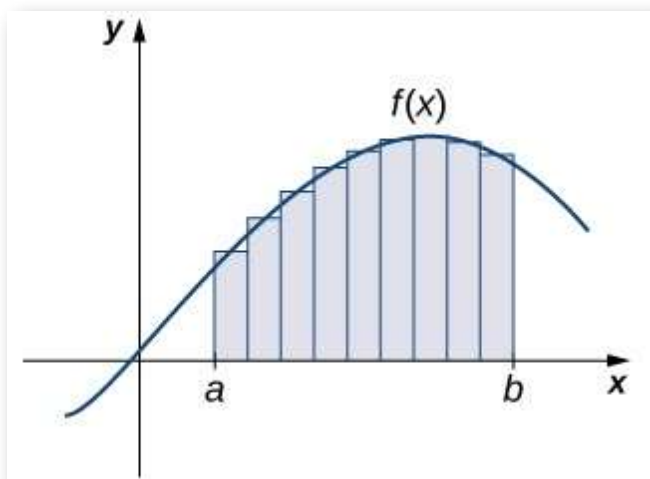


Figura 2.9 El área de la región debajo de la curva se aproxima sumando las áreas de rectángulos delgados.

A medida que los anchos de los rectángulos se vuelven más pequeños (se acercan a cero), las sumas de las áreas de los rectángulos se acercan al área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x sobre el intervalo $[a, b]$.

Una vez más, nos encontramos con un límite. Los límites de este tipo sirven como base para la definición de la integral definida. El cálculo integral es el estudio de integrales y sus aplicaciones.



Ejemplo

2.3 Estimación mediante rectángulos

Estima el área entre el eje x y la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[0, 3]$ utilizando los tres rectángulos que se muestran en la [Figura 2.10](#).



Solución

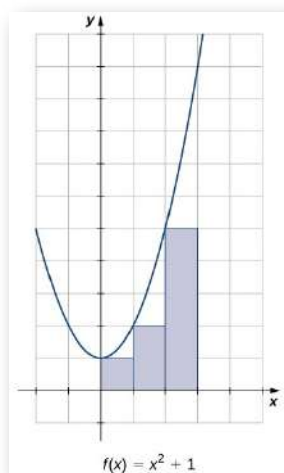


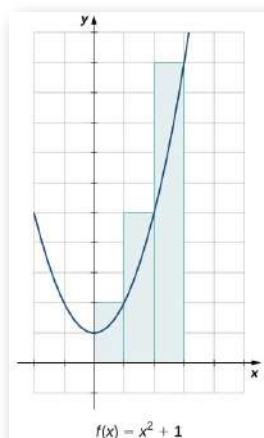
Figura 2.10 El área de la región bajo la curva de $f(x) = x^2 + 1$ se puede estimar usando rectángulos.



Pregunta
de control

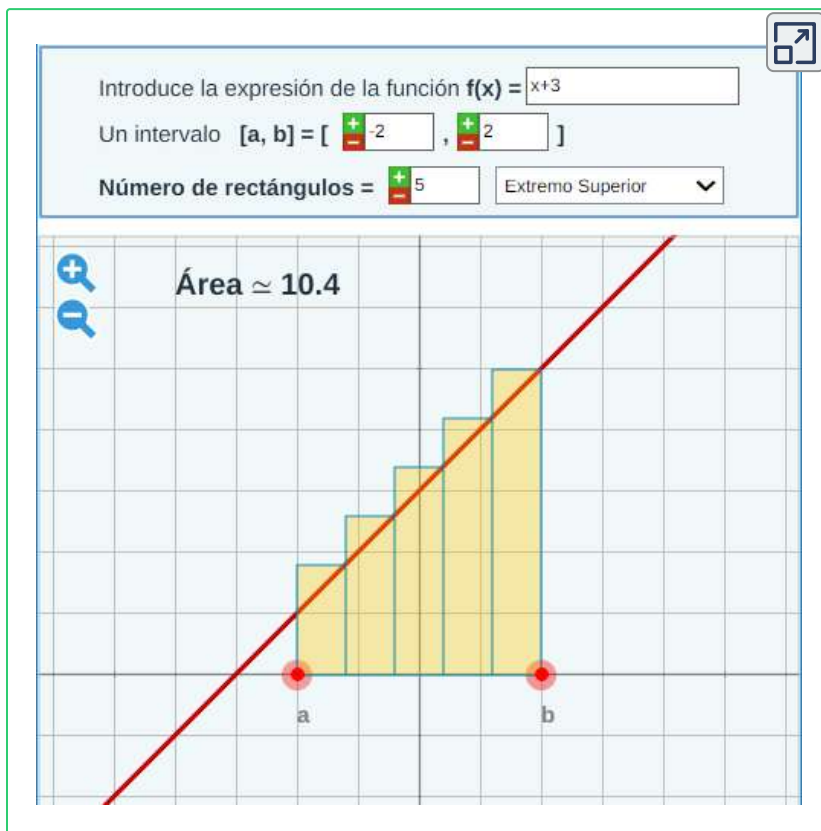
Cuestión 2.3

Estima el área entre el eje x y la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ durante el intervalo $[0, 3]$ utilizando los tres rectángulos que se muestran en la figura siguiente:





En la siguiente escena interactiva puedes estimar el área bajo la gráfica de una función positiva mediante sumas de áreas de rectángulos. La base de esos rectángulos se calcula en función del número de rectángulos a considerar y la altura se toma el valor de la función en distintos puntos (extremo inferior, extremo superior o punto medio del rectángulo considerado).



2.2.3 Otros aspectos del cálculo

Hasta ahora, hemos estudiado funciones de una sola variable. Estas funciones se pueden representar visualmente mediante gráficos en dos dimensiones; sin embargo, no hay una buena razón para restringir nuestra investigación a dos dimensiones.

Supongamos, por ejemplo, que en lugar de determinar la velocidad de un objeto que se mueve a lo largo de un eje de coordenadas, queremos determinar la velocidad de una roca lanzada desde una catapulta en un momento dado, o de un avión que se mueve en tres dimensiones. Podríamos querer graficar funciones de valor real de dos variables o determinar volúmenes de sólidos del tipo que se muestra en la [Figura 2.11](#).

Estos son solo algunos de los tipos de preguntas que se pueden hacer y responder mediante el cálculo multivariable. De manera informal, el cálculo multivariable se puede caracterizar como el estudio del cálculo de funciones de dos o más variables. Sin embargo, antes de explorar estas y otras ideas, primero debemos sentar las bases para el estudio del cálculo en una variable explorando el concepto de límite.

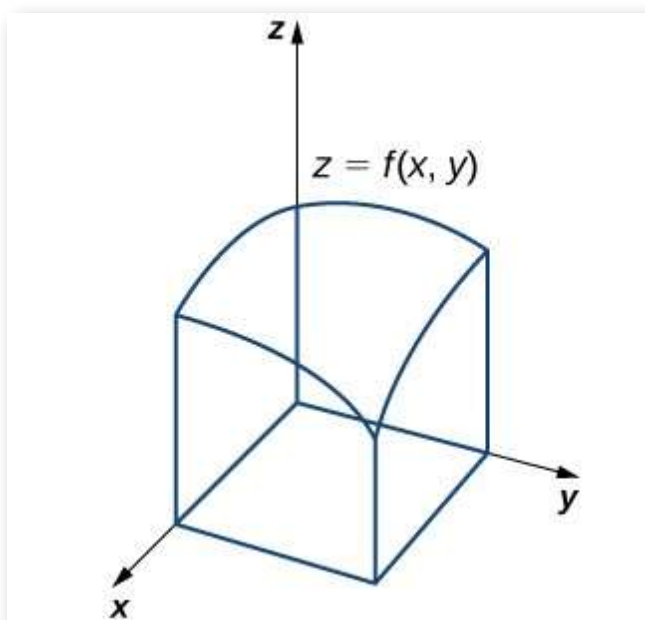


Figura 2.11 Podemos usar el cálculo multivariable para encontrar el volumen entre una superficie definida por una función de dos variables y un plano.

2.2.4 Ejercicios



Para los siguientes ejercicios, considera los puntos $P(1, 2)$ y $Q(x, y)$ que están en la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$.

1. [T] Completa la siguiente tabla con los valores apropiados: coordenada y de Q , el punto $Q(x, y)$, y la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P y Q . Redondea tu respuesta a ocho dígitos significativos.

x	y	$Q(x, y)$	m_{sec}
1.1	a	e	i
1.01	b	f	b
1.001	c	g	k
1.0001	d	h	l

([Solución](#))

2. Utiliza los valores de la columna derecha de la tabla del ejercicio anterior para adivinar el valor de la pendiente de la recta tangente a f en $x = 1$.

3. Usa el valor del ejercicio anterior para encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto P . Representa $f(x)$ y la recta tangente.

([Solución](#))



Para los siguientes ejercicios, considera los los puntos $P(1, 1)$ y $Q(x, y)$ que están en la gráfica de la función $f(x) = x^3$.

4. [T] Completa la siguiente tabla con los valores apropiados: coordenada y de Q , el punto $Q(x, y)$, y la pendiente de la recta

secante que pasa por los puntos P y Q . Redondea tu respuesta a ocho dígitos significativos.

x	y	$Q(x, y)$	m_{sec}
1.1	a	e	i
1.01	b	f	b
1.001	c	g	k
1.0001	d	h	l

5. Utiliza los valores de la columna derecha de la tabla del ejercicio anterior para adivinar el valor de la pendiente de la recta tangente a f en $x = 1$. ([Solución](#))

6. Usa el valor del ejercicio anterior para encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto P . Grafica $f(x)$ y la recta tangente.



Para los siguientes ejercicios, considera los puntos $P(4, 2)$ y $Q(x, y)$ que están en la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

7. [T] Completa la siguiente tabla con los valores apropiados: coordenada y de Q , el punto $Q(x, y)$, y la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P y Q . Redondea tu respuesta a ocho dígitos significativos.

x	y	$Q(x, y)$	m_{sec}
4.1	a	e	i
4.01	b	f	b
4.001	c	g	k
4.0001	d	h	l

([Solución](#))

8. Utiliza los valores de la columna derecha de la tabla del ejercicio anterior para adivinar el valor de la pendiente de la recta tangente a f en $x = 4$.

9. Utiliza el valor del ejercicio anterior para encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto P .

(**Solución**)



Para los siguientes ejercicios, considera los puntos $P(1.5, 0)$ y $Q(\phi, y)$ que están en la gráfica de la función $f(\phi) = \cos(\pi\phi)$.

10. [T] Completa la siguiente tabla con los valores apropiados: coordenada y de Q , el punto $Q(\phi, y)$ y la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P y Q . Redondea tu respuesta a ocho dígitos significativos.

ϕ	y	$Q(\phi, y)$	m_{sec}
1.4	a	e	i
1.49	b	f	b
1.499	c	g	k
1.4999	d	h	l

11. Utiliza los valores de la columna derecha de la tabla del ejercicio anterior para adivinar el valor de la pendiente de la recta tangente a f en $\phi = 1.5$. (**Solución**)

12. Utiliza el valor del ejercicio anterior para encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto P .



Para los siguientes ejercicios, considera los puntos $P(-1, -1)$ y $Q(x, y)$ que están en la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

13. [T] Completa la siguiente tabla con los valores apropiados: coordenada y de Q , el punto $Q(x, y)$ y la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P y Q . Redondea tu respuesta a ocho dígitos significativos.

x	y	$Q(x, y)$	m_{sec}
-1.05	a	e	i
-1,01	b	f	b
-1.005	c	g	k
-1.001	d	h	l

(**Solución**)

14. Usa los valores de la columna derecha de la tabla del ejercicio anterior para adivinar el valor de la pendiente de la recta tangente a f en $x = -1$.

15. Utiliza el valor del ejercicio anterior para encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto P .



Para los siguientes ejercicios, la función de posición de una pelota que se deja caer desde lo alto de un edificio de 200 metros de altura viene dada por $s(t) = 200 - 4.9t^2$, donde la posición s se mide en metros y el tiempo t se mide en segundos. Redondea tu respuesta a ocho dígitos significativos. (**Solución**)

16. [T] Calcula la velocidad promedio de la pelota en los intervalos de tiempo dados.

- a. $[4.99, 5]$
- b. $[5, 5.01]$
- c. $[4.999, 5]$
- d. $[5, 5.001]$

17. Utiliza el ejercicio anterior para adivinar la velocidad instantánea de la pelota en $t = 5$ segundos.



Para los siguientes ejercicios, consideremos una piedra lanzada al aire desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 15 m / seg. Su altura en metros en el tiempo t segundos es $h(t) = 15t - 4.9t^2$.

(Solución)

18. [T] Calcule la velocidad promedio de la piedra en los intervalos de tiempo dados.

- a. $[1, 1.05]$
- b. $[1, 1.01]$
- c. $[1, 1.005]$
- d. $[1, 1.001]$

19. Utiliza el ejercicio anterior para adivinar la velocidad instantánea de la piedra en $t = 1$ segundo. **(Solución)**



Para los siguientes ejercicios, consideremos un cohete lanzado al aire que luego regresa a la Tierra.

La altura del cohete en metros viene dada por $h(t) = 600 + 78.4t - 4.9t^2$, donde t se mide en segundos. ([Solución](#))

20. [T] Calcule la velocidad promedio del cohete en los intervalos de tiempo dados.

- a. $[9, 9.01]$
- b. $[8.99, 9]$
- c. $[9, 9.001]$
- d. $[8.999, 9]$

21. Utiliza el ejercicio anterior para adivinar la velocidad instantánea del cohete en $t = 9$ segundos. ([Solución](#))



Para los siguientes ejercicios, consideremos a un atleta que corre una carrera de 40 m. La posición del atleta viene dada por $d(t) = \frac{t^3}{6} + 4t$, donde d es la posición en metros y t es el tiempo transcurrido, medido en segundos.

22. [T] Calcule la velocidad promedio del corredor en los intervalos de tiempo dados.

- a. $[1.95, 2.05]$
- b. $[1.995, 2.005]$
- c. $[1.9995, 2.0005]$
- d. $[2, 2.00001]$

23. Utiliza el ejercicio anterior para adivinar la velocidad instantánea del corredor en $t = 2$ segundos. ([Solución](#))



Para los siguientes ejercicios, considera la función $f(x) = |x|$.

24. Dibuja la gráfica de f en el intervalo $[-1, 2]$ y sombrea la región por encima del eje x .

25. Utiliza el ejercicio anterior para encontrar el valor aproximado del área entre el eje x y la gráfica de f en el intervalo $[-1, 2]$ usando rectángulos. Para los rectángulos, usa las unidades cuadradas y haga una aproximación tanto por encima como por debajo de las líneas. Usa geometría para encontrar la respuesta exacta. ([Solución](#))



Para los siguientes ejercicios, consideremos la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. (Sugerencia: esta es la mitad superior de un círculo de radio 1 y de centro $(0, 0)$).

26. Dibuja la gráfica de f sobre el intervalo $[-1, 1]$.

27. Utiliza el ejercicio anterior para encontrar el área aproximada entre el eje x y la gráfica de f en el intervalo $[-1, 1]$ usando rectángulos. Para los rectángulos, usa cuadrados de 0,4 por 0,4 unidades y haga una aproximación tanto por encima como por debajo de las líneas. Usa geometría para encontrar la respuesta exacta. ([Solución](#))



Para los siguientes ejercicios, considere la función $f(x) = -x^2 + 1$.

28. Dibuje la gráfica de f sobre el intervalo $[-1, 1]$.

29. Calcula el área de la región entre el eje x y la gráfica de f en el intervalo $[-1, 1]$. ([Solución](#))

2.3 El límite de una función

Objetivos de aprendizaje

1. Usando la notación correcta, describir el límite de una función.
2. Utilizar una tabla de valores para estimar el límite de una función o para identificar cuándo no existe el límite.
3. Utilizar una gráfica para estimar el límite de una función o para identificar cuándo no existe el límite.
4. Definir límites laterales y proporcionar ejemplos.
5. Explicar la relación entre límites laterales y límite.
6. Usar la notación correcta, describa un límite infinito.
7. Definir una asíntota vertical.

El concepto de límite es esencial para la comprensión del cálculo, existe desde hace miles de años. De hecho, los primeros matemáticos utilizaron un proceso de límite para obtener cada vez mejores aproximaciones de áreas de círculos. Sin embargo, la definición formal de límite, tal como la conocemos y entendemos hoy, no apareció hasta finales del siglo XIX. Por lo tanto, comenzamos nuestra búsqueda para comprender los límites, como lo hicieron nuestros antepasados matemáticos, utilizando un enfoque intuitivo. Al final de este capítulo, armados con una comprensión conceptual de los límites, se examinará la definición formal de límite.

Comenzamos nuestra exploración de límites observando las gráficas de las funciones. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $g(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ y $h(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$, que se muestran en la [Figura 2.12](#).

En particular, centremos nuestra atención en el comportamiento de cada gráfico para el valor y alrededor de $x = 2$.

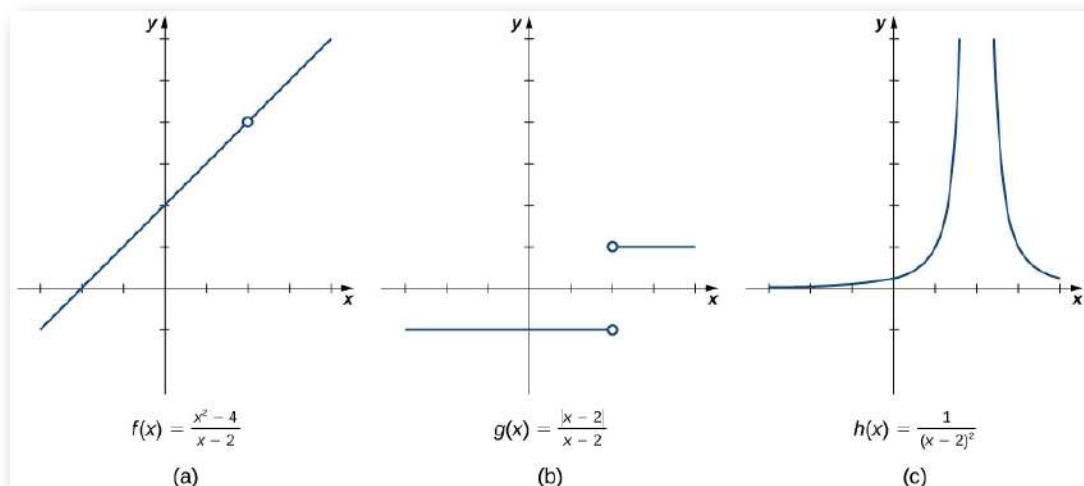


Figura 2.12 Estos gráficos muestran el comportamiento de tres funciones diferentes alrededor de $x = 2$.

Cada una de las tres funciones no está definida en $x = 2$, pero si hacemos esta afirmación, damos una imagen muy incompleta de cómo se comporta cada función en la vecindad de $x = 2$. Para expresar el comportamiento de cada gráfico en las proximidades de 2 de manera más completa, necesitamos introducir el concepto de límite.

2.3.1 Definición intuitiva de límite

Primero echemos un vistazo más de cerca a cómo la función $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ se comporta alrededor de $x = 2$ en la [Figura 2.12](#). A medida que los valores de x se acercan a 2 desde cualquier lado de 2, los valores de $y = f(x)$ se acercan a 4. Matemáticamente, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a 2 es 4.

Simbólicamente, expresamos este límite como

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4.$$

A partir de esta breve mirada informal a un límite, comencemos a desarrollar una definición intuitiva del límite. Podemos pensar en el límite de una función en un número a como el único número real L al que se acercan los valores funcionales cuando los valores de x se acercan al punto a , siempre que exista tal número real L . Expresado con más cuidado, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN

Sea $f(x)$ una función definida en todos los valores en un intervalo abierto que contenga a , con la posible excepción de a , y sea L un número real.

Si todos los valores de la función $f(x)$ se acercan al número real L cuando los valores de $x \neq a$ se acercan al número a , entonces decimos que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca al punto a es L . Más sucintamente, a medida que x se acerca a a , $f(x)$ se acerca y permanece cerca de L .

Simbólicamente, expresamos esta idea como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \tag{2.3}$$

Podemos estimar límites construyendo tablas de valores funcionales y mirando sus gráficos. Este proceso se describe en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas: Evaluación de un límite mediante una tabla de valores funcionales

1. Para evaluar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, comenzamos completando una tabla de valores funcionales. Deberíamos elegir dos conjuntos de valores de x : un conjunto de valores que se acerquen a a y sean menores que a , y otro conjunto de valores que se acerquen a a y sean mayores que a . Podría considerarse una tabla como la siguiente aunque pueden utilizarse más valores si fuera necesario.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
$a - 0.1$	$f(a - 0.1)$	$a + 0.1$	$f(a + 0.1)$
$a - 0.01$	$f(a - 0.01)$	$a + 0.01$	$f(a + 0.01)$
$a - 0.001$	$f(a - 0.001)$	$a + 0.001$	$f(a + 0.001)$
$a - 0.0001$	$f(a - 0.0001)$	$a + 0.0001$	$f(a + 0.0001)$

Tabla 2.1 Tabla de valores para $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

2. A continuación, veamos los valores en cada uno de las columnas $f(x)$ y determinamos si los valores parecen acercarse a un valor único a medida que avanzamos en cada columna.

En nuestras columnas, miramos la secuencia $f(a - 0.1)$, $f(a - 0.01)$, $f(a - 0.001)$, $f(a - 0.0001)$, y así sucesivamente, y $f(a + 0.1)$, $f(a + 0.01)$, $f(a + 0.001)$, $f(a + 0.0001)$, y así sucesivamente.

Nota: aunque hemos elegido para x los valores $a \pm 0, 1, a \pm 0, 01, a \pm 0, 001, a \pm 0, 0001$, y así sucesivamente, y estos valores probablemente funcionarán casi siempre, en ocasiones es posible que necesitemos modificar nuestras elecciones.

3. Si ambas columnas se acercan a un valor de y común L , declaramos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.
4. Podemos utilizar la siguiente estrategia para confirmar el resultado obtenido de la tabla o como método alternativo para estimar un límite.

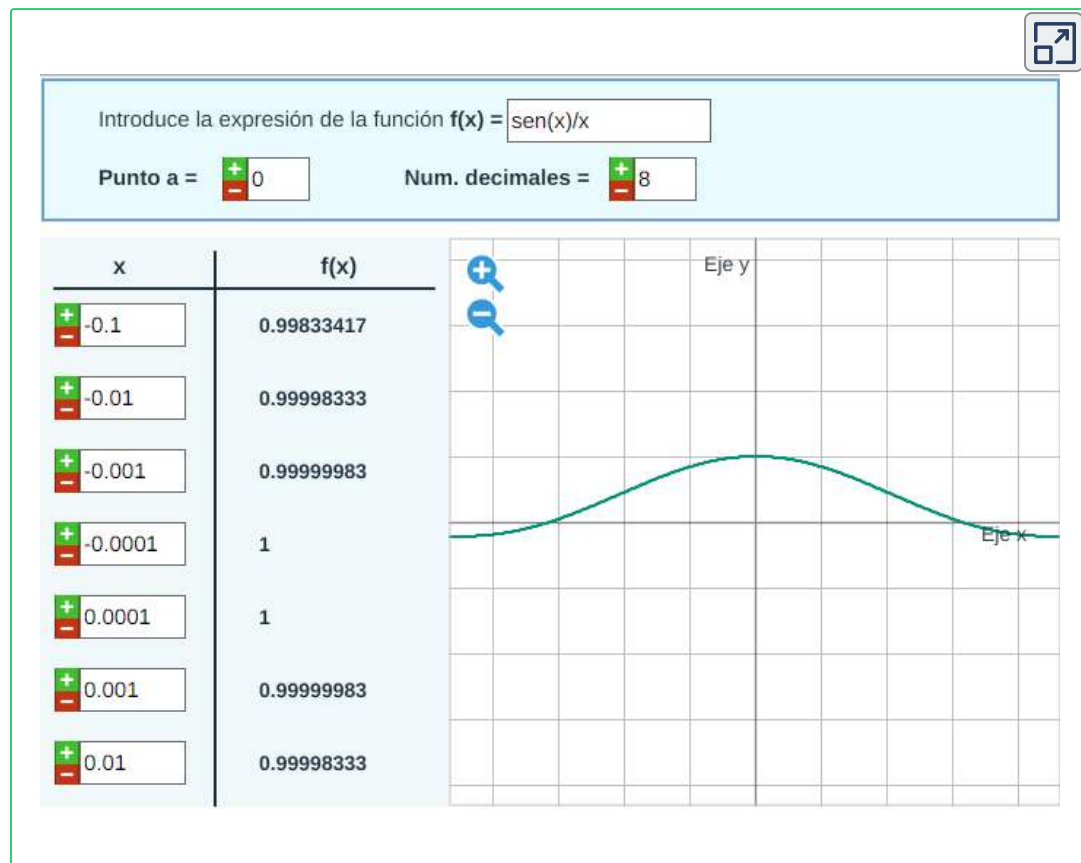
Usando una calculadora gráfica o un software de ordenador que nos permita representar gráficas de funciones, podemos trazar la función $f(x)$, asegurándose de que los valores funcionales de $f(x)$ para los valores de x cerca de a estén en nuestra ventana gráfica.

Podemos movernos a lo largo del gráfico de la función y observar la lectura del valor y cuando los valores x se acercan a a . Si los valores de y se acercan a L cuando nuestros valores de x se acercan a a desde ambas direcciones, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Es posible que necesitemos ampliar nuestro gráfico y repetir este proceso varias veces.



En la siguiente escena interactiva incorporamos un applet que permite aplicar esta estrategia calculando los valores que se consideran y representando la gráfica de la función.



Aplicamos esta estrategia de resolución de problemas para calcular un límite en el Ejemplo 2.4.



Ejemplo

2.4 Evaluación de un límite mediante una tabla de valores funcionales

Evalúa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$.



Solución



Ejemplo

2.5 Evaluación de un límite mediante una tabla de valores funcionales

Evalúa $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ utilizando una tabla de valores funcionales.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.4

Estima $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$ utilizando una tabla de valores funcionales. Utiliza un gráfico para confirmar su estimación.

En este punto, vemos desde Ejemplo 2.4 y Ejemplo 2.5 que puede ser tan fácil, si no más fácil, estimar un límite de una función inspeccionando su gráfica como estimar el límite usando una tabla de valores funcionales. En el Ejemplo 2.6, evaluamos un límite exclusivamente mirando un gráfico en lugar de usar una tabla de valores funcionales.



Ejemplo

2.6 Evalúa un límite mediante un gráfico

Para $g(x)$ se muestra en la [Figura 2.15](#), evalúe $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$.

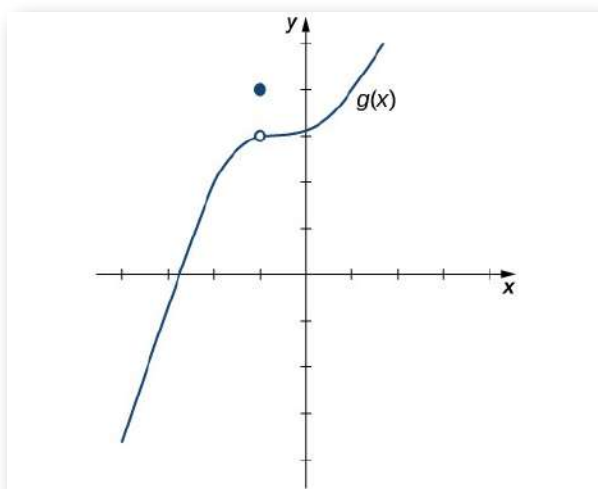


Figura 2.15 La gráfica de $g(x)$ incluye un valor que no está en una curva suave.



Solución

Mirar una tabla de valores funcionales o mirar el gráfico de una función nos proporciona información útil sobre el valor del límite de una función en un punto dado. Sin embargo, estas técnicas se basan demasiado en conjeturas.

Eventualmente, necesitamos desarrollar métodos alternativos para evaluar los límites. Estos nuevos métodos son de naturaleza más algebraica y los exploramos en la siguiente sección; sin embargo, en este punto presentamos dos límites especiales que son fundamentales para las técnicas futuras.

TEOREMA 2.1. Dos límites importantes

Sea a un número real y c una constante.

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad (2.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c \quad (2.5)$$

Podemos hacer las siguientes observaciones sobre estos dos límites.

- i. Para el primer límite, observamos que cuando x se acerca a a , también lo hace $f(x)$, porque $f(x) = x$. En consecuencia, $\lim_{x \rightarrow a} x = a$.
- ii. Para el segundo límite, consideremos la siguiente tabla

x	$f(x) = c$	x	$f(x) = c$
$a - 0.1$	c	$a + 0.1$	c
$a - 0.01$	c	$a + 0.01$	c
$a - 0.001$	c	$a + 0.001$	c
$a - 0.0001$	c	$a + 0.0001$	c

Tabla 2.4 Tabla de valores funcionales para $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

Observamos que para todos los valores de x (independientemente de si se acercan a a), los valores $f(x)$ permanecen constante en c . No tenemos más remedio que concluir que $\lim_{x \rightarrow a} c = c$.

2.3.2 La existencia de límite

Al considerar el límite en el siguiente ejemplo, debemos tener en cuenta que para que exista el límite de una función en un punto, los valores funcionales deben acercarse a un único valor real en ese punto. Si los valores funcionales no se acercan a un solo valor, entonces el límite no existe.



Ejemplo

2.7 Evalúa un límite que no existe

Evalúa $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$ usando una tabla de valores.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 2.6

Utiliza una tabla de valores funcionales para evaluar $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2}$, si es posible.

2.3.3 Límites laterales

A veces, indicar que el límite de una función no existe en un punto no nos proporciona suficiente información sobre el comportamiento de la función en ese punto en particular. Para ver esto, ahora revisamos la función $g(x) = |x - 2|/(x - 2)$ introducida al principio de la sección (ver [Figura 2.12](#)).

Como elegimos valores de x cercanos a 2, $g(x)$ no se acerca a un solo valor, por lo que el límite cuando x se acerca a 2 no existe, es decir, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \nexists$. Sin embargo, esta afirmación por sí sola no nos da una imagen completa del comportamiento de la función en torno al valor 2 de x .

Para proporcionar una descripción más precisa, presentamos la idea de un **límite lateral**. Para todos los valores a la izquierda de 2, $g(x) = -1$. Por lo tanto, cuando x se acerca a 2 por la izquierda, $g(x)$ se aproxima a -1 . Matemáticamente, decimos que el límite cuando x se acerca a 2 por la izquierda es -1 . Simbólicamente, expresamos esta idea como

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -1$$

De manera similar, cuando x se acerca a 2 por la derecha, $g(x)$ se aproxima a 1. Simbólicamente, expresamos esta idea como

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1$$

Ahora podemos presentar una definición informal de límites laterales.

DEFINICIÓN

Definimos dos tipos de límites laterales.

1. **Límite por la izquierda:** Sea $f(x)$ una función definida en todos los valores en un intervalo abierto de la forma (c, a) , y sea L un número real.

Si los valores de la función $f(x)$ se acercan al número real L cuando los valores de x (donde $x < a$) se acercan al número a , entonces decimos que L es el límite de $f(x)$ cuando x se acerca al punto a por la izquierda. Simbólicamente, expresamos esta idea como

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad (2.6)$$

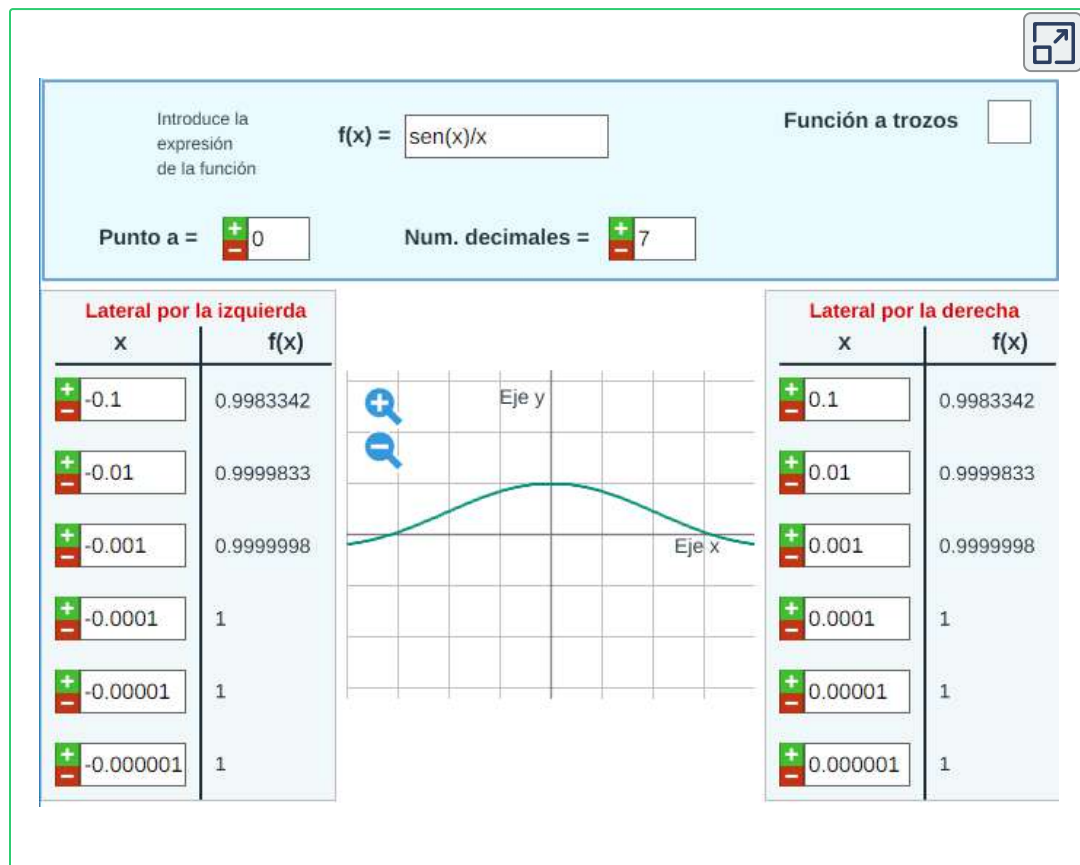
2. **Límite por la derecha:** Sea $f(x)$ una función definida en todos los valores en un intervalo abierto de la forma (a, c) , y sea L un número real.

Si los valores de la función $f(x)$ se acercan al número real L cuando los valores de x (donde $x > a$) se acercan al número a , entonces decimos que L es el límite de $f(x)$ cuando x se acerca al punto a por la derecha. Simbólicamente, expresamos esta idea como

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad (2.7)$$



En la siguiente escena interactiva incorporamos un applet que permite practicar con el cálculo de límites laterales.





Ejemplo

2.8 Evaluar límites laterales

Para la función $\begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, $x = 1$ evalúa cada uno de los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.7

Utiliza una tabla de valores funcionales para estimar los siguientes límites, si es posible.

a. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2}$

b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2}$

Consideremos ahora la relación entre el límite de una función en un punto y los límites a derecha e izquierda en ese punto. Parece claro que si el límite de la derecha y el límite de la izquierda tienen un valor común, entonces ese valor común es el límite de la función en ese punto.

Del mismo modo, si el límite de la izquierda y el límite de la derecha toman valores diferentes, el límite de la función no existe. Estas conclusiones se resumen en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.2. Relacionar límites laterales y el límite

Sea $f(x)$ una función definida en todos los valores en un intervalo abierto que contenga al punto a , con la posible excepción del punto a , y sea L un número real. Se tiene,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ si y solo si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

2.3.4 Límites infinitos

Evaluar el límite de una función en un punto o evaluar el límite de una función a la derecha o a la izquierda en un punto nos ayuda a caracterizar el comportamiento de una función alrededor de un valor dado. Como veremos, también podemos describir el comportamiento de funciones que no tienen límites finitos.

Ahora dirigimos nuestra atención a $h(x) = 1/(x - 2)^2$, la tercera y última función presentada al principio de esta sección (ver [Figura 2.12 \(c\)](#)). De su gráfica vemos que a medida que los valores de x se acercan a 2, los valores de $h(x) = 1/(x - 2)^2$ se vuelven cada vez más grandes superando a cualquier número real. Matemáticamente, decimos que el límite de $h(x)$ cuando x se acerca a 2 es infinito positivo. Simbólicamente, expresamos esta idea como

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = +\infty$$

De manera más general, definimos límites infinitos de la siguiente manera:

DEFINICIÓN

Definimos tres tipos de **límites infinitos**.

1. **Límites infinitos desde la izquierda:** Sea $f(x)$ una función definida en todos los valores en un intervalo abierto de la forma (b, a) .
 - i. Si los valores de $f(x)$ aumentan sin límite cuando los valores de x (donde $x < a$) se acercan al número a , entonces decimos que el límite cuando x se acerca a a desde la izquierda es infinito positivo y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad (2.8)$$

- ii. Si los valores de $f(x)$ disminuyen sin límite cuando los valores de x (donde $x < a$) se acercan al número a , entonces decimos que el límite cuando x se acerca al punto a desde la izquierda es infinito negativo y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad (2.9)$$

2. **Límites infinitos desde la derecha:** Sea $f(x)$ una función definida en todos los valores en un intervalo abierto de la forma (a, c) .

- i. Si los valores de $f(x)$ aumentan sin límite cuando los valores de x (donde $x > a$) se acercan al número a , entonces decimos que el límite cuando x se acerca al punto a desde la izquierda es infinito positivo y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad (2.10)$$

- ii. Si los valores de $f(x)$ disminuyen sin límite cuando los valores de x (donde $x > a$) se acercan al número a , entonces decimos que el límite cuando x se acerca al punto a desde la izquierda es infinito negativo y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad (2.11)$$

3. **Límite infinito:** Sea $f(x)$ definirse para todo $x \neq a$ en un intervalo abierto que contiene a .

- i. Si los valores de $f(x)$ aumenta sin límite cuando los valores de x (donde $x \neq a$) se acercan al número a , entonces decimos que el límite cuando x se acerca al punto a es infinito positivo y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad (2.12)$$

- ii. Si los valores de $f(x)$ disminuyen sin límite cuando los valores de x (donde $x \neq a$) se acercan al número a , entonces decimos que el límite cuando x se acerca al punto a es infinito negativo y escribimos

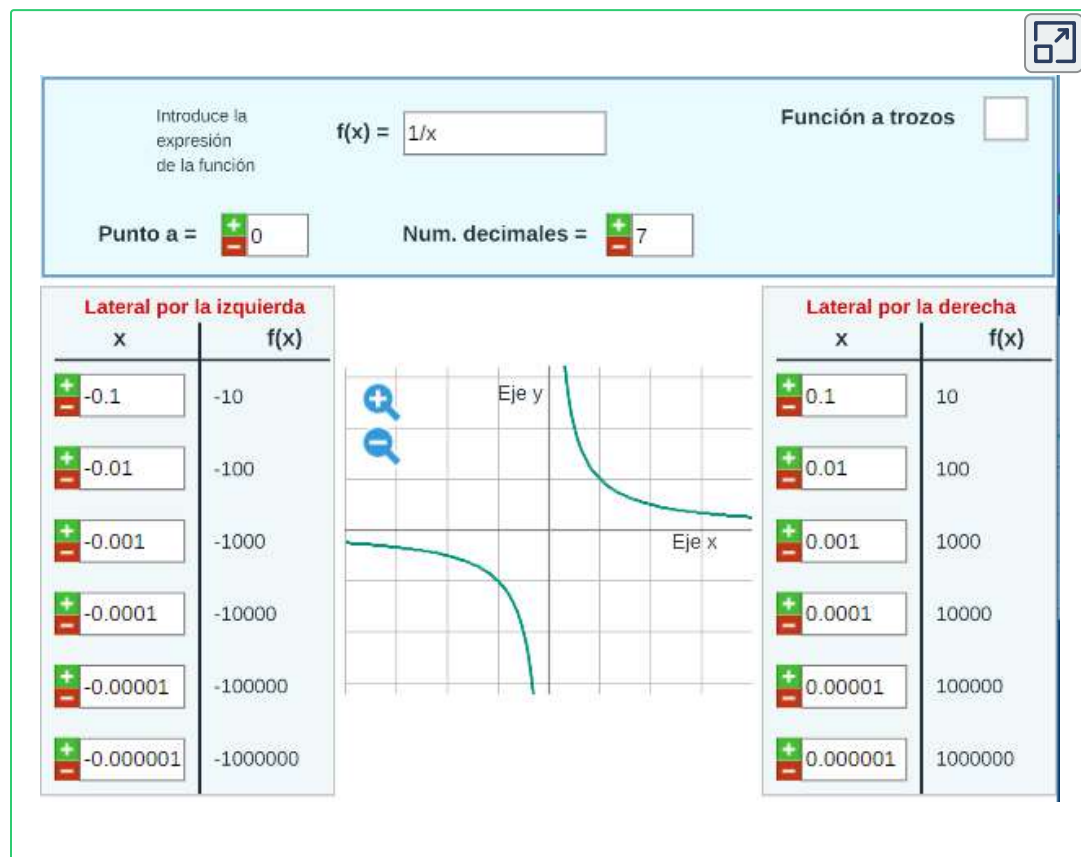
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad (2.13)$$

Es importante entender que cuando escribimos declaraciones como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ estamos describiendo el comportamiento de la función, tal como la acabamos de definir. No estamos afirmando que exista un límite. Para que exista el límite de una función $f(x)$ en a , debe acercarse a un número real L cuando x se acerca al punto a .

Dicho esto, si, por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, siempre escribimos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ en lugar de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \nexists$



En la siguiente escena interactiva incorporamos un applet para practicar los límites infinitos.





Ejemplo

2.9 Reconociendo un límite infinito

Evalúa cada uno de los siguientes límites, si es posible. Usa una tabla de valores funcionales y grafique $f(x) = 1/x$ para confirmar su conclusión.

- a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$
- b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$
- c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.8

Evalúa cada uno de los siguientes límites, si es posible. Usa una tabla de valores funcionales y represente la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ para confirmar su conclusión.

- a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$
- b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$
- c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

Es útil señalar que funciones de la forma $f(x) = 1/(x - a)^n$, donde n es un número entero positivo, tiene límites infinitos cuando x se acerca al punto a desde la izquierda o la derecha ([Figura 2.20](#)). Estos límites se resumen en el siguiente resultado.

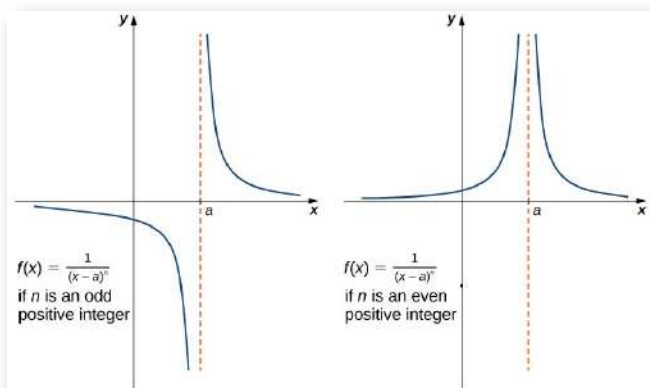


Figura 2.20 La función $f(x) = 1/(x - a)^n$ tiene límites infinitos en a .

TEOREMA 2.3. Límites infinitos de enteros positivos

Si n es un entero par positivo, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x - a)^n} = +\infty$$

Si n es un entero impar positivo, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x - a)^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x - a)^n} = -\infty$$

También debemos señalar que en las gráficas de $f(x) = 1/(x - a)^n$, los puntos en el gráfico que tienen coordenadas x muy cerca de a están muy cerca de la línea vertical $x = a$. Es decir, cuando x se acerca al punto a , los puntos en la gráfica de $f(x)$ están más cerca de la recta $x = a$. La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** del gráfico.

Definimos a continuación formalmente una asíntota vertical.

DEFINICIÓN

Sea $f(x)$ una función. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones, entonces la recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \text{ o } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ o } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ o } -\infty$$



Ejemplo

2.10 Encontrar una asíntota vertical

Evalúa cada uno de los siguientes límites utilizando Límites infinitos de enteros positivos. Identifica cualquier asíntota vertical de la función

$$f(x) = \frac{1}{(x + 3)^4}$$

a. $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{(x+3)^4}$

b. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{(x+3)^4}$

c. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^4}$



Solución



Ejemplo

2.11 Comportamiento de una función en diferentes puntos

Usa la gráfica de $f(x)$ en la [Figura 2.21](#) para determinar cada uno de los siguientes valores:

a.

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow -4} f(x) ; \quad f(-4)$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) ; \quad f(-2)$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) ; \quad f(1)$$

d.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) ; \quad f(3)$$

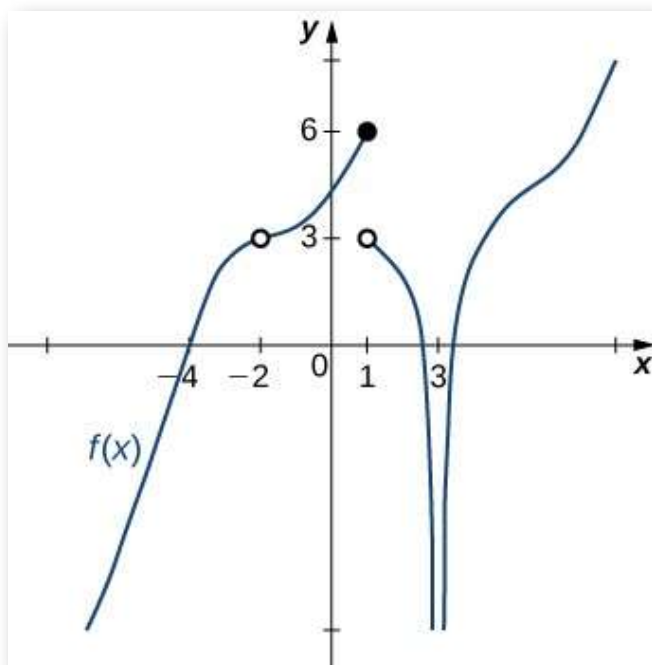


Figura 2.21 La gráfica muestra $f(x)$.



Pregunta
de control

Cuestión 2.9

Evalúa cada uno de los siguientes límites. Identifica las asíntotas verticales de la función $f(x) = 1/(x - 2)^3$.

- $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{(x-2)^3}$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{(x-2)^3}$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x-2)^3}$



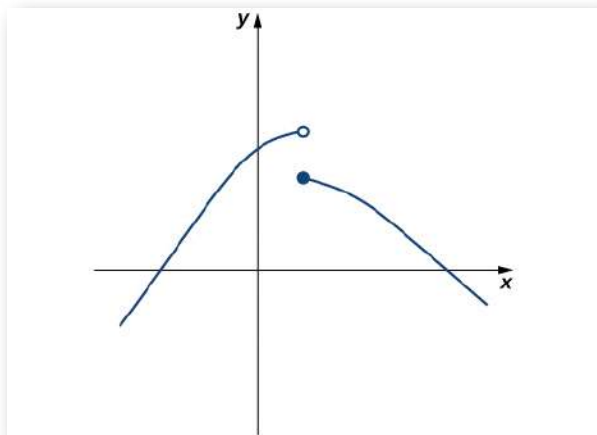
Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.10

Evalúa $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ para $f(x)$ mostrado aquí:



En el siguiente ejemplo ponemos nuestro conocimiento de varios tipos de límites para analizar el comportamiento de una función en varios puntos diferentes.



Ejemplo

2.12 Ecuación de Einstein

En el primer capítulo mencionamos brevemente cómo Albert Einstein demostró que existe un límite a la rapidez con la que puede viajar cualquier objeto. Dada la ecuación de Einstein para la masa de un objeto en movimiento, ¿cuál es el valor de este límite?

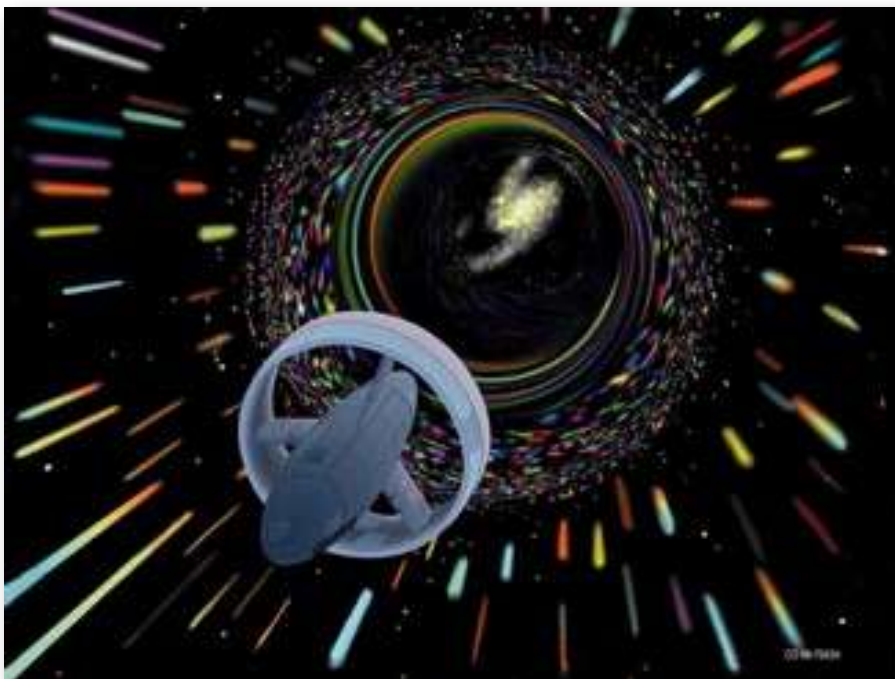


Figura 2.22 Crédito: NASA.

 **Solución**

2.3.5 Ejercicios



Para los siguientes ejercicios, considera la función $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$.

30. [T] Completa la siguiente tabla para la función. Redondea tus soluciones a cuatro decimales.

x	$f(x)$		x	$f(x)$
0.9	a		1.1	e
0.99	b		1.01	f
0.999	c		1.001	g
0.9999	d		1.0001	h

31. ¿Qué indican los resultados del ejercicio anterior sobre el límite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? Explica la respuesta. ([Solución](#))



Para los siguientes ejercicios, considera la función $f(x) = (1 + x)^{1/x}$.

32. [T] Haz una tabla que muestre los valores de f para $x = -0.01, -0.001, -0.0001, -0.00001$ y para $x = 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$. Redondea tus soluciones a cinco decimales.

x	$f(x)$		x	$f(x)$
-0.01	a		1.1	e
-0.001	b		0.001	f
-0.0001	c		0.0001	g
-0.00001	d		0.00001	h

33. ¿Qué indica la tabla de valores del ejercicio anterior sobre la función $f(x) = (1 + x)^{1/x}$? ([Solución](#))

34. ¿A qué constante matemática parece acercarse el límite del ejercicio anterior?



En los siguientes ejercicios, usa los valores dados para configurar una tabla para evaluar los límites. Redondea tus soluciones a ocho lugares decimales.

35. [T] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{x}$; ± 0.1 , ± 0.01 , ± 0.001 , ± 0.00

x	$\frac{\text{sen}(2x)}{x}$		x	$\frac{\text{sen}(2x)}{x}$
-0.1	a		0.1	e
-0.01	b		0.01	f
-0.001	c		0.001	g
-0.0001	d		0.0001	h

(Solución)

36. [T] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{x}$; ± 0.1 , ± 0.01 , ± 0.001 , ± 0.0001

x	$\frac{\text{sen}(3x)}{x}$		x	$\frac{\text{sen}(3x)}{x}$
-0.01	a		1.1	e
-0.001	b		0.001	f
-0.0001	c		0.0001	g
-0.00001	d		0.00001	h

37. Utiliza los dos ejercicios anteriores para conjeturar (adivinar) el valor del siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ax)}{x}$ para a un valor real positivo.

(Solución)



[T] En los siguientes ejercicios, configura una tabla de valores para encontrar el límite indicado. Redondea a ocho dígitos.

38. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$

x	$\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$		x	$\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$
1.9	a		2.1	e
1.99	b		2.01	f
1.999	c		2.001	g
1.9999	d		2.0001	h

39. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - 2x)$

x	$1 - 2x$		x	$1 - 2x$
0.9	a		1.1	e
0.99	b		1.01	f
0.999	c		1.001	g
0.9999	d		1.0001	h

(Solución)

40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{1 - e^{1/x}}$

x	$\frac{5}{1 - e^{1/x}}$		x	$\frac{5}{1 - e^{1/x}}$
-0.1	a		0.1	e
-0.01	b		0.01	f
-0.001	c		0.001	g
-0.0001	d		0.0001	h

41. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z-1}{z^2(z+3)}$

z	$\frac{z-1}{z^2(z+3)}$		z	$\frac{z-1}{z^2(z+3)}$
-0.1	a		0.1	e
-0.01	b		0.01	f
-0.001	c		0.001	g
-0.0001	d		0.0001	h

(Solución)

42. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos t}{t}$

t	$\frac{\cos t}{t}$
0.1	a
0.01	b
0.001	c
0.0001	d

43. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{2}{x}}{x^2 - 4}$

x	$\frac{5}{1-e^{1/x}}$		x	$\frac{5}{1-e^{1/x}}$
1.9	a		2.1	e
1.99	b		2.01	f
1.999	c		2.001	g
1.9999	d		2.0001	h

(Solución)



[T] En los siguientes ejercicios, configura una tabla de valores y redondea a ocho dígitos significativos. Con base en la tabla de valores, adivina cuál es el límite. Luego, usa una calculadora para representar la gráfica de la función y determinar el límite. ¿Fue correcta la conjetura? Si no es así, ¿por qué falla el método de utilizar tablas?

44. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\theta} \right)$

θ	$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\theta} \right)$		θ	$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\theta} \right)$
-0.1	a		0.1	e
-0.01	b		0.01	f
-0.001	c		0.001	g
-0.0001	d		0.0001	h

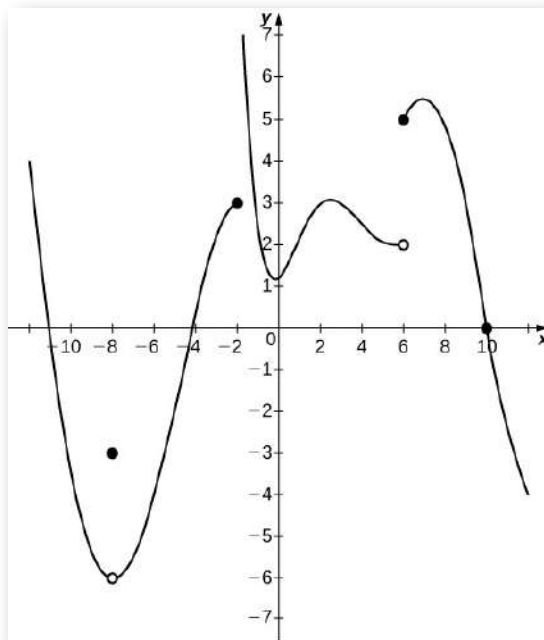
45. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \cos \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)$

α	$\frac{1}{\alpha} \cos \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)$
0.1	a
0.01	b
0.001	c
0.0001	d

(Solución)



En los siguientes ejercicios, considera la gráfica de la función $y = f(x)$ que se muestra.



¿Cuál de las afirmaciones sobre $y = f(x)$ son verdaderas y cuales son falsas? Explica por qué es falsa.

46. $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 0$.

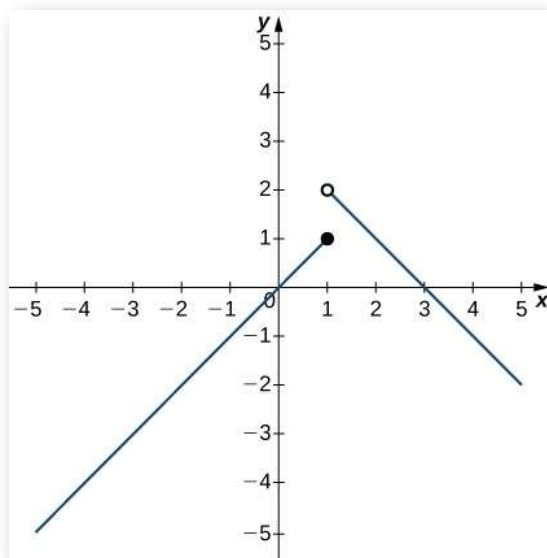
47. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$. ([Solución](#))

48. $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = f(-8)$.

49. $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 5$. ([Solución](#))



En los siguientes ejercicios, usa la siguiente gráfica de la función $y = f(x)$ para encontrar los valores, si es posible. Estimar cuando sea necesario.



50. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

51. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (Solución)

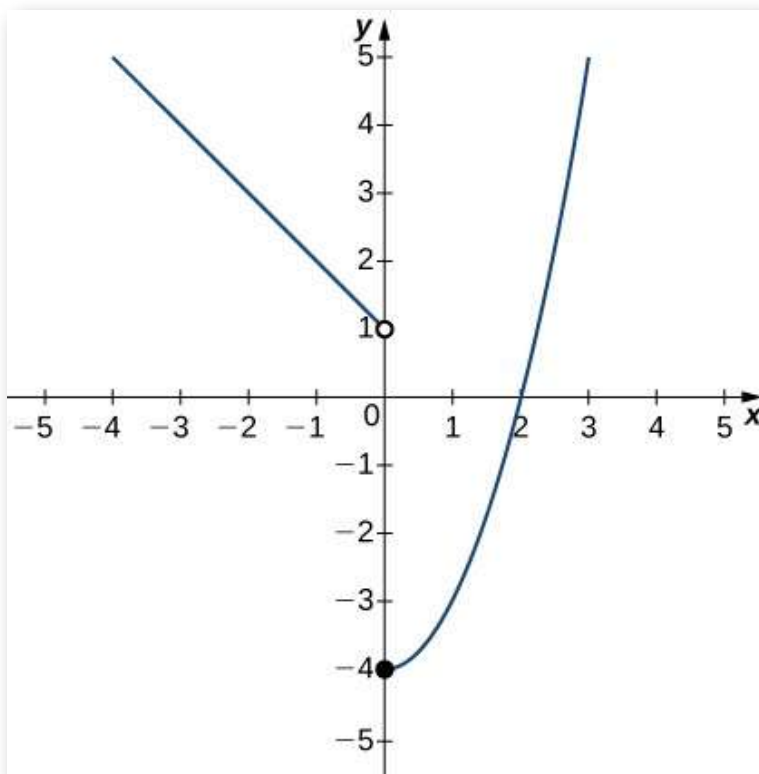
52. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

53. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (Solución)

54. $f(1)$.



En los siguientes ejercicios, utiliza la gráfica de la función $y = f(x)$ que se muestra a continuación para encontrar los valores, si es posible. Estimar cuando sea necesario.



55. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ([Solución](#))

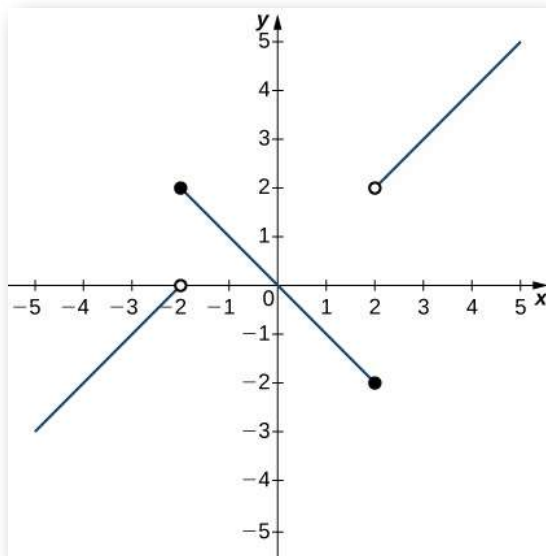
56. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

57. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ([Solución](#))

58. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



En los siguientes ejercicios, utiliza la gráfica de la función $y = f(x)$ que se muestra aquí para encontrar los valores, si es posible. Estimar cuando sea necesario.



59. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ ([Solución](#))

60. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

61. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ ([Solución](#))

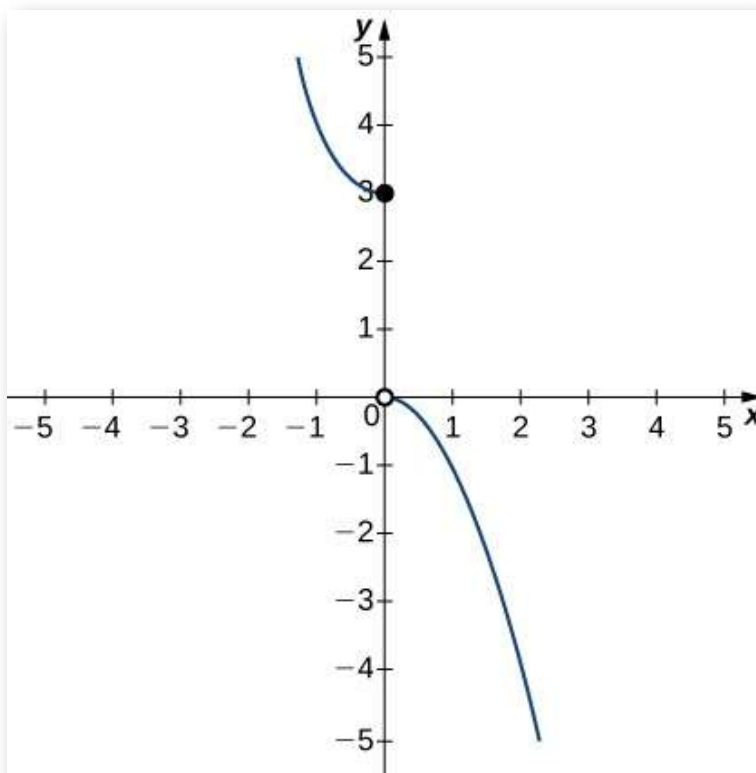
62. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

63. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ([Solución](#))

64. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



En los siguientes ejercicios, utiliza la gráfica de la función $y = g(x)$ que se muestra a continuación para encontrar los valores, si es posible. Estimar cuando sea necesario.



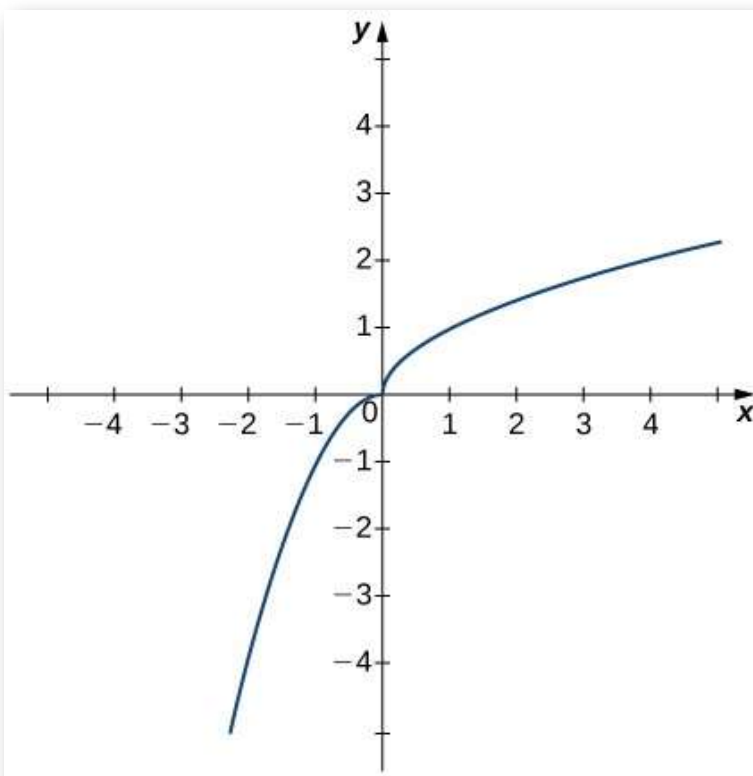
65. $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ ([Solución](#))

66. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

67. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ([Solución](#))



En los siguientes ejercicios, utiliza la gráfica de la función $y = h(x)$ que se muestra a continuación para encontrar los valores, si es posible. Estimar cuando sea necesario.



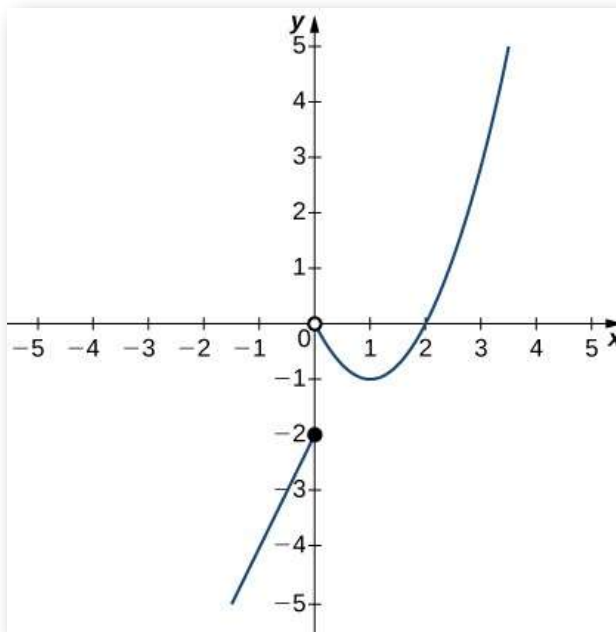
68. $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$

69. $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ ([Solución](#))

70. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$



En los siguientes ejercicios, utiliza la gráfica de la función $y = f(x)$ que se muestra a continuación para encontrar los valores, si es posible. Estimar cuando sea necesario.



71. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ([Solución](#))

72. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

73. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ([Solución](#))

74. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

75. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ([Solución](#))



En los siguientes ejercicios, esboce la gráfica de una función con las propiedades dadas.

76. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 6$; $f(4)$ no definido

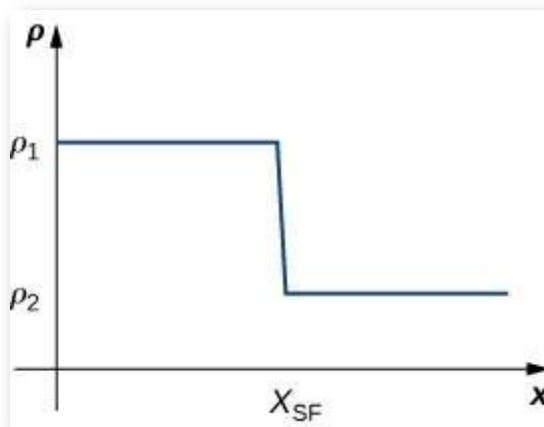
$$77. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty ; , \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) ; \quad f(0) = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty ; \quad (\text{Solución})$$

$$78. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \infty , \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 ; \quad f(0) = \frac{-1}{3}$$

$$79. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \\ 2 ; \quad f(0) = 0 (\text{Solución})$$

$$80. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty ; \\ f(0) = -1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \\ \infty ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

81. Las ondas de choque surgen en muchas aplicaciones físicas, que van desde supernovas hasta ondas de detonación. Aquí se muestra un gráfico de la densidad de una onda de choque con respecto a la distancia, x . Estamos interesados principalmente en la ubicación del frente del amortiguador, etiquetado x_{SF} en el diagrama. ([Solución](#))



- Evalúa $\lim_{x \rightarrow x_{SF}^+} \rho(x)$.
- Evalúa $\lim_{x \rightarrow x_{SF}^-} -\rho(x)$.
- Evalúa $\lim_{x \rightarrow x_{SF}} \rho(x)$. Explica los significados físicos detrás de tus respuestas.

82. Un entrenador de pista usa una cámara con un obturador rápido para estimar la posición de un corredor con respecto al tiempo. Aquí se da una tabla de los valores de posición del atleta frente al tiempo, donde x es la posición en metros del corredor y t es el tiempo en segundos. ¿Qué es $\lim_{t \rightarrow 2} x(t)$? ¿Qué significa físicamente?

t (segundos)	x (metros)
1.75	4.5
1.95	6.1
1.99	6.42
2.01	6.58
2.05	6.9
2.25	8.5

2.4 Las leyes de los límites

Objetivos de aprendizaje

- Reconocer las reglas básicas de los límites.
- Utilizar las reglas de límites para evaluar el límite de una función.

3. Evaluar el límite de una función factorizando.
4. Utilizar las reglas de los límites para evaluar el límite de un polinomio o función racional.
5. Evaluar el límite de una función factorizando o usando conjugados.
6. Evaluar el límite de una función mediante la regla del sandwich.

En la sección anterior, evaluamos los límites observando gráficos o construyendo una tabla de valores. En esta sección, establecemos leyes para calcular los límites y aprendemos cómo aplicar estas leyes.

En el Proyecto del estudiante al final de esta sección, tienes la oportunidad de aplicar estas leyes de límites para derivar la fórmula del área de un círculo adaptando un método ideado por el matemático griego Arquímedes.

Comenzamos reafirmando dos resultados de límites útiles de la sección anterior. Estos dos resultados, junto con las leyes de límites, sirven como base para calcular muchos límites.

2.4.1 Evaluación de límites con las leyes de los límites

Las dos primeras leyes de límites se establecieron en dos límites importantes y los repetimos aquí. Estos resultados básicos, junto con las otras leyes de límites, nos permiten evaluar los límites de muchas funciones algebraicas.

TEOREMA 2.4. Resultados básicos de límite

Para cualquier número real a y cualquier constante c ,

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad (2.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c \quad (2.15)$$



Ejemplo

2.13 Evaluación de un límite básico

Evalúa cada uno de los siguientes límites utilizando Resultados del límite básico.

- a. $\lim_{x \rightarrow 2} x$
- b. $\lim_{x \rightarrow 2} 5$



Solución

Ahora echamos un vistazo a las leyes de los límites. Las pruebas que sostienen estas reglas se omiten aquí.

TEOREMA 2.5. Propiedades de límites

Sea $f(x)$ y $g(x)$ funciones definidas para todo $x \neq a$ sobre algún intervalo abierto que contenga a . Supongamos que L y M son números reales tales que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Sea c una constante. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Ley de la suma para los límites:**

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$$

2. **Ley de la diferencia para límites:**

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$$

3. **Ley de la multiplicación por una constantes para límites:**

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL$$

4. **Ley del producto para límites:**

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$$

5. **Ley del cociente para límites:**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

para $M \neq 0$.

6. **Ley de potencia para límites:**

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n$$

para cada entero positivo n .

7. Ley de la raíz para los límites:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

para todo L si n es impar y para $L \geq 0$ si n es par y $f(x) \geq 0$

Ahora practiquemos la aplicación de estas reglas de límites para evaluar un límite.



Ejemplo

2.14 Evaluación de un límite mediante leyes de límites

Utiliza las leyes de límites para evaluar $\lim_{x \rightarrow -2} (4x + 2)$



Solución



Ejemplo

2.15 Usar leyes de límites repetidamente

Utiliza las leyes de los límites para evaluar $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 4}$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.11

Usa las leyes del límite para evaluar $\lim_{x \rightarrow 6} (2x - 1) \sqrt{x + 4}$. En cada paso, indica la ley de límites que se aplica.

2.4.2 Límites de funciones polinomiales y racionales

A estas alturas probablemente hayas notado que, en cada uno de los ejemplos anteriores, se ha dado el caso de que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Esto no siempre es cierto, pero es válido para todos los polinomios para cualquier elección de a y para todas las funciones racionales en todos los valores de a para los que esté definida la función racional.

TEOREMA 2.6. Límites de las funciones polinómicas y racionales

Sea $p(x)$ y $q(x)$ funciones polinomiales. Sea a un número real. Se cumple,

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} \quad \text{si } q(a) \neq 0$$

Para ver que este teorema es válido, consideremos el polinomio $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$. Al aplicar las leyes de la suma, la multiplicación por una constante y la potencia, terminamos con

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} p(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0) \\ &= c_n \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right)^n + c_{n-1} \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right)^{n-1} + \dots + c_0 \\ &= c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_0 = p(a)\end{aligned}$$

Ahora se sigue de la ley del cociente, que si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios para los cuales $q(a) \neq 0$, se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$



Ejemplo

2.16 Evaluación de un límite de una función racional

Evalúa el $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 4}$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.12

Evalúa $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^3 - 2x + 7)$.

2.4.3 Técnicas adicionales de evaluación de límites

Como hemos visto, podemos evaluar fácilmente los límites de los polinomios y los límites de algunas (pero no todas) funciones racionales mediante sustitución directa. Sin embargo, como vimos en la sección introductoria sobre límites, es posible que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ exista cuando $f(a)$ no esté definido. La siguiente observación nos permite evaluar muchos límites de este tipo:

Si para todo $x \neq a$, $f(x) = g(x)$ sobre algún intervalo abierto que contenga al punto a , entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Para comprender mejor esta idea, consideremos el límite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

La función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

y la función $g(x) = x + 1$ coincide con $f(x)$ para todos los valores de $x \neq 1$.

Los gráficos de estas dos funciones se muestran en la [Figura 2.24](#).

Vemos eso

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

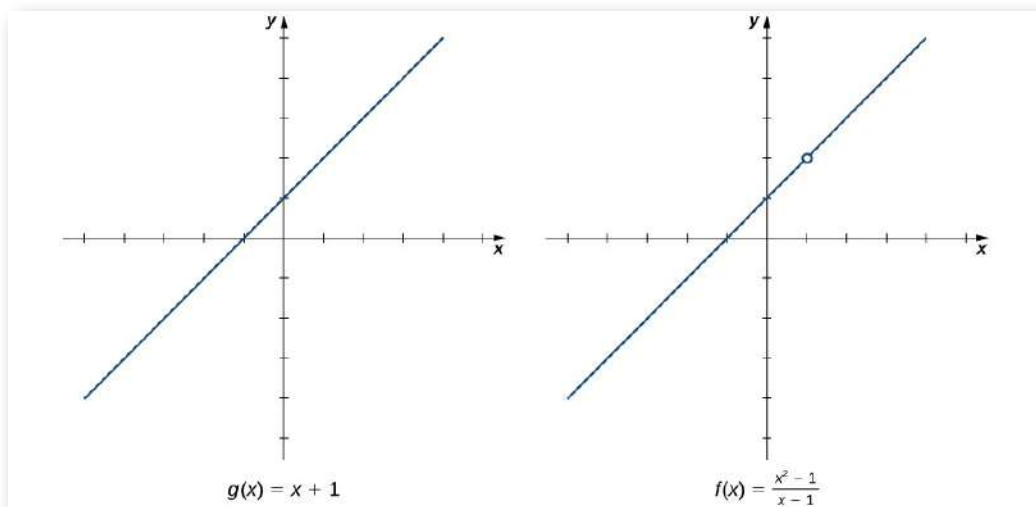


Figura 2.24 Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ coinciden para todo $x \neq 1$. Sus límites en 1 son iguales.

El límite tiene la forma $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, donde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. En este caso, decimos que $f(x)/g(x)$ tiene la forma indeterminada $0/0$.

La siguiente estrategia de resolución de problemas proporciona un esquema general para evaluar límites de este tipo.

Estrategia de resolución de problemas: Cálculo de un límite cuando $f(x)/g(x)$ tiene la forma indeterminada $0/0$

1. Primero debemos asegurarnos de que nuestra función tenga la forma adecuada y no se pueda evaluar inmediatamente utilizando las leyes de límites.
2. Después necesitamos encontrar una función que sea igual a $h(x) = f(x)/g(x)$ para todo $x \neq a$ en algún intervalo que contenga al punto a .

Para hacer esto, es posible que debamos probar uno o más de los siguientes pasos:

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios, debemos factorizar cada función y cancelar cualquier factor común.
- Si el numerador o denominador contiene una diferencia que involucra una raíz cuadrada, deberemos intentar multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado de la expresión que involucra la raíz cuadrada.
- Si $f(x)/g(x)$ es una fracción compleja, comenzamos por simplificarla.
- Por último, aplicamos las leyes de límites.

Los siguientes ejemplos muestran la aplicación de estas estrategias de resolución de problemas: el Ejemplo 2.17 ilustra la técnica de factorización y cancelación; el Ejemplo 2.18 el de la multiplicación por un conjugado y el Ejemplo 2.19, simplificar una fracción compleja.



Ejemplo

2.17 Evaluación de un límite factorizando y cancelando

Evalúa $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{2x^2 - 5x - 3}$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 2.13

Evalúa $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 9}$.



Ejemplo

2.18 Evaluar un límite multiplicando por un conjugado

Evalúa $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 2.14

Evalúa $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.



Ejemplo

2.19 Evaluar un límite simplificando una fracción compleja

Evalúa $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}}{x-1}$.



En la siguiente escena interactiva incorporamos un applet que permite aplicar esta estrategia calculando los valores que se consideren y representa la gráfica de la función.

Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 15} \frac{x-15}{\sqrt{x}-\sqrt{15}}$

Explicación paso a paso

1 Intentamos evaluar la función en $x=15$

$$\frac{15-15}{\sqrt{15}-\sqrt{15}} = \frac{0}{0}$$

y obtenemos una indeterminación.

2 Así que multiplicamos el numerador y el denominador por el binomio conjugado de $(\sqrt{x}-\sqrt{15})$, que es $(\sqrt{x}+\sqrt{15})$ y efectuamos la multiplicación en el denominador.

$$\frac{x-15}{\sqrt{x}-\sqrt{15}} = \frac{(x-15)(\sqrt{x}+\sqrt{15})}{(\sqrt{x}-\sqrt{15})(\sqrt{x}+\sqrt{15})} = \frac{(x-15)(\sqrt{x}+\sqrt{15})}{x-15}$$

3 Para $x \neq 15$ podemos simplificar

$$\frac{(x-15)(\sqrt{x}+\sqrt{15})}{x-15} = \sqrt{x}+\sqrt{15}$$

4 La función $\sqrt{x}+\sqrt{15}$ es continua en 15, así que

$$\lim_{x \rightarrow 15} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{15}}{x-15} = \lim_{x \rightarrow 15} \sqrt{x}+\sqrt{15} = \sqrt{15}+\sqrt{15} = 2\sqrt{15} \approx 7.75$$

-

+

Ver grafica

Otro ejemplo

El Ejemplo 2.20 no cae claramente en ninguno de los patrones establecidos en los ejemplos anteriores. Sin embargo, con un poco de creatividad, todavía podemos utilizar estas mismas técnicas.

285



Pregunta
de control

Cuestión 2.15

Evalúa $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\frac{1}{x+2} + 1}{x+3}$.



Ejemplo

2.20 Evaluación de un límite cuando las
leyes de límites no se aplican

Evalúa $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{5}{x(x-5)} \right)$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 2.16

Evalúa $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2-3x-3} \right)$.

Repasemos ahora los límites laterales. Las modificaciones simples en las leyes de límites nos permiten aplicarlas a límites laterales. Por ejemplo, para aplicar las leyes del límite a un límite de la forma $\lim_{x \rightarrow a^-} h(x)$, requerimos que la función $h(x)$ se defina sobre un intervalo abierto de la forma (b, a) ; para un límite de la forma $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x)$, requerimos que la función $h(x)$ se defina sobre un intervalo abierto de la forma (a, c) . El Ejemplo 2.21 ilustra este punto.



Ejemplo

2.21 Evaluación de un límite lateral utilizando las leyes de límites

Evalúa cada uno de los siguientes límites, si es posible.

a. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x - 3}$

b. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x - 3}$



Solución

En el Ejemplo 2.22 obtenemos los límites laterales de una función definida por partes y usamos estos límites para sacar una conclusión sobre el límite de la misma función.



Ejemplo

2.22 Evaluación de un límite utilizando las leyes de límites

Para $\begin{cases} 4x - 3 & \text{si } x < 2 \\ (x - 3)^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, evalúa cada uno de los siguientes límites:

a. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 2.17

Representa $\begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ x^3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ y evalúa $\lim_{x \rightarrow .1^-} f(x)$.

Ahora enfocamos nuestra atención en evaluar un límite de la forma $\lim_{x \rightarrow .a} \frac{f(x)}{g(x)}$, donde $\lim_{x \rightarrow .a} f(x) = \lim_{x \rightarrow .a} g(x) = 0$. Es decir, $f(x)/g(x)$ tiene la forma $K/0$, con $K \neq 0$ en a .



Ejemplo

2.23 Evaluación de un límite de la forma $K/0$, $K \neq 0$

Evalúa $\lim_{x \rightarrow .2^-} \frac{x-3}{x^2-2x}$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 2.18

Evalúa $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}$.

2.4.4 Teorema del sandwich

Las técnicas que hemos desarrollado hasta ahora funcionan muy bien para funciones algebraicas, pero todavía somos incapaces de evaluar los límites de funciones trigonométricas muy básicas. El siguiente teorema, llamado **teorema de sandwich**, resulta muy útil para establecer límites trigonométricos básicos. Este teorema nos permite calcular límites al “encajar” una función, con un límite en un punto a que es desconocido, entre dos funciones que tienen un límite conocido común en a . [Figura 2.27](#) ilustra esta idea.

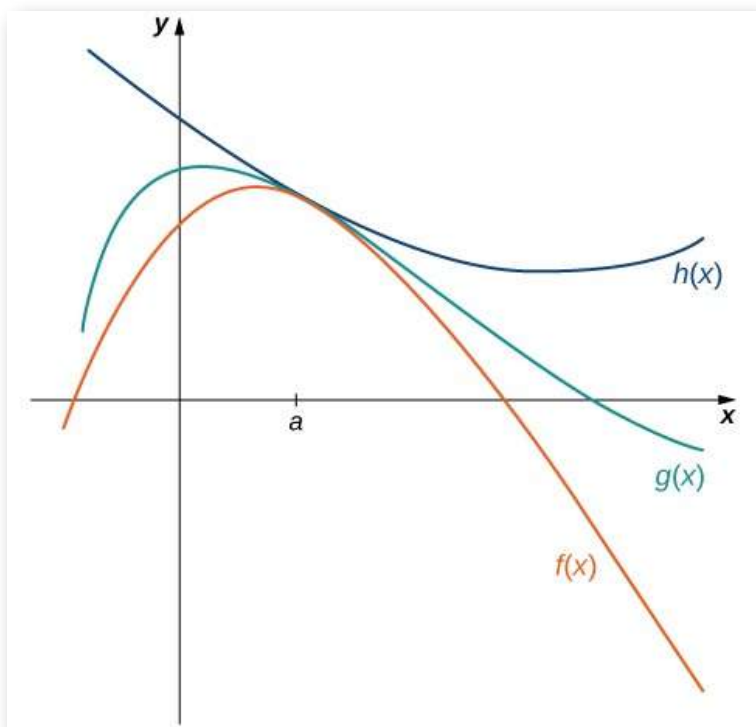


Figura 2.27 El teorema del sandwich se aplica cuando $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$.

TEOREMA 2.7. La regla del sandwich

Sea $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ debe definirse para todo $x \neq a$ sobre un intervalo abierto que contiene al punto a . Si $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$ para todo $x \neq a$ en un intervalo abierto que contiene al punto a y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ donde L es un número real, entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.



Ejemplo

2.24 Aplicar el teorema de la compresión

Aplicar el teorema del sandwich para evaluar $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos(x)$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.19

Utiliza el teorema del sandwich para evaluar $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Ahora usamos el teorema del sandwich para abordar varios límites muy importantes. Aunque esta discusión es algo extensa, estos límites resultan muy importantes para el desarrollo del material tanto en la siguiente sección como en el próximo capítulo. El primero de estos límites es $\lim_{\theta \rightarrow 0} \operatorname{sen}\theta$. Consideremos el círculo unitario que se muestra en la [Figura 2.29](#).

En esta figura, vemos que $\text{sen}\theta$ es la coordenada y en el círculo unitario y corresponde al segmento de la figura que se muestra en azul. La medida en radianes del ángulo θ es la longitud del arco que abarca en el círculo unitario. Por tanto, vemos que para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, se cumple $0 < \text{sen}\theta < \theta$.

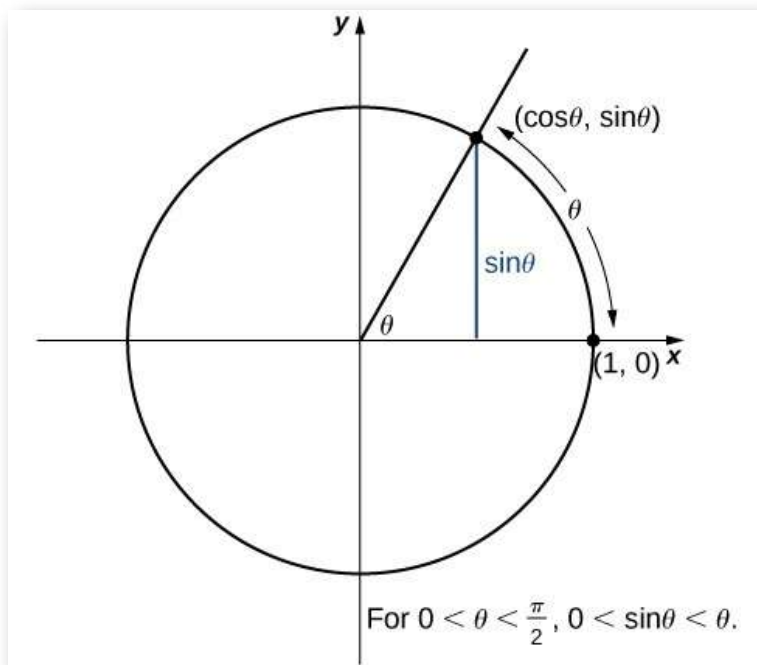


Figura 2.29 El seno se muestra como el segmento azul considerando el círculo unitario.

Dado que $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} 0 = 0$ y $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \theta = 0$, utilizando el teorema del sandwich concluimos que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \text{sen}\theta = 0$$

Para ver que $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \text{sen}\theta = 0$ también, observamos que para $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, $0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto, $0 < \sin(-\theta) < -\theta$.

En consecuencia, $0 < -\text{sen}\theta < -\theta$. De ello se deduce que $0 > \text{sen}\theta > \theta$. Una aplicación del teorema del sandwich produce el límite deseado. Por lo tanto, como $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \text{sen}\theta = 0$ y $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \text{sen}\theta = 0$,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \text{sen}\theta = 0 \quad (2.16)$$

Luego, usando la identidad $\cos \theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}$ para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, vemos que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta} = 1 \quad (2.17)$$

Ahora echamos un vistazo a un límite que juega un papel importante en capítulos posteriores, se trata de $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\theta}{\theta}$. Para evaluar este límite, usamos el círculo unitario en la [Figura 2.30](#). Observamos que esta figura agrega un triángulo adicional a la Figura 2.30. Vemos que la longitud del lado opuesto al ángulo θ en este nuevo triángulo es $\tan \theta$. Así, vemos que para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, se cumple $\text{sen}\theta < \theta < \tan \theta$.

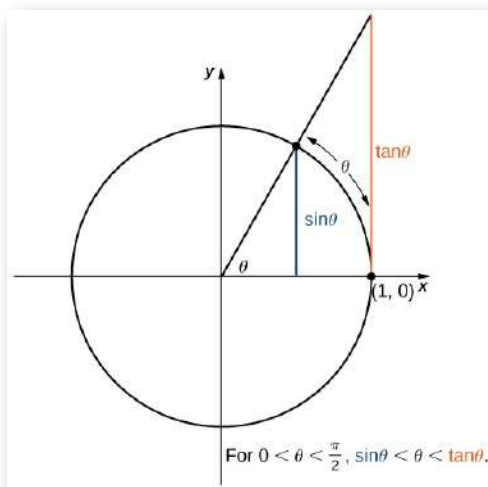


Figura 2.30 Tanto el seno como la tangente se muestran como segmentos en el círculo unitario.

Dividiendo por $\text{sen}\theta$ en todos los miembros de la desigualdad, obtenemos

$$1 < \frac{\theta}{\text{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

De manera equivalente, tenemos

$$1 > \frac{\text{sen}\theta}{\theta} > \cos\theta$$

Dado que $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} 1 = 1 = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos\theta$, concluimos que $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}\theta}{\theta} = 1$. Al aplicar una manipulación similar a la utilizada, podemos demostrar que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Así,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\theta}{\theta} = 1 \quad (2.18)$$

En el Ejemplo 2.25 usamos este límite para establecer $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta} = 0$. Este límite también resulta útil en capítulos posteriores.



Ejemplo

2.25 Evaluación de un límite trigonométrico importante

Evalúa $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta} = 0$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.20

Evalúa $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Derivar la fórmula para el área de un círculo

Algunas de las fórmulas geométricas que damos por sentadas hoy en día se obtuvieron primero mediante métodos que anticipan algunos de los métodos de cálculo. El matemático griego Arquímedes (287-212 a. C.) fue particularmente inventivo, y utilizó polígonos inscritos dentro de círculos para aproximar el área del círculo a medida que aumentaba el número de lados del polígono. Nunca se le ocurrió la idea de un límite, pero podemos usar esta idea para ver qué podrían haber predicho sus construcciones geométricas sobre el límite.

Podemos estimar el área de un círculo calculando el área de un polígono regular inscrito. Piensa en el polígono regular como si estuviera formado por n triángulos. Al tomar el límite cuando el ángulo del vértice de estos triángulos llega a cero, puede obtener el área del círculo.

Para ver esto, sigue los siguientes pasos:

1. Expresa la altura h y la base b del triángulo isósceles en la [Figura 2.31](#) en términos de θ y r .

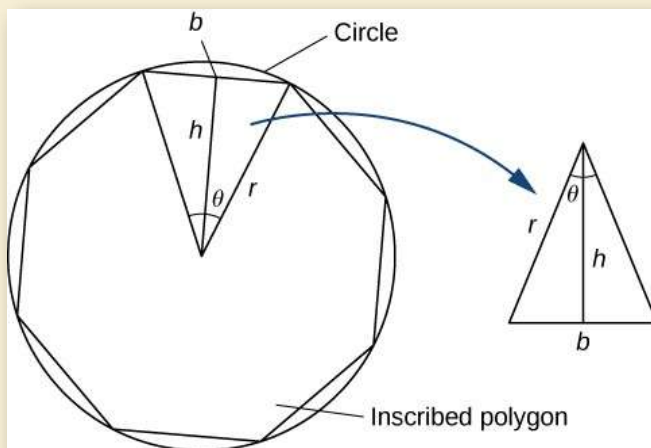


Figura 2.31 .

2. Usando las expresiones que obtuviste en el paso 1, expresa el área del triángulo isósceles en términos de θ y r . Indicación: Sustituye $(1/2)\text{sen}\theta$ por $\text{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2)$ en tu expresión.
3. Si un polígono regular de n lados está inscrito en un círculo de radio r , encuentra una relación entre θ y n . Resuelve esto para n . Ten en cuenta que hay 2π radianes en un círculo. Indicación: Utiliza radianes, no grados.
4. Encuentra una expresión para el área del polígono de n lados en términos de r y θ .
5. Para encontrar una fórmula para el área del círculo, encuentra el límite de la expresión en el paso 4 cuando θ tiende a cero. Indicación: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\theta}{\theta} = 1$.

La técnica de estimar áreas de regiones utilizando polígonos se revisa en el apartado de introducción a la integración.

2.4.5 Ejercicios



En los siguientes ejercicios, utiliza las leyes de límites para evaluar cada límite. Justifica cada paso indicando las leyes de límite apropiadas.

83. $\lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 - 2x + 3)$ (Solución)

84. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 + 5}{4 - 7x}$

85. $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 - 6x + 3}$ (Solución)

86. $\lim_{x \rightarrow -1} (9x + 1)^2$



En los siguientes ejercicios, utiliza la sustitución directa para evaluar cada límite.

87. $\lim_{x \rightarrow 7} x^2$ (Solución)

88. $\lim_{x \rightarrow -2} (4x^2 - 1)$

89. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sin x}$ (Solución)

90. $\lim_{x \rightarrow 2} e^{2x - x^2}$

91. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 7x}{x + 6}$ (Solución)

92. $\lim_{x \rightarrow 3} \ln e^{3x}$



En los siguientes ejercicios, utiliza la sustitución directa para mostrar que cada límite conduce a la forma indeterminada $0/0$. Luego, evalúa el límite.

93. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ (Solución)

94. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 2x}$

95. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{3x - 18}{2x - 12}$ (Solución)

96. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$

97. $\lim_{t \rightarrow 9} \frac{t - 9}{\sqrt{t} - 3}$ (Solución)

98. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h}$ donde a es una constante de valor real distinta de cero.

99. $\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\tan \theta}$ (Solución)

100. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

101. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{2x - 1}$ (Solución)

102. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+4} - 1}{x+3}$



En los siguientes ejercicios, utiliza la sustitución directa para obtener una expresión indeterminada. Luego, usa el método del Ejemplo 2.23 para simplificar la función para ayudar a determinar el límite.

$$103. \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2} \text{ (Solución)}$$

$$104. \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$$

$$105. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2} \text{ (Solución)}$$

$$106. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$$



En los siguientes ejercicios, supón que $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 6} g(x) = 9$, y $\lim_{x \rightarrow 6} h(x) = 6$. Utiliza estos tres hechos y las leyes de límites para evaluar cada límite.

$$107. \lim_{x \rightarrow 6} 2f(x)g(x) \text{ (Solución)}$$

$$108. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{g(x) - 1}{f(x)}$$

$$109. \lim_{x \rightarrow 6} \left(f(x) + \frac{1}{3}g(x) \right) \text{ (Solución)}$$

$$110. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{[h(x)]^3}{2}$$

$$111. \lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{g(x) - f(x)} \text{ (Solución)}$$

$$112. \lim_{x \rightarrow 6} x \cdot h(x)$$

$$113. \lim_{x \rightarrow 6} (x + 1) \cdot f(x) \text{ (Solución)}$$

$$114. \lim_{x \rightarrow 6} [f(x) \cdot g(x) - h(x)]$$



[T] En los siguientes ejercicios, usa una calculadora para dibujar el gráfico de cada función definida por partes y estudie el gráfico para evaluar los límites dados.

$$115. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ x + 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

(Solución)

$$116. g(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

$$117. h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ 3 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

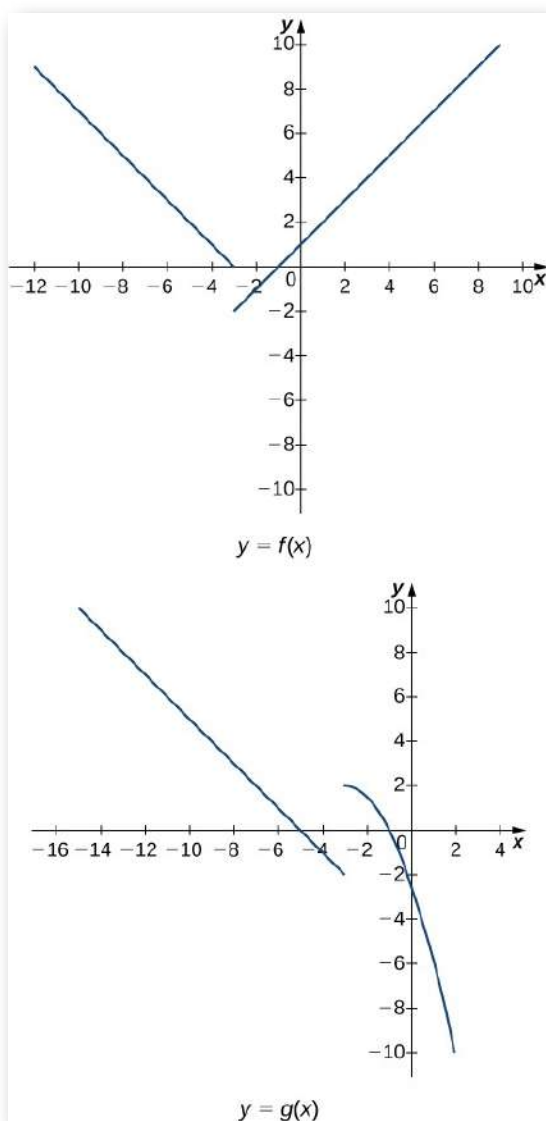
a. $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$

(Solución)



En los siguientes ejercicios, utiliza los siguientes gráficos y las leyes de límites para evaluar cada límite.



118.

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} (f(x) + g(x))$$

$$119. \lim_{x \rightarrow -3^-} (f(x) - 3g(x)) \text{ (Solución)}$$

$$120. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{3}$$

$$121. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2+g(x)}{f(x)} \text{ (Solución)}$$

$$122. \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]^2$$

$$123. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{f(x) - g(x)} \text{ (Solución)}$$

$$124. \lim_{x \rightarrow -7} (x \cdot g(x))$$

$$125. \lim_{x \rightarrow -9} (x \cdot f(x) + 2 \cdot g(x)) \text{ (Solución)}$$

126. [T] ¿Verdadero o falso? Si $2x - 1 \leq g(x) \leq x^2 - 2x + 3$, entonces $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$.



Para los siguientes problemas, evalúa el límite utilizando el teorema del sandwich. Usa una calculadora para representar gráficamente las funciones $f(x)$, $g(x)$, y $h(x)$ cuando sea posible.

$$127. [T] \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^2 \cos\left(\frac{1}{\theta}\right) \text{ (Solución)}$$

$$128. \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \text{ donde } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x^2 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

129. [T] En física, la magnitud de un campo eléctrico generado por una carga puntual a una distancia r en el vacío se rige por la ley de Coulomb:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

donde E representa la magnitud del campo eléctrico, q es la carga de la partícula, r es la distancia entre la partícula y donde se mide la fuerza del campo, y $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ es la constante de Coulomb: $8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$. (**Solución**)

- Usa una calculadora gráfica para representar la gráfica de $E(r)$ dado que la carga de la partícula es $q = 10^{-10}$.
- Evaluar $\lim_{r \rightarrow 0^+} E(r)$. ¿Cuál es el significado físico de esta cantidad? ¿Es físicamente relevante? ¿Por qué estás evaluando el límite por la derecha?

130. [T] La densidad de un objeto está dada por su masa dividida por su volumen: $\rho = m/V$.

- Utiliza una calculadora para trazar el volumen en función de la densidad ($V = m/\rho$), asumiendo que la masa es 8 kg ($m = 8$).
- Evalúa $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V(\rho)$ y explicar el significado físico.

2.5 Continuidad

Objetivos de aprendizaje

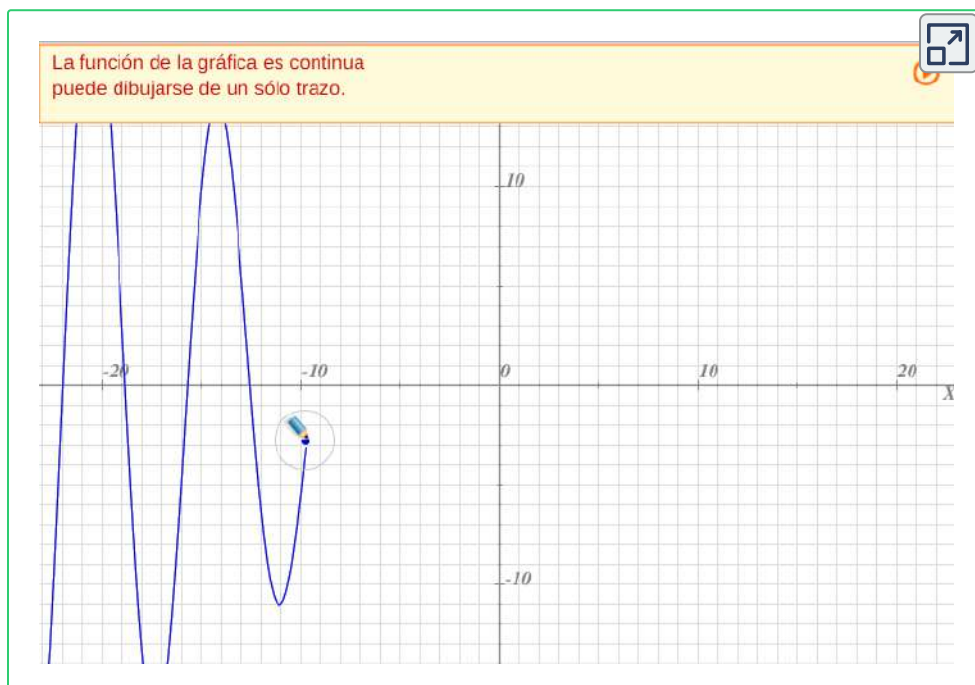
- Explicar las tres condiciones para la continuidad en un punto.
- Describir tres tipos de discontinuidades.
- Definir continuidad en un intervalo.

4. Explicar las tres condiciones para la continuidad en un punto.
5. Describir tres tipos de discontinuidades.
6. Definir continuidad en un intervalo.
7. Enunciar el teorema de los límites de funciones compuestas.
8. Proporcionar un ejemplo del teorema del valor intermedio.

Muchas funciones tienen la propiedad de que sus gráficas se pueden trazar con un lápiz sin levantar el lápiz de la página. Estas funciones se denominan **continuas** aunque esta la definición formal de este término no significa exactamente esto.



En la siguiente escena interactiva se representa la idea intuitiva de continuidad aunque hay funciones continuas para las cuales esto no ocurre.



Nota: Hay funciones continuas en las que esta idea intuitiva no es correcta como por ejemplo la función siguiente que es continua en el origen y, sin embargo, no se puede representar su gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x^2 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Otras funciones tienen puntos en los que se produce una ruptura en el gráfico, pero satisfacen esta propiedad en los intervalos contenidos en sus dominios. Son continuas en estos intervalos y se dice que tienen una discontinuidad en un punto donde ocurre una ruptura.

Comenzamos nuestra investigación de la continuidad explorando lo que significa que una función tenga continuidad en un punto. Intuitivamente, una función es continua en un punto particular si no hay una ruptura en su gráfico en ese punto.

2.5.1 Continuidad en un punto

Antes de ver una definición formal de lo que significa que una función sea continua en un punto, consideremos varias funciones que no cumplen con nuestra noción intuitiva de lo que significa ser continua en un punto. Luego creamos una lista de condiciones que previenen tales fallas.

Nuestra primera función de interés se muestra en la [Figura 2.32](#). Vemos que la gráfica de $f(x)$ tiene un "agujero" en a . De hecho, $f(a)$ no está definida. Como mínimo, para que $f(x)$ sea continua en a , necesitamos la siguiente condición:

- i. $f(a)$ debe estar definida

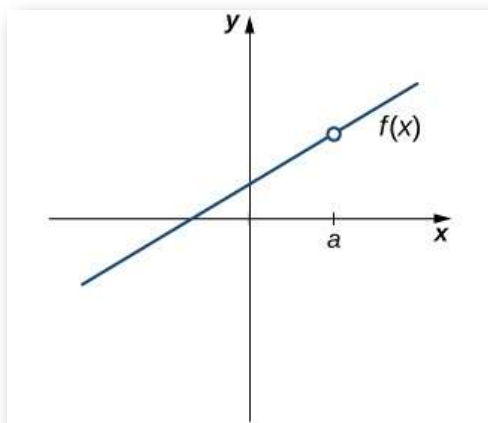


Figura 2.32 La función $f(x)$ no es continua en a porque $f(a)$ no está definida.

Sin embargo, como vemos en la [Figura 2.33](#), esta condición por sí sola es insuficiente para garantizar la continuidad en el punto a . Aunque $f(a)$ está definida, la función tiene un salto en a . En este ejemplo, la brecha existe porque no existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Debemos agregar otra condición para la continuidad en a , a saber,

ii. debe existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

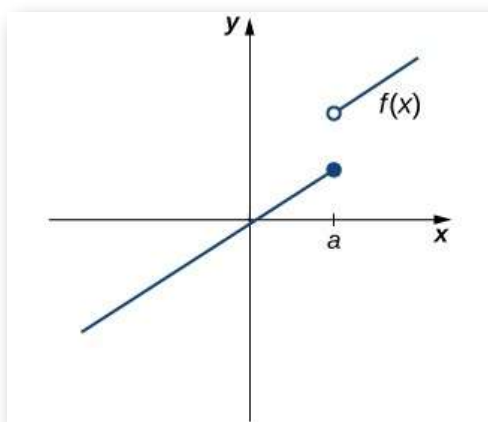


Figura 2.33 La función $f(x)$ no es continua en a porque $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe.

Sin embargo, como vemos en la [Figura 2.34](#), estas dos condiciones por sí mismas no garantizan la continuidad en un punto. La función en esta figura satisface nuestras dos primeras condiciones, pero aún no es continua en a . Debemos agregar una tercera condición a nuestra lista:

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

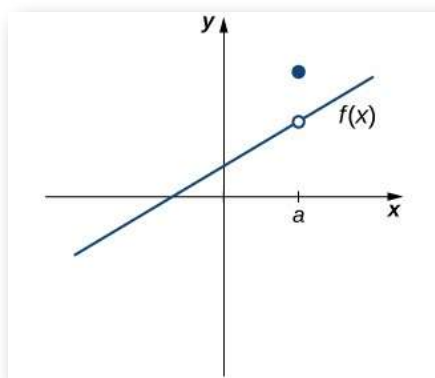


Figura 2.34 La función $f(x)$ no es continua en a porque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

Ahora juntamos nuestra lista de condiciones y formamos una definición de continuidad en un punto.

DEFINICIÓN

Una función $f(x)$ es **continua en un punto** a si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- i. $f(a)$ está definido
- ii. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- iii. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Una función es **discontinua en un punto** a si deja de ser continua en a .

El siguiente procedimiento se puede utilizar para analizar la continuidad de una función en un punto utilizando esta definición.

Estrategia de resolución de problemas: Determinación de la continuidad en un punto

1. Verifica si $f(a)$ está definida. Si $f(a)$ no estuviera definida, no necesitamos ir más lejos, la función no sería continua en a . Si $f(a)$ está definido, se continúa con el paso 2.
2. Calcula $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. En algunos casos, es posible que debamos hacer esto calculando primero $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe (es decir, no es un número real), entonces la función no es continua en a y el problema está resuelto. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, hay que continuar con el paso 3.
3. Compara $f(a)$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$, entonces la función no es continua en a . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, entonces la función es continua en a .

Los siguientes tres ejemplos demuestran cómo aplicar la definición para determinar si una función es continua en un punto dado. Estos ejemplos ilustran situaciones en las que cada una de las condiciones para la continuidad en la definición puede o no cumplirse.



Ejemplo

2.26 Determinación de la continuidad en un punto, condición 1

Usando la definición, determina si la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ es continua en $x = 2$. Justifica la conclusión.



Solución



Ejemplo

2.27 Determinación de la continuidad en un punto, condición 2

Usando la definición, determina si la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x \leq 3 \\ 4x - 8 & \text{si } x < 3 \end{cases}$ es continua en $x = 3$. Justifica la conclusión.



Solución



Ejemplo

2.28 Determinación de la continuidad en un punto, condición 3

Usando la definición, determina si la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.21

Usando la definición, determina si la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ -x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

es continua en $x = 1$. Si la función no es continua en 1, indica la condición de continuidad en un punto que no se verifica.

Aplicando la definición de continuidad y teoremas previamente establecidos sobre la evaluación de límites, podemos enunciar el siguiente teorema.

TEOREMA 2.8. Continuidad de polinomios y funciones racionales

Los polinomios y las funciones racionales son continuas en todos los puntos de su dominio.

Prueba

Anteriormente, mostramos que si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$ para cada polinomio $p(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$ siempre que $q(a) \neq 0$.

Por tanto, los polinomios y las funciones racionales son continuas en su dominio.

Ahora aplicamos la continuidad de polinomios y funciones racionales para determinar los puntos en los que una función racional dada es continua.



Ejemplo

2.29 Continuidad de una función racional

¿Para qué valores de x es $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$ continua?



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 2.22

¿Para qué valores de x es $f(x) = 3x^4 - 4x^2$ continua?

2.5.2 Tipos de discontinuidad

Como hemos visto en el Ejemplo 2.26 y en el Ejemplo 2.27, las discontinuidades pueden ocurrir en distintas situaciones. Clasificamos los tipos de discontinuidades que hemos visto hasta ahora como **discontinuidades removibles o evitables**, **discontinuidades infinitas** o **discontinuidades de salto**.

Intuitivamente, una discontinuidad removible es una discontinuidad para la cual hay un "agujero" en el gráfico, una discontinuidad de salto es una discontinuidad no infinita para la cual las secciones a ambos lados de la función no se encuentran, y una discontinuidad infinita es una discontinuidad ubicada en una asíntota vertical.

La [Figura 2.37](#) ilustra las diferencias en este tipo de discontinuidades. Aunque estos términos brindan una forma práctica de describir tres tipos comunes de discontinuidades, tenga en cuenta que no todas las discontinuidades encajan perfectamente en estas categorías.

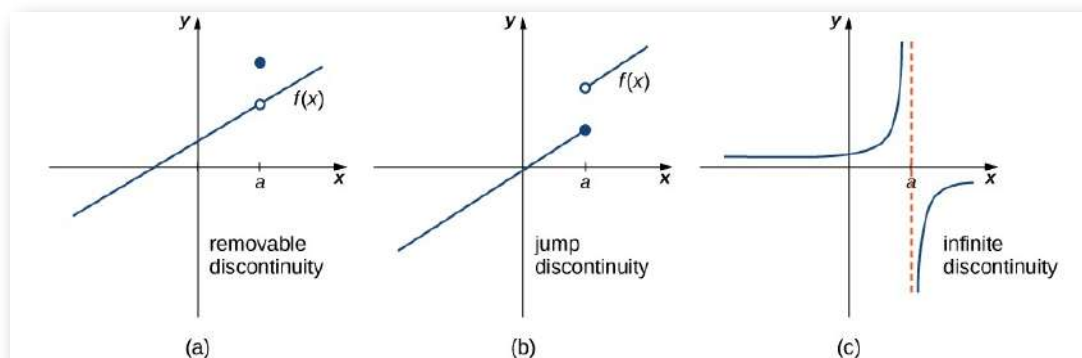


Figura 2.37 Las discontinuidades se clasifican en (a) removibles, (b) saltos o (c) infinitas.

Estas tres discontinuidades se definen formalmente de la siguiente manera:

DEFINICIÓN

Si $f(x)$ es discontinua en a , entonces

1. f tiene una **discontinuidad removible o evitable** en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.

Nota: cuando afirmamos que existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, queremos decir que el valor del límite es L siendo L un número real.

2. f tiene una **discontinuidad de salto** en a si existen $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existen, pero no coinciden.

Nota: cuando establecemos que $\lim_{x \rightarrow a^-}$ y $\lim_{x \rightarrow a^+}$ ambos existen, queremos decir que ambos son números reales y que ninguno toma los valores $\pm\infty$.

3. f tiene una **discontinuidad infinita** en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$.



Ejemplo

2.30 Clasificación de una discontinuidad

En el Ejemplo 2.26, mostramos que

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

es discontinua en $x = 2$. Clasifica esta discontinuidad como removible, salto o infinito.



Solución



Ejemplo

2.31 Clasificación de una discontinuidad

En el Ejemplo 2.27, mostramos que

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x \leq 3 \\ 4x - 8 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

es discontinua en $x = 3$. Clasifica esta discontinuidad como removible, salto o infinito.



Solución



Ejemplo

2.32 Clasificación de una discontinuidad

Determina si $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ es continua en -1 . Si la función es discontinua en -1 , clasifica la discontinuidad como removible, salto o infinita.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.23

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

determina si f es continua en 1. Si no lo fuera, clasifica la discontinuidad como removible, salto o infinita.

2.5.3 Continuidad en un intervalo

Ahora que hemos explorado el concepto de continuidad en un punto, ampliamos esa idea a la continuidad en un intervalo. A medida que desarrollamos esta idea para diferentes tipos de intervalos, puede ser útil tener en cuenta la idea intuitiva de que una función es continua en un intervalo si podemos usar un lápiz para trazar la función entre dos puntos cualesquiera en el intervalo sin levantar el lápiz del papel. En preparación para definir la continuidad en un intervalo, comenzamos mirando la definición de lo que significa que una función sea continua por la derecha en un punto y continua por la izquierda en un punto.

DEFINICIÓN

Continuidad desde la derecha y desde la izquierda

1. Una función $f(x)$ se dice que es **continua por la derecha** en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
2. Una función $f(x)$ se dice que es continua por la izquierda en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Una función es **continua en un intervalo abierto** si es continua en todos los puntos del intervalo. Una función $f(x)$ es **continua en un intervalo cerrado** de la forma $[a, b]$ si es continua en cada punto en (a, b) y es continua a la derecha en a y es continua a la izquierda en b .

De manera análoga, una función $f(x)$ es continua en un intervalo de la forma $(a, b]$ si es continua en (a, b) y es continua por la izquierda en b . La continuidad sobre otros tipos de intervalos se define de manera similar.

Requeriendo que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ se asegura que podemos trazar la gráfica de la función desde el punto $(a, f(a))$ hasta el punto $(b, f(b))$ sin levantar el lápiz. Si, por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$, necesitaríamos levantar nuestro lápiz para saltar de $f(a)$ a la gráfica del resto de la función sobre $(a, b]$.



Ejemplo

2.33 Continuidad en un intervalo

Determina si

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 2x}$$

es continua.



Solución



Ejemplo

2.34 Continuidad en un intervalo

Indica el intervalo o intervalos en los que la función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.24

Indica los intervalos en los que la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ es continua.

El teorema de la función compuesta nos permite ampliar nuestra capacidad para calcular límites. En particular, este teorema permitirá demostrar que las funciones trigonométricas son continuas en sus dominios.

TEOREMA 2.9. Función compuesta

Si $f(x)$ es continua en L y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(L)$$

Antes de pasar al Ejemplo 2.35, recuerda que en la sección de leyes de límites, mostramos $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \cos 0$. En consecuencia, sabemos que $f(x) = \cos x$ es continua en 0. En el Ejemplo 2.35 vamos ver cómo combinar este resultado con el teorema de la función compuesta.



Ejemplo

2.35 Límite de una función coseno compuesta

Evalúa $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.25

Evalúa $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin (x - \pi)$.

La demostración del siguiente resultado usa el teorema de la función compuesta, así como la continuidad de $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ en el punto 0 para mostrar que las funciones trigonométricas son continuas en todos sus dominios.

TEOREMA 2.10. Continuidad de las funciones trigonométricas
Las funciones trigonométricas son continuas en sus dominios.

Prueba

Comenzamos demostrando que $\cos x$ es continua en cada número real. Para hacer esto, debemos mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ para todos los valores de a .

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \lim_{x \rightarrow a} \cos((x - a) + a) \quad (1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (\cos(x - a) \cos a - \operatorname{sen}(x - a) \operatorname{sena}) \quad (2)$$

$$= \cos\left(\lim_{x \rightarrow a} (x - a)\right) \cos a - \operatorname{sen}\left(\lim_{x \rightarrow a} (x - a)\right) \operatorname{sena} \quad (3)$$

$$= \cos(0) \cos a - \operatorname{sen}(0) \operatorname{sena} \quad (4)$$

$$= 1 \cdot \cos a - 0 \cdot \operatorname{sena} = \cos a$$

(1) escribimos $x = x - a + a$

(2) aplicamos la expresión del coseno de una suma

(3) aplicamos que las funciones seno y coseno son continuas en el punto

(4) evaluamos $\cos(0)$ y $\operatorname{sen}(0)$

La prueba de que $\operatorname{sen} x$ es una función continua en cada número real a es análoga. Debido a que las funciones trigonométricas restantes pueden expresarse en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, su continuidad se sigue de la ley del límite del cociente.

Como puedes ver, el teorema de la función compuesta permite demostrar la continuidad de las funciones trigonométricas.

2.5.4 El Teorema del Valor Intermedio

Las funciones que son continuas en intervalos de la forma $[a, b]$, donde a y b son números reales, poseen muchas propiedades útiles. A lo largo de nuestro estudio del cálculo, encontraremos muchos teoremas relacionados con tales funciones. El primero de estos teoremas es el **Teorema del valor intermedio**.

TEOREMA 2.11. Teorema del valor intermedio o de Bolzano

Sea f continua sobre un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Si z es cualquier número real entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces hay un número c en $[a, b]$ que satisface $f(c) = z$ ([Figura 2.38](#)).

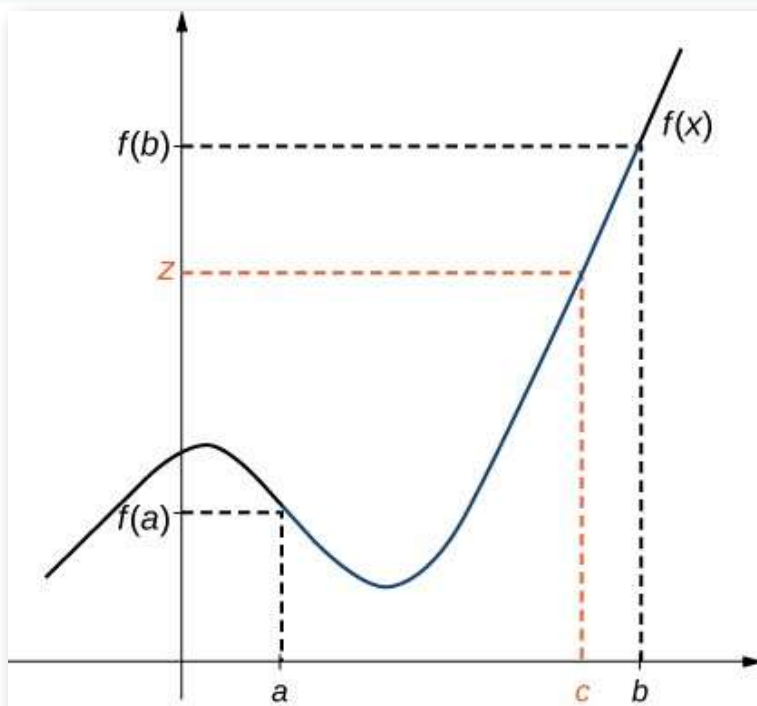


Figura 2.38 Hay un número $c \in (a, b)$ que satisface $f(c) = z$.



Ejemplo

2.36 Aplicación del teorema del valor intermedio

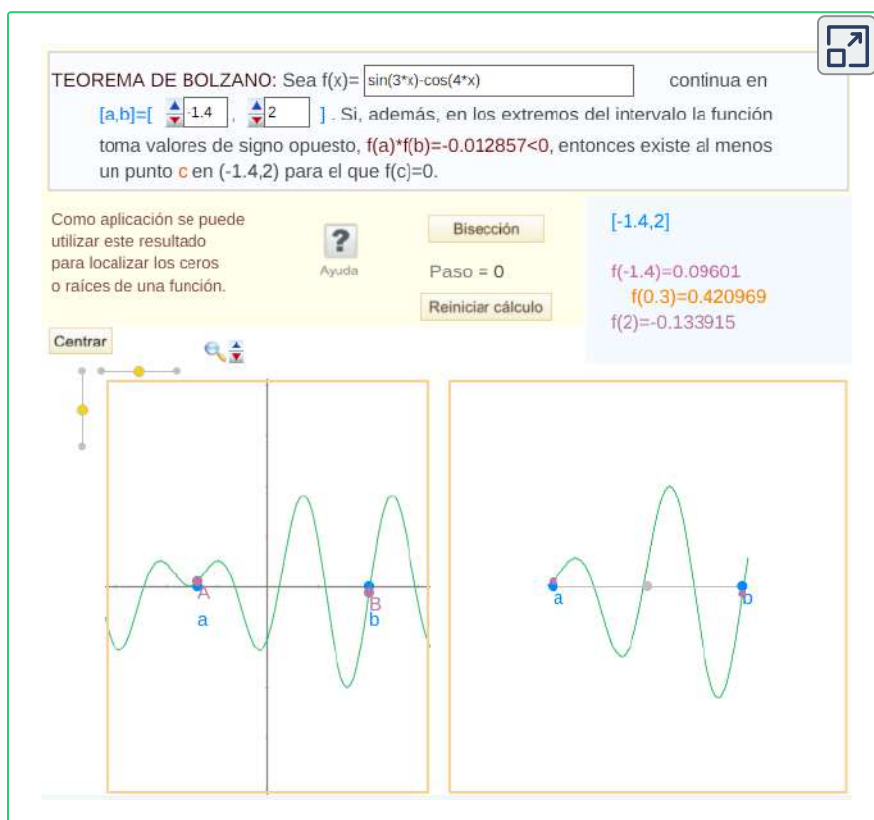
Demuestre que $f(x) = x - \cos x$ tiene al menos un cero.



Solución



En la siguiente escena interactiva del Proyecto Descartes puedes ver cómo la aplicación del resultado varias veces permite encontrar los ceros de una función mediante lo que se conoce como el **método de la bisección**.





Ejemplo

2.37 ¿Cuándo se puede aplicar el teorema del valor intermedio?

Si $f(x)$ es continua sobre $[0, 2]$, $f(0) > 0$ y $f(2) > 0$, ¿podemos usar el teorema del valor intermedio para concluir que $f(x)$ no tiene ceros en el intervalo $[0, 2]$? Justifica la respuesta.



Solución



Ejemplo

2.38 ¿Cuándo se puede aplicar el teorema del valor intermedio?

Para $f(x) = 1/x$, $f(-1) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$. ¿Podemos concluir que $f(x)$ tiene cero en el intervalo $[-1, 1]$?



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.26

Demuestra que $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$ tiene un cero en el intervalo $[0, 1]$.

2.5.5 Ejercicios



Para los siguientes ejercicios, determina los puntos, si los hay, en los que cada función es discontinua. Clasifica cualquier discontinuidad como salto, removible, infinito u otro.

131. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (**Solución**)

132. $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$

133. $f(x) = \frac{x}{x^2-x}$ (**Solución**)

134. $g(t) = t^{-1} + 1$

135. $f(x) = \frac{5}{e^x-2}$ (**Solución**)

136. $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$

137. $h(x) = \tan 2x$ (**Solución**)

138. $f(t) = \frac{t+3}{t^2+5t+6}$



Para los siguientes ejercicios, decide si la función es continua en el punto dado. Si es discontinuo, determina qué tipo de discontinuidad tiene.

139. $f(x) = \frac{2x^2-5x+3}{x-1}$ en $x = 1$ (**Solución**)

140. $h(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\operatorname{tg}\theta}$ en $\theta = \pi$

$$141. \quad g(u) = \begin{cases} \frac{6u^2+u-2}{2u-1} & \text{si } u \neq \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \text{si } u = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ en } u = \frac{1}{2} \text{ (Solución)}$$

$$142. \quad f(y) = \frac{\operatorname{sen}(\pi y)}{\operatorname{tg}(\pi y)} \text{ en } y = 1$$

$$143. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - e^x & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ en } x = 0 \text{ (Solución)}$$

$$144. \quad f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} x & \text{si } x < \pi \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ en } x = \pi$$



En los siguientes ejercicios, encuentra los valores de k que hacen que cada función sea continua en el intervalo dado.

$$145. \quad f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < k \\ 2x - 3 & \text{si } k \leq x \leq 8 \end{cases} \text{ (Solución)}$$

$$146. \quad f(\theta) = \begin{cases} \operatorname{sen} \theta & \text{si } \theta \geq \frac{\pi}{2} \\ \cos(\theta + k) & \text{si } \frac{\pi}{2} \geq \theta \geq \phi \end{cases}$$

$$147. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ k & \text{si } x = -2 \end{cases} \text{ (Solución)}$$

$$148. \quad f(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ x + 3 & \text{si } 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

149. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{kx} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x + 1 & \text{si } 3 < x \leq 10 \end{cases}$ (Solución)



En los siguientes ejercicios, usa el Teorema del valor intermedio (TVI).

150. Sea $h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ +4x & \text{si } x < 2 \end{cases}$ en el intervalo $[0, 4]$, no hay un valor de x tal que $h(x) = 10$, aunque $h(0) < 10$ y $h(4) > 10$. Explica por qué esto no contradice el TVI.

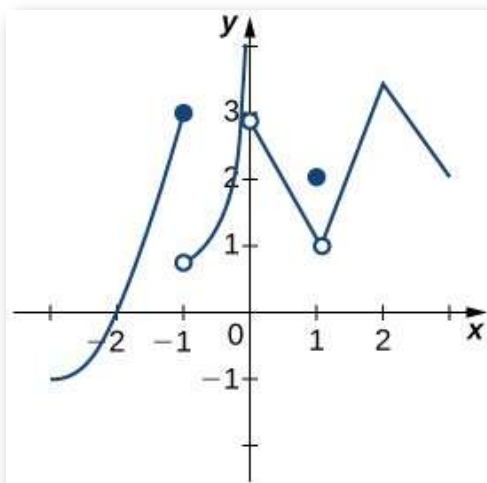
151. Una partícula que se mueve a lo largo de una recta tiene en cada momento una función de posición $s(t)$ que es continua. Supongamos que $s(2) = 5$ y $s(5) = 2$. Otra partícula se mueve de manera que su posición está dada por $h(t) = s(t) - t$. Explica por qué debe haber un valor c para $2 < c < 5$ tal que $h(c) = 0$. (Solución)

152. [T] Utiliza el enunciado "El coseno de t es igual a t al cubo".

- Escribe una ecuación matemática del enunciado.
- Demuestra que la ecuación del apartado a. tiene al menos una solución real.
- Usa una calculadora para encontrar un intervalo de longitud 0.01 que contenga una solución.

153. Aplica el TVI para determinar si $2x = x^3$ tiene una solución en uno de los intervalos $[1.25, 1.375]$ o $[1.375, 1.5]$. Explica brevemente la respuesta para cada intervalo. (Solución)

154. Consideremos la gráfica de la función $y = f(x)$ que se muestra en el siguiente gráfico.



- Encuentra todos los valores para los que la función es discontinua.
- Para cada valor del apartado a., indica por qué no se aplica la definición formal de continuidad.
- Clasifica cada discontinuidad como salto, removible o infinito.

155. Sea $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x > 1 \\ x^3 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

- Dibuja la gráfica de f .
- ¿Es posible encontrar un valor k tal que $f(1) = k$, haga que $f(x)$ sea continua para todos los números reales? Explica brevemente.

([Solución](#))

156. Sea $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}$ para $x \neq -1, 1$.

- Dibuja la gráfica de f .
- ¿Es posible encontrar valores k_1 y k_2 tal que $f(-1) = k_1$ y $f(1) = k_2$, para que $f(x)$ sea continua para todos los números reales? Explica brevemente.

157. Dibuja la gráfica de la función $y = f(x)$ que verifique las propiedades i. hasta vii.

- El dominio de f es $(-\infty, +\infty)$.
- f tiene una discontinuidad infinita en $x = -6$.
- $f(-6) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 2$
- $f(-3) = 3$
- f es continua a la izquierda pero no a la derecha en $x = 3$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(Solución)

158. Dibuja la gráfica de la función $y = f(x)$ cumpliendo las propiedades i. hasta iv.

- El dominio de f es $[0, 5]$.
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ existen y son iguales.
- $f(x)$ es continua por la izquierda pero no es continua en $x = 2$, y es continua por la derecha pero no es continua en $x = 3$

- iv. $f(x)$ tiene una discontinuidad removible o evitable en $x = 1$, una discontinuidad de salto en $x = 2$, y se cumple lo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2.$$



En los siguientes ejercicios, supón que $y = f(x)$ está definida para todo x . Para cada descripción, dibuja un gráfico con la propiedad indicada.

159. Discontinua en $x = 1$ y con $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$ y $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

([Solución](#))

160. Discontinua en $x = 2$ pero continua en todos los puntos con $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1/2$.



Determina si cada una de las afirmaciones dadas es verdadera. Justifica tu respuesta con una explicación o un contraejemplo.

161. $f(t) \frac{2}{e^t - e^{-t}}$ es continuo en todos los puntos. ([Solución](#))

162. Si los límites izquierdo y derecho de $f(x)$ cuando x tiende al punto a existen y son iguales, entonces f no puede ser discontinua en $x = a$.

163. Si una función no es continua en un punto, entonces no está definida en ese punto. ([Solución](#))

164. Según el TVI, $\cos x - \sin x - x = 2$ tiene una solución en el intervalo $[-1, 1]$.

165. Si $f(x)$ es continua cumpliendo que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en $[a, b]$.

(Solución)

166. La función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$ es continua en el intervalo $[0, 3]$.

167. Si $f(x)$ es continua en todos los puntos reales y $f(a), f(b) > 0$, entonces no hay raíz de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. (Solución)



[T] Los siguientes problemas consideran la forma escalar de la ley de Coulomb, que describe la fuerza electrostática entre dos cargas puntuales, como los electrones. Está dada por la ecuación $F(r) = k_e \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$, donde k_e es la constante de Coulomb, q_i son las magnitudes de las cargas de las dos partículas y r es la distancia entre las dos partículas.

168. Para simplificar el cálculo de un modelo con muchas partículas que interactúan, después de algún valor umbral $r = R$, aproximamos F como cero.

- Explica el razonamiento físico detrás de esta suposición.
- ¿Qué es la ecuación de fuerza?
- Evalúa la fuerza F usando la ley de Coulomb y nuestra aproximación, asumiendo dos protones con una magnitud de carga de 1.6022×10^{-19} culombios (C) y la constante de Coulomb $k_e = 8,988 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ están separados por 1 m. Además, suponga $R < 1$ m. ¿Cuánta inexactitud genera nuestra aproximación? ¿Es nuestra aproximación razonable?
- ¿Existe algún valor finito de R para el cual este sistema permanece continuo en R ?

169. En lugar de hacer que la fuerza sea 0 en R , dejamos que la fuerza sea 10^{-20} para $r \geq R$. Considera dos protones, que tienen una magnitud de carga de $1.6022 \times 10^{-19} C$, y la constante de Coulomb $k_e = 8.988 \times 10^9 N m^2 / C^2$. ¿Existe un valor R que pueda hacer que este sistema sea continuo? Si es así, calcula este valor.



Recuerde la discusión sobre las naves espaciales del comienzo del capítulo. Los siguientes problemas consideran el lanzamiento de un cohete desde la superficie de la Tierra. La fuerza de gravedad sobre el cohete viene dada por $F(d) = -mk/d^2$, donde m es la masa del cohete, d es la distancia del cohete desde el centro de la Tierra y k es una constante. (Solución)

170. [T] Determina el valor y las unidades de k dado que la masa del cohete es de 3 millones de kg. Sugerencia: la distancia desde el centro de la Tierra hasta su superficie es de 6378 km.

171. [T] Después de que ha pasado una cierta distancia D , el efecto gravitacional de la Tierra se vuelve bastante insignificante, por lo que podemos aproximar la función de fuerza por

$$F(d) = \begin{cases} -\frac{mk}{d^2} & \text{si } d < D \\ 10000 & \text{si } d \geq D \end{cases}$$

Utilizando el valor de k encontrado en el ejercicio anterior, encuentra la condición necesaria de D para que la función de fuerza permanezca continua. (Solución)

172. A medida que el cohete se aleja de la superficie de la Tierra, hay una distancia D donde el cohete arroja parte de su masa, ya que ya no necesita el exceso de almacenamiento de combustible.

Podemos escribir esta función como

$$F(d) = \begin{cases} -\frac{m_1 k}{d^2} & \text{si } d < D \\ -\frac{m_2 k}{d^2} & \text{si } d \geq D \end{cases}$$

¿Existe un valor D tal que esta función sea continua, asumiendo $m_1 \neq m_2$?



Demuestra que las siguientes funciones son continuas en todos los números reales

173. $f(\theta) = \text{sen}\theta$ ([Solución](#))

174. $g(x) = |x|$

175. ¿Donde es continua $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$? ([Solución](#))

2.6 Definición precisa de límite

Objetivos de aprendizaje

1. Describir la definición épsilon-delta de un límite.
2. Aplicar la definición épsilon-delta para encontrar el límite de una función.
3. Describir las definiciones épsilon-delta de límites laterales y límites infinitos.
4. Utilizar la definición épsilon-delta para demostrar las leyes de los límites.

A este punto, se ha pasado de la definición muy informal de un límite en la introducción de este capítulo a la comprensión intuitiva de un límite y lo que significa el límite de una función y cómo puedes encontrarlo. En esta sección, convertimos esta idea intuitiva de un límite en una definición formal utilizando un lenguaje matemático preciso. La definición formal de límite es posiblemente una de las definiciones más desafiantes que encontrarás al principio del estudio del cálculo; sin embargo, vale la pena cualquier esfuerzo que hagas para reconciliarlo con su noción intuitiva de límite. Comprender esta definición es la clave que abre la puerta a una mejor comprensión del cálculo.

2.6.1 Cuantificando la proximidad

Antes de enunciar la definición formal de límite, debemos introducir algunas ideas preliminares. Recuerda que la distancia entre dos puntos a y b en la recta numérica viene dada por $|a - b|$.

1. La declaración $|f(x) - L| < \epsilon$ puede interpretarse como que la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ϵ .
2. La declaración $0 < |x - a| < \delta$ puede interpretarse como que para $x \neq a$ se tiene que la distancia entre x y a es menor que δ .

También es importante observar las siguientes equivalencias de valor absoluto:

1. La declaración $|f(x) - L| < \epsilon$ es equivalente al enunciado $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$.
2. La declaración $0 < |x - a| < \delta$ es equivalente al enunciado

$$a - \delta < x < a + \delta \quad y \quad x \neq a$$

Con estas aclaraciones, podemos establecer la definición formal épsilon-delta del límite.

DEFINICIÓN

Sea $f(x)$ una función definida para todo $x \neq a$ en un intervalo abierto que contiene al punto a . Sea L un número real. Luego $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si, para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Esta definición puede parecer bastante compleja desde un punto de vista matemático, pero se vuelve más fácil de entender si la desglosamos frase por frase. El enunciado en sí implica algo llamado **cuantificador universal** (para todo $\epsilon > 0$), un **cuantificador existencial** (existe un $\delta > 0$) y, por último, un **enunciado condicional** (si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$).

Echemos un vistazo a la Tabla 2.9, que desglosa la definición y traduce cada parte.

Definición	Traducción
1. Para cada $\epsilon > 0$	1. Para cada distancia positiva ϵ desde L
2. existe un $\delta \geq 0$	2. Hay una distancia positiva δ a partir de a
3. tal que	3. tal que
4. si $0 < x - a < \delta$, entonces $ f(x) - L < \epsilon$	4. si x está a una distancia menor que δ de a siendo $x \neq a$, entonces $f(x)$ está a una distancia de L menor que ϵ .

Tabla 2.9 Traducción de la definición del límite epsilon-delta

Podemos manejar mejor esta definición si la observamos geoméricamente. La [Figura 2.39](#) muestra posibles valores de δ para varias opciones de $\epsilon > 0$ para una función dada $f(x)$, un número a , y un límite L en a .

Observa que cuando elegimos valores más pequeños de ϵ (la distancia entre la función y el límite), siempre podemos encontrar un δ lo suficientemente pequeño como para que si hemos elegido un valor de x a una distancia menor que δ de a , entonces el valor de $f(x)$ está a una distancia menor que ϵ del límite L .

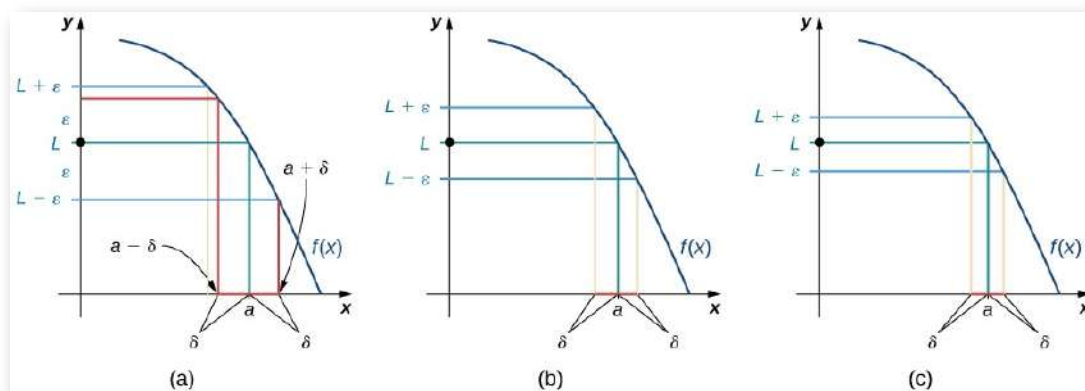


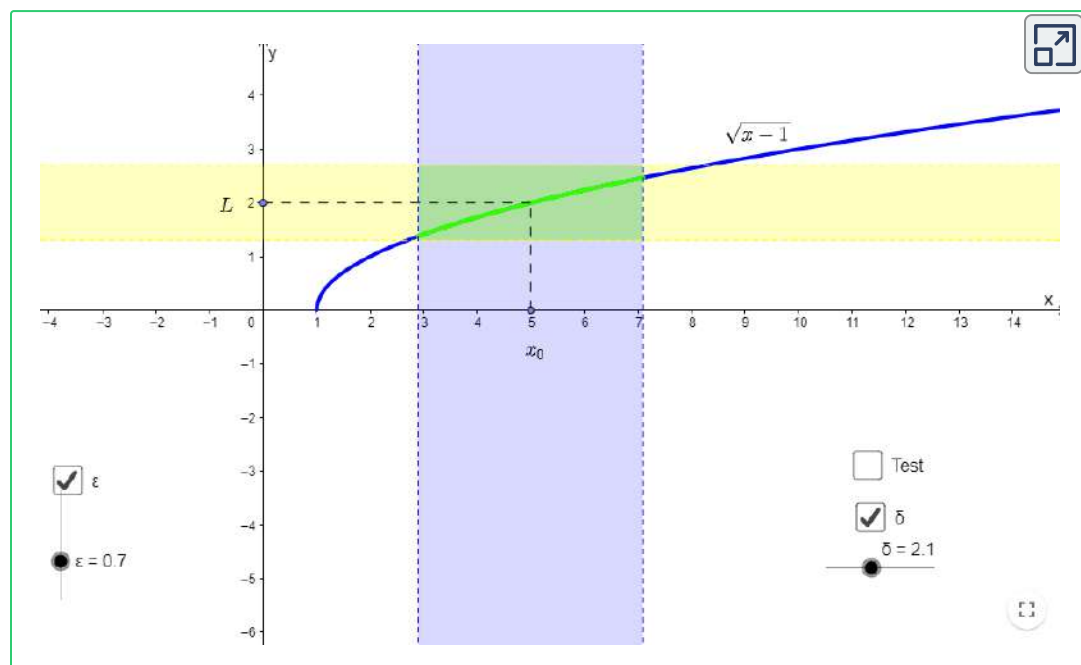
Figura 2.39 Estos gráficos muestran posibles valores de δ para distintas opciones de ϵ cada vez más pequeños.



Puedes utilizar el siguiente applet de David Beyler para experimentar con la búsqueda de valores δ una vez determinados los valores de ϵ para la función $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

Enlace <https://www.geogebra.org/m/FQwxkVbKi>

En este applet el valor de a se corresponde con x_0 . Observa que el valor de δ depende del valor de ϵ elegido, y que cuanto más pequeño se tome ϵ , se deben considerar puntos x más próximos a x_0 .



El Ejemplo 2.39 muestra cómo puede usar esta definición para demostrar que un número es el valor de un límite.



Ejemplo

2.39 Demostrar el valor de un límite de una función específica

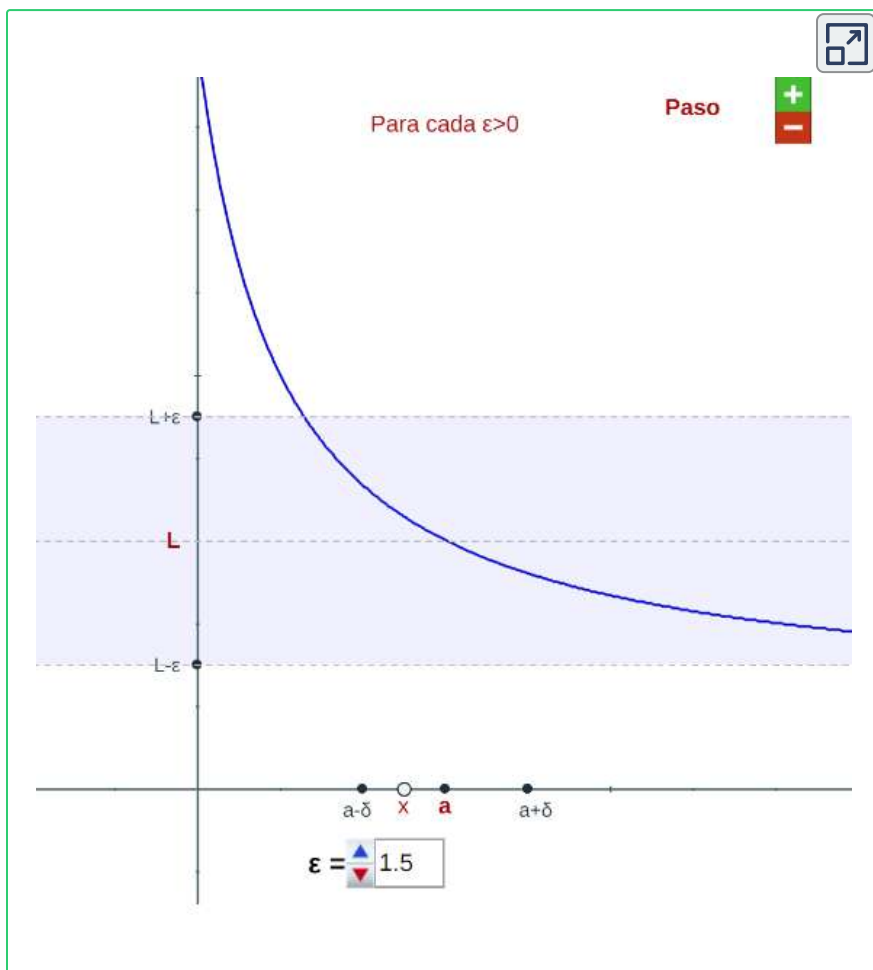
Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$.



Solución



En la siguiente escena interactiva se puede considerar distintos valores de ϵ y a partir del valor elegido obtener un valor de δ adecuado con el que comprobar la definición de límite.



La siguiente estrategia de resolución de problemas resume el tipo de prueba que hemos elaborado en el Ejemplo 2.39.

Estrategia de resolución de problemas: Demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ para una función $f(x)$

- Comencemos la demostración con la siguiente declaración:

Sea $\epsilon > 0$.

- A continuación, necesitamos obtener un valor para δ . Una vez obtenido este valor, hacemos la siguiente declaración, completando el espacio en blanco con nuestra elección de δ :

Elija $\delta = \underline{\hspace{2cm}}$.

- La siguiente declaración en la prueba debería ser la siguiente considerando el valor dado para a :

Supongamos $0 < |x - a| < \delta$.

- A continuación, basándonos en este supuesto, debemos demostrar que $|f(x) - L| < \epsilon$, donde $f(x)$ y L son nuestra función $f(x)$ y nuestro límite L .

En algún momento, necesitamos usar $0 < |x - a| < \delta$.

- Concluimos nuestra demostración con la declaración:

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.



Ejemplo

2.40 Demostrar una declaración sobre un límite

Completa la prueba de que $\lim_{x \rightarrow -1} (4x + 1) = -3$ rellenando los espacios en blanco.

Sea ____.

Elije $\delta =$ ____.

Supongamos $0 < |x - \text{____}| < \delta$.

Por lo tanto,

$|\text{____} - \text{____}| = \text{_____} \epsilon$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.27

Completa la prueba de que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4$ rellenando los espacios en blanco.

Sea ____.

Elije $\delta =$ ____.

Supongamos $0 < |x - \text{____}| < \delta$.

Por lo tanto,

$|\text{____} - \text{____}| = \text{_____} \epsilon$.

En el Ejemplo 2.39 y el Ejemplo 2.40, las demostraciones eran bastante sencillas, ya que las funciones con las que estábamos trabajando eran lineales. En el Ejemplo 2.41, vemos cómo modificar la demostración para considerar una función no lineal.



Ejemplo

2.41 Demostrar el valor de un límite (enfoque geométrico)

Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 2.28

Encuentra δ correspondiente a $\epsilon > 0$ para una prueba de que $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} = 3$.

El enfoque geométrico para demostrar que el límite de una función adquiere un valor específico, funciona bastante bien para algunas funciones. Además, la comprensión de la definición formal del límite que proporciona este método es invaluable. Sin embargo, también podemos acercarnos a las demostraciones de límite desde un punto de vista puramente algebraico. En muchos casos, un enfoque algebraico puede no solo proporcionarnos información adicional sobre la definición, sino que también puede resultar más simple. Además, un enfoque algebraico es la herramienta principal utilizada en las pruebas de enunciados sobre límites.

En el Ejemplo 2.42, adoptamos un enfoque puramente algebraico.



Ejemplo

2.42 Demostrar el valor de un límite (enfoque algebraico)

Demuestre que $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 2x + 3) = 6$.



Solución



**Pregunta
de control**

Cuestión 2.29

Completa la prueba de que $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$.

Sea $\epsilon > 0$; elije $\delta = \min \{1, \epsilon/3\}$; supón $0 < |x - 1| < \delta$.

Dado que $|x - 1| < \delta$, podemos concluir que $-\delta < x - 1 < \delta$.

Por tanto, $-\delta + 2 < x + 1 < 2 + \delta$. Por tanto, $|x + 1| < 2 + \delta$.

.

Descubriras que, en general, cuanto más compleja es una función, más probable es que el enfoque algebraico sea el más fácil de aplicar. El enfoque algebraico también es más útil para probar afirmaciones sobre límites.

2.6.2 Demostrando leyes de los límites

Ahora demostramos cómo usar la definición épsilon-delta de un límite para construir una prueba rigurosa de una de las leyes del límite. La desigualdad triangular se usa en un punto clave de la prueba, por lo que primero revisamos esta propiedad del valor absoluto.

DEFINICIÓN

La desigualdad triangular establece que si a y b son números reales, entonces $|a + b| \leq |a| + |b|$.

PROPIEDAD. Límite de una suma

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M$$

Prueba

Demostramos la propiedad anterior de los límites.

Sea $\epsilon > 0$.

Elije $\delta_1 > 0$ de modo que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon/2$.

Elije $\delta_2 > 0$ de modo que si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces $|g(x) - M| < \epsilon/2$.

Elija $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$.

Supongamos $0 < |x - a| < \delta$.

Así,

$$0 < |x - a| < \delta_1 \quad y \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= \\ |(f(x) - L) + (g(x) - M)| &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Ahora exploramos qué significa que **no exista un límite**. El límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe si no hay un número real L para el cual $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ o expresado de otra forma, si para todos los números reales L , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$.

Para entender lo que esto significa, miramos cada parte de la definición de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ junto con su negación tal y como se indica en la Tabla 2.10.

Definición	Opuesto
1. Para cada $\epsilon > 0$	1. Existe $\epsilon > 0$
2. existe un $\delta \geq 0$	2. para cada $\delta \geq 0$
3. si $0 < x - a < \delta$, entonces $ f(x) - L < \epsilon$	4. hay un x cumpliendo que $0 < x - a < \delta$ de forma que $ f(x) - L \geq \epsilon$

Tabla 2.10 Traducción de la definición del límite y su opuesta

Finalmente, podemos enunciar lo que significa que no exista un límite.

El límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe si para cada número real L , existe un número real $\epsilon > 0$ de modo que para todo $\delta > 0$, existe un x que satisface $0 < |x - a| < \delta$, de modo que $|f(x) - L| \geq \epsilon$.

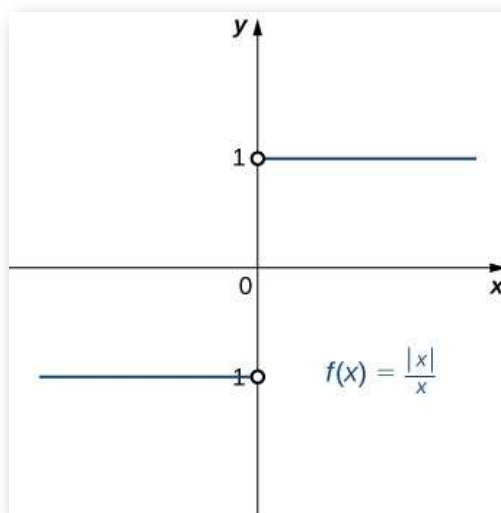
Apliquemos este resultado en el Ejemplo 2.43 para mostrar que no existe un límite.



Ejemplo

2.43 Demostrar que no existe un límite

Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ no existe. La gráfica de la función se muestra a continuación:



Solución

2.6.3 Límites laterales y límites en el infinito

De la misma forma que en el caso de los límites empezamos con una comprensión intuitiva y luego pasamos a una definición más rigurosa, ahora abordaremos la definición formal de los límites laterales. Para hacer esto, modificamos la definición ϵ -delta de un límite para dar definiciones formales ϵ -delta de los límites por la derecha y por la izquierda en un punto. Estas definiciones solo requieren ligeras modificaciones de la definición del límite.

En la definición del límite por la derecha, la desigualdad $0 < x - a < \delta$ reemplaza $0 < |x - a| < \delta$, lo que asegura que solo consideramos valores de x que son mayores que a (a la derecha de a). De manera similar, en la definición del límite por la izquierda, la desigualdad $-\delta < x - a < 0$ reemplaza $0 < |x - a| < \delta$, lo que asegura que solo consideremos valores de x que sean menores que a (a la izquierda de a).

DEFINICIÓN

1. **Límite por la derecha:** Sea $f(x)$ definida sobre un intervalo abierto de la forma (a, b) donde $a < b$. Se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < x - a < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

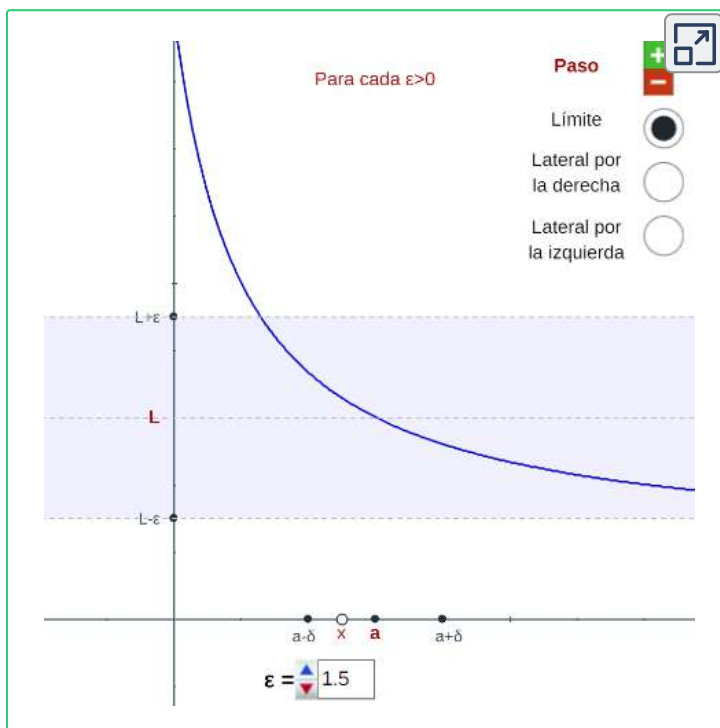
2. **Límite por la izquierda:** Sea $f(x)$ definida sobre un intervalo abierto de la forma (b, a) donde $b < a$. Se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $-\delta < x - a < 0$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.



En la siguiente escena interactiva puede ayudar a comprender la definición formal de límite lateral de una función en un punto





Ejemplo

2.44 Demostrar el valor de un límite por la derecha

Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{x - 4} = 0$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 2.30

Encuentra δ correspondiente a ϵ para demostrar que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1 - x} = 0$

Concluimos el proceso de convertir nuestras ideas intuitivas de varios tipos de límites en definiciones formales rigurosas dando una definición formal de límites infinitos.

Para tener $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, queremos que los valores de la función $f(x)$ sean cada vez más grandes a medida que x se acerca al punto a .

En lugar del requisito de que $|f(x) - L| < \epsilon$ para ϵ arbitrariamente pequeño con $0 < |x - a| < \delta$ para δ suficientemente pequeño, queremos $f(x) > M$ para M positivo y arbitrariamente grande con $0 < |x - a| < \delta$ para valores δ suficientemente pequeños.

La [Figura 2.43](#) ilustra esta idea mostrando el valor de δ para valores de M sucesivamente más grandes.

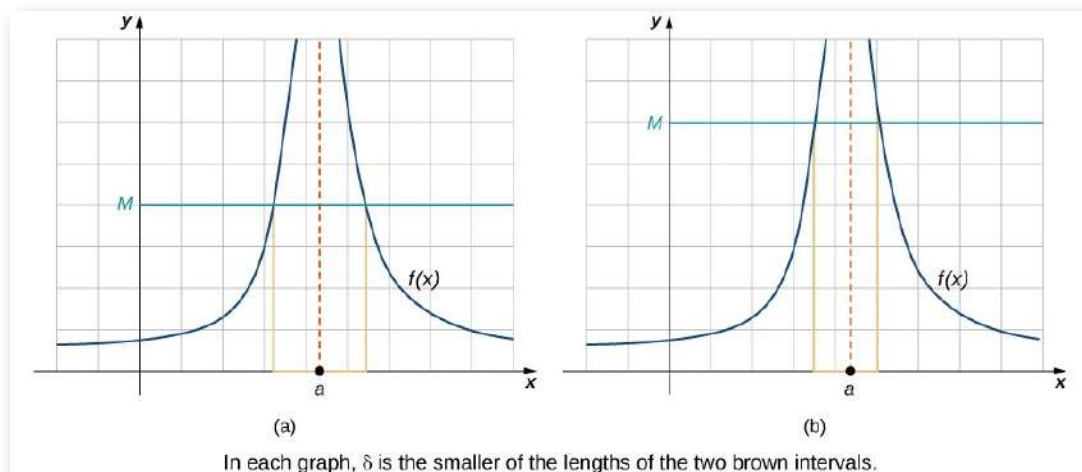


Figura 2.43 Estos gráficos trazan los valores de δ para distintos valores de M para mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

DEFINICIÓN

- Sea $f(x)$ una función definida para todo $x \neq a$ en un intervalo abierto que contiene al punto a . Entonces, tenemos un **límite infinito**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

si por cada $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces se cumple $f(x) > M$.

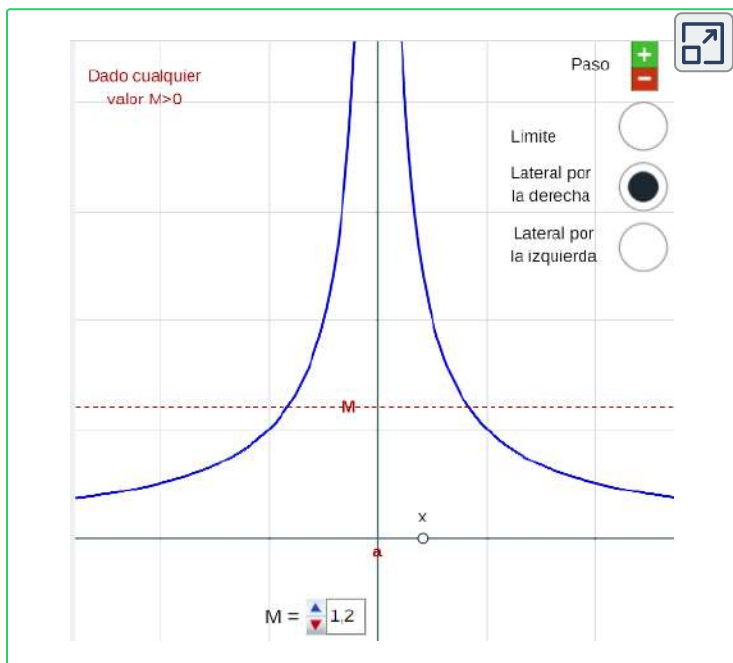
- Sea $f(x)$ una función definida para todo $x \neq a$ en un intervalo abierto que contiene al punto a . Entonces, tenemos un **límite infinito negativo**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

si por cada $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces se cumple $f(x) > -M$.



La siguiente escena interactiva puede ayudar a comprender la definición formal de límite infinito positivo de una función en un punto.



2.6.4 Ejercicios



En los siguientes ejercicios, escribe el $\epsilon - \delta$ apropiado de la definición para cada una de las sentencias dadas.

176. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = N$

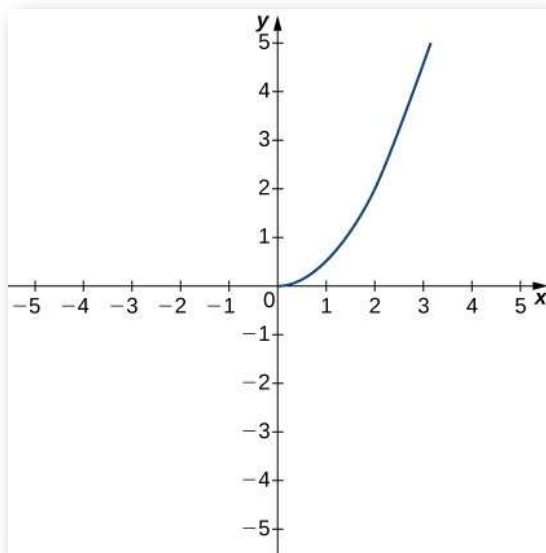
177. $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = M$ ([Solución](#))

178. $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$

179. $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = A$ ([Solución](#))



La siguiente gráfica de la función f satisface $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$. En los siguientes ejercicios, determina un valor de $\delta > 0$ que satisfaga cada afirmación.

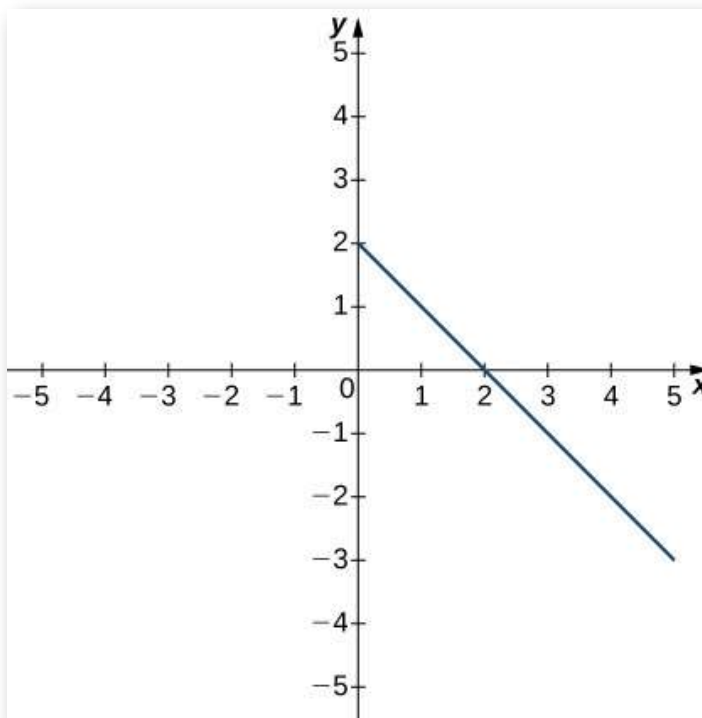


180. Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 2| < 1$.

181. Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 2| < 0.5$. ([Solución](#))



La siguiente gráfica de la función f satisface $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$. En los siguientes ejercicios, determina un valor de $\delta > 0$ que satisfaga cada afirmación.

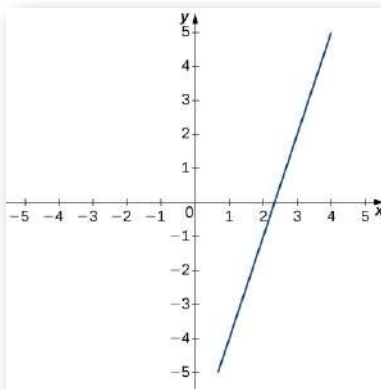


182. Si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces $|f(x) + 1| < 1$.

183. Si $0 < |x - 3| < \delta$ entonces $|f(x) + 1| < 2$. ([Solución](#))



La siguiente gráfica de la función f satisface $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$. En los siguientes ejercicios, para cada valor de ϵ , encuentra un valor de $\delta > 0$ de modo que la definición precisa de límite sea cierta.



184. $\epsilon = 1.5$

185. $\epsilon = 3$ (**Solución**)



[T] En los siguientes ejercicios, usa una calculadora gráfica para encontrar un número δ tal que las declaraciones sean verdaderas.

186. $|\sin(2x) - \frac{1}{2}| < 0.1$ siempre que $|x - \frac{\pi}{12}| < \delta$

187. $|\sqrt{x-4} - 2| < 0.1$ siempre que $|x - 8| < \delta$ (**Solución**)



En los siguientes ejercicios, utiliza la definición precisa de límite para probar los límites dados.

188. $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 8) = 18$

$$189. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6 \text{ (Solución)}$$

$$190. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} =$$

$$191. \lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0 \text{ (Solución)}$$

$$192. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x) = 8$$



En los siguientes ejercicios, utiliza la definición precisa de límite para probar los límites unilaterales dados.

$$193. \lim_{x \rightarrow 5^-} \sqrt{5 - x} = 0 \text{ (Solución)}$$

$$194. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2 \text{ donde } f(x) = \begin{cases} 8x - 3 & \text{si } x < 0 \\ 4x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$195. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \text{ donde } f(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{si } x < 1 \\ 7x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ (Solución)}$$



En los siguientes ejercicios, usa la definición precisa de límite para probar los límites infinitos dados.

$$196. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

$$197. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3}{(x+1)^2} = \infty \text{ (Solución)}$$

$$198. \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{3}{(x-2)^2} = -\infty$$

199. Un ingeniero está usando una máquina para cortar un cuadrado plano de aerogel de 144 cm^2 de área. Si hay una tolerancia de error máxima en el área de 8 cm^2 , ¿con qué precisión debe el ingeniero cortar el lado, asumiendo que todos los lados tienen la misma longitud? ¿Cómo se relacionan estos números con δ , ϵ , a y L ? **(Solución)**

200. Utiliza la definición precisa de límite para demostrar que el siguiente límite no existe: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$.

201. Usando la definición precisa de límite, demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe, dado que $f(x)$ es la función de techo. Sugerencia: prueba cualquier $\delta < 1$. **(Solución)**

202. Usando la definición precisa de límite, demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$. Sugerencia: Piense en cómo se puede elegir siempre un número racional $0 < r < \delta$, pero $|f(r) - 0| = 1$.

203. Usando la definición precisa de límite, determina $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$. **(Solución)** Sugerencia: divide en dos casos, x racional y x irracional.

204. Usando la función del ejercicio anterior, utiliza la definición precisa de límite para mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe para $a \neq 0$.



Para los siguientes ejercicios, suponga que existen los siguientes límites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = M$. Utiliza la definición precisa de límite para probar las siguientes leyes de límites:

205. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M$ (**Solución**)

206. $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cL$ para cualquier constante real c .

Sugerencia: consideremos dos casos: $c = 0$ y $c \neq 0$.

207. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) g(x)) = LM$. Sugerencia:

$$\begin{aligned} |f(x) g(x) - LM| &= \\ |f(x) g(x) - f(x) M + f(x) M - LM| &\leq \\ |f(x)| |g(x) - M| + |M| |f(x) - L| \end{aligned}$$

(**Solución**)

Capítulo III

Derivadas

3.1 Introducción



Figura 3.1 El Hennessey Venom GT puede pasar de 0 a 200 mph en 14,51 segundos. (crédito: modificación del trabajo de Codex41, Flickr)

El Hennessey Venom GT es uno de los coches más rápidos del mundo. En 2014, alcanzó una velocidad récord de 270,49 mph (millas por hora). Puede pasar de 0 a 200 mph en 14,51 segundos. Las técnicas de este capítulo se pueden usar para calcular la aceleración que logra Venom en esta hazaña (ver Ejemplo 3.8).

El cálculo de la velocidad y los cambios en la velocidad son aplicaciones importantes del cálculo, pero su utilización se extiende a más situaciones. El cálculo es importante en todas las ramas de las matemáticas, las ciencias y la ingeniería, y también es fundamental para el análisis económico en los negocios y la salud. En este capítulo, exploramos una de las principales herramientas del cálculo, la derivada, y mostramos técnicas convenientes de calcular las derivadas. Aplicamos estas reglas a una variedad de funciones para que luego podamos estudiar sus aplicaciones.

3.2 Definición de la derivada

Objetivos de aprendizaje

1. Reconocer el significado de la tangente a una curva en un punto.
2. Calcular la pendiente de una recta tangente.
3. Identificar la derivada como el límite de un cociente de diferencias.
4. Calcular la derivada de una función dada en un punto.
5. Describir la velocidad como una tasa de cambio.
6. Explicar la diferencia entre la velocidad promedio y la velocidad instantánea.
7. Estimar la derivada de una tabla de valores.

Ahora que tenemos una comprensión conceptual del límite y la capacidad práctica para calcular límites, hemos establecido las bases para nuestro estudio del cálculo, la rama de las matemáticas en la que calculamos derivadas e integrales. La mayoría de los matemáticos e historiadores están de acuerdo en que el cálculo fue desarrollado independientemente por el inglés Isaac Newton (1643-1727) y el alemán Gottfried Leibniz (1646-1716), cuyos retratos aparecen en la [Figura 3.2](#).

Citamos a Newton y Leibniz como inventores del Cálculo ya que fueron los primeros en comprender la relación entre la derivada y la integral. Ambos matemáticos se beneficiaron del trabajo de predecesores como Barrow, Fermat y Cavalieri.

En un inicio, los dos matemáticos parece que tuvieron una relación amistosa; sin embargo, posteriormente estalló una amarga controversia sobre quién era el autor del trabajo que tenía prioridad. Aunque parece probable que Newton fue el primero que llegó a las ideas sobre las que se sustenta el cálculo, estamos en deuda con Leibniz, entre otras cosas, por la notación que usamos comúnmente en la actualidad para la derivada.



Figura 3.2 A Newton y Leibniz se les atribuye el desarrollo del cálculo de forma independiente.

Comenzamos nuestro estudio del cálculo revisando la noción de líneas secantes y líneas tangentes. Recordemos que usamos la pendiente de una recta secante a una función en un punto $(a, f(a))$ para estimar la tasa de cambio, o la tasa a la que una variable cambia en relación con otra variable.

Podemos obtener la pendiente de la secante eligiendo un valor de x cerca de a y trazando una recta a través de los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$, como se muestra en la [Figura 3.3](#). La pendiente de esta recta viene dada por una ecuación en forma de cociente de diferencias:

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

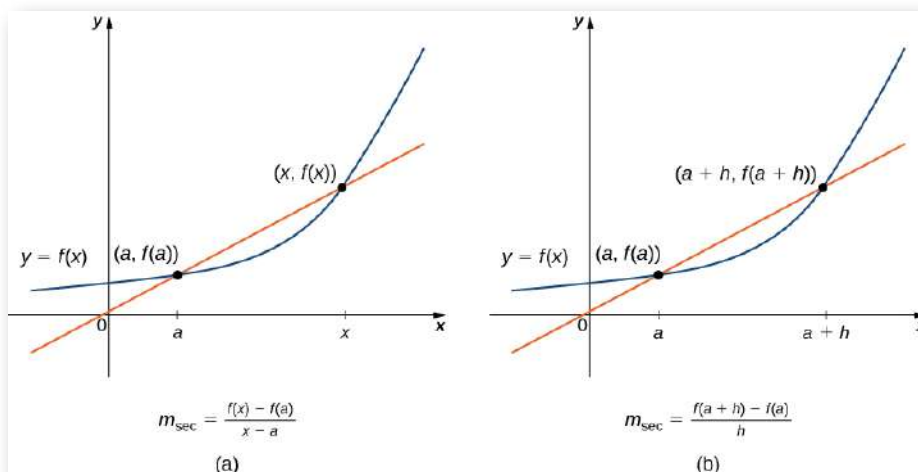


Figura 3.3 Podemos calcular la pendiente de una recta secante de dos formas.

También podemos calcular la pendiente de una recta secante a una función en un valor a usando esta ecuación y reemplazando x con $a + h$, donde h es un valor cercano a 0. Luego podemos calcular la pendiente de la recta a través de los puntos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$. En este caso, encontramos que la recta secante tiene una pendiente dada por el siguiente cociente de diferencias con incremento h :

$$m_{sec} = \frac{f(a + h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

DEFINICIÓN

Sea f una función definida en un intervalo I que contiene a . Si $x \neq a$ pertenece a I , entonces

$$Q = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (3.1)$$

es un **cociente de diferencias o cociente incremental**.

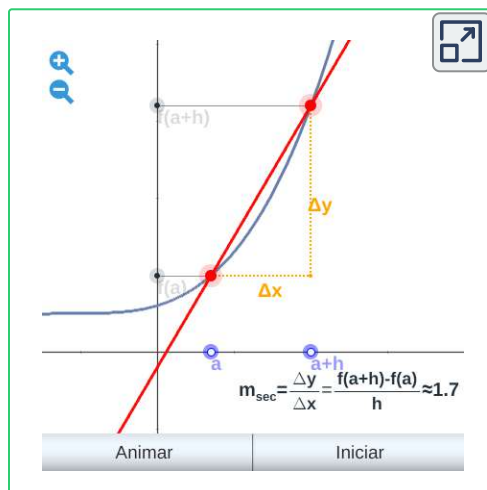
Además, si $h \neq 0$ se elige de modo que $a + h$ esté en I , entonces

$$Q = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (3.2)$$

es un cociente de diferencia con incremento h .



Puedes utilizar el siguiente applet interactivo para practicar moviendo los puntos a y $a + h$ del eje de abscisas.



Estas dos expresiones para calcular la pendiente de una recta secante se ilustran en la [Figura 3.3](#). Veremos que estos dos métodos para encontrar la recta tangente tiene interés dependiendo de la situación. La consideración principal para la elección de uno y otro generalmente dependerá de la facilidad de cálculo.

Esta figura consta de dos gráficos etiquetados como a y b. La figura a muestra el plano cartesiano de coordenadas con 0 , a y x marcadas en el eje X . Hay una curva etiquetada $y = f(x)$ con puntos marcados $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$. También hay una línea recta que cruza estos dos puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$. En la parte inferior del gráfico, se da la ecuación

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La figura b muestra un gráfico similar, pero esta vez $a + h$ está marcado en el eje X en lugar de x . En consecuencia, la curva etiquetada $y = f(x)$ pasa por $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$ al igual que la línea recta. En la parte inferior del gráfico, se da la ecuación

$$m_{sec} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

En la [Figura 3.4 \(a\)](#) vemos que, a medida que los valores de x se acercan a a , las pendientes de las rectas secantes proporcionan mejores estimaciones de la tasa de cambio de la función en dicho punto. Además, las rectas secantes se acercan a la recta tangente, que representa su límite.

De manera similar, la [Figura 3.4 \(b\)](#) muestra que, a medida que los valores de h se acercan a 0, las rectas secantes también se acercan a la tangente.

La pendiente de la recta tangente en a es la tasa de cambio de la función en a , como se muestra en la [Figura 3.4 \(c\)](#).

Esta figura consta de tres gráficos etiquetados a, b y c. La figura a muestra el plano cartesiano de coordenadas con 0 , a , x_2 y x_1 marcados en orden en el eje X . Hay una curva etiquetada con $y = f(x)$ y puntos en ella marcados con $(a, f(a))$, $(x_2, f(x_2))$ y $(x_1, f(x_1))$. Hay tres rectas: la primera une $(a, f(a))$ y $(x_1, f(x_1))$; la segunda une $(a, f(a))$ y $(x_2, f(x_2))$; la tercera solo toca a $(a, f(a))$, siendo la tangente. En la parte inferior del gráfico, se da la ecuación

$$m_{tan} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

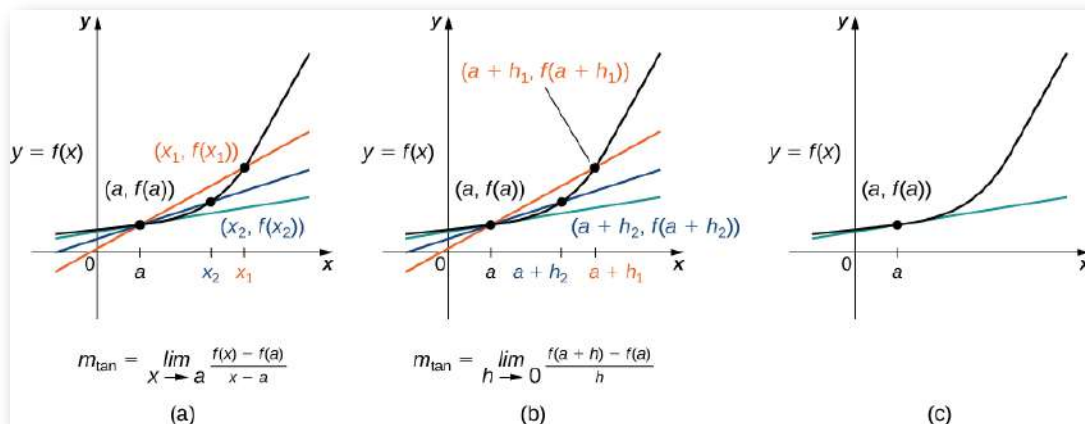


Figura 3.4 Las líneas secantes se acercan a la línea tangente (mostrada en verde) cuando el segundo punto se acerca al primero.

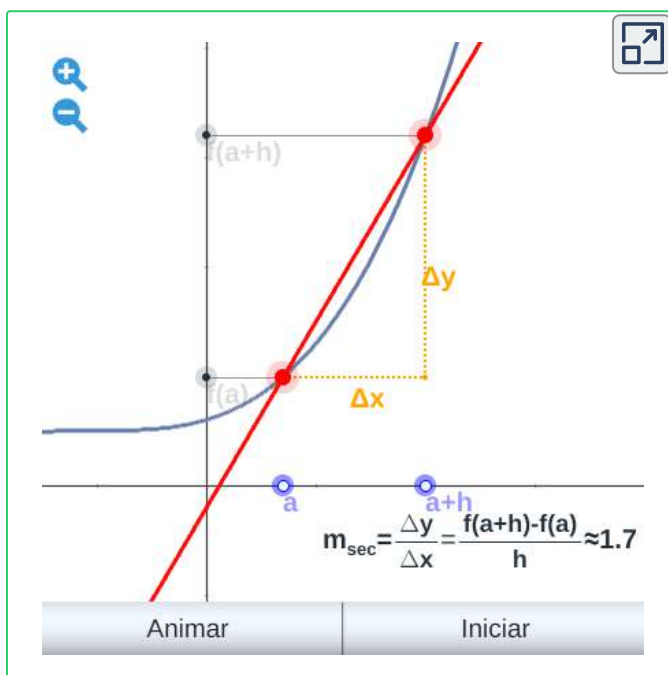
La figura b muestra un gráfico similar, pero esta vez se considera $a + h_2$ y $a + h_1$ en el eje X en lugar de x_2 y x_1 . En consecuencia, la curva $y = f(x)$ pasa por $(a, f(a))$, $(a + h_2, f(a + h_2))$, y $(a + h_1, f(a + h_1))$ y las rectas cruzan la gráfica de manera similar a la de la Figura a. En la parte inferior del gráfico, se da la ecuación

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

La figura c muestra solo la curva $y = f(x)$ y su tangente en el punto $(a, f(a))$.

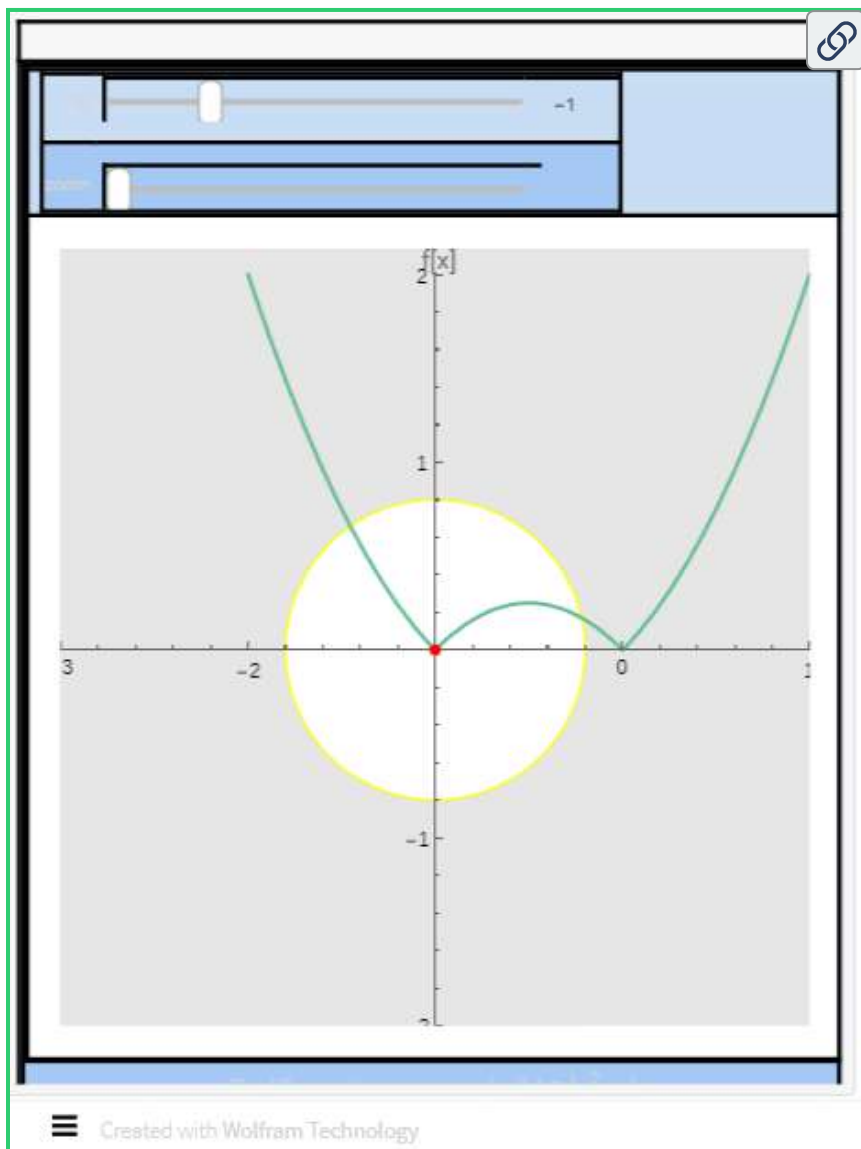


En la siguiente escena interactiva puedes observar cómo cuando h tiende a cero la recta secante se convierte en recta tangente.





Puedes utilizar la siguiente escena, accesible desde el siguiente [enlace](#) para explorar gráficas y ver si tienen una recta tangente en un punto.



En la [Figura 3.5](#) mostramos la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ y su recta tangente en $(1, 1)$ en una serie de intervalos más ajustados alrededor de $x = 1$. A medida que los intervalos se vuelven más estrechos, la gráfica de la función y su línea tangente parecen coincidir, lo que hace que los valores de la recta tangente sean una buena aproximación a los valores de la función para opciones de x cercanos a 1. De hecho, la propia gráfica de $f(x)$ parece ser localmente lineal en la vecindad inmediata de $x = 1$.

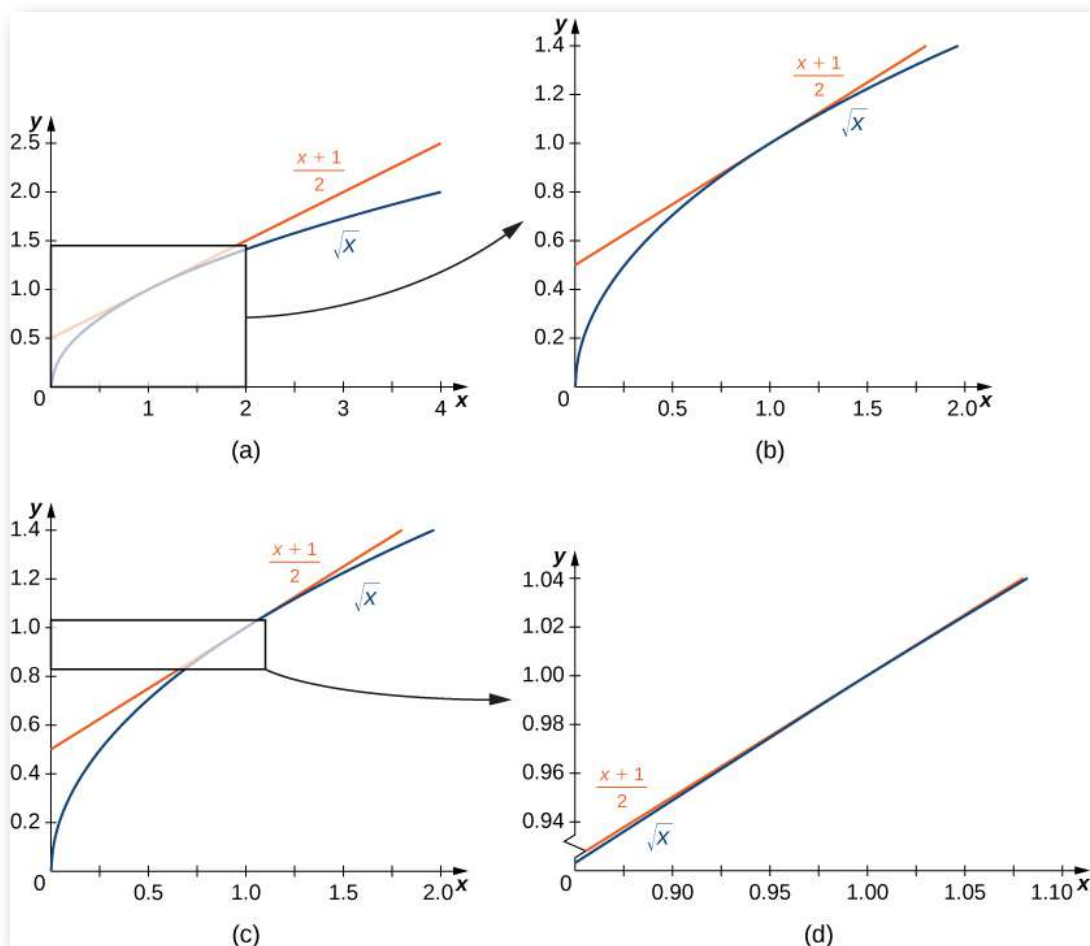


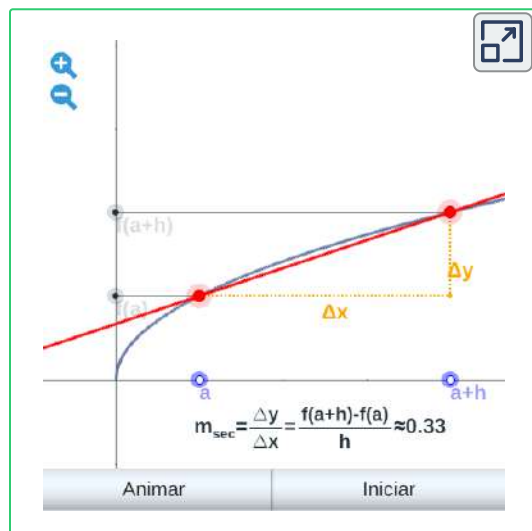
Figura 3.5 Para valores de x cercanos a 1, la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ y su recta tangente parecen coincidir.

Esta figura consta de cuatro gráficos etiquetados a, b, c y d. La Figura a muestra las gráficas de la raíz cuadrada de x y la ecuación $y = (x + 1)/2$ con el eje X yendo de 0 a 4 y el eje Y yendo de 0 a 2.5. Los gráficos de estas dos funciones se ven muy próximas una de la otra cerca del de 1; hay un recuadro alrededor de donde se ven estos gráficos.

La Figura b muestra un acercamiento de estas mismas dos funciones en el área del cuadro de la Figura a, específicamente x va de 0 a 2 e y va de 0 a 1.4. La figura c es la misma gráfica que la figura b, pero esta tiene un cuadro de 0 a 1.1 en la coordenada x y 0.8 y 1 en la coordenada y . Hay una flecha que indica que esto está aumentando en la Figura d. La figura d muestra una imagen muy cercana del cuadro de la figura c, y las dos funciones parecen estar tocándose durante casi toda la longitud del gráfico.



Puedes utilizar el siguiente applet interactivo pulsando sobre el botón "animar".



Formalmente, podemos definir la recta tangente a la gráfica de una función de la siguiente manera.

DEFINICIÓN

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto a . La **recta tangente** a $f(x)$ en a es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ que tiene pendiente

$$m_{tan} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (3.3)$$

siempre que exista este límite.

De manera equivalente, podemos definir la recta tangente a $f(x)$ en a como la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ que tiene pendiente

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (3.4)$$

siempre que exista este límite.

Dado que hemos usado dos expresiones diferentes para definir la pendiente de una recta secante, usamos también dos formas diferentes para definir la pendiente de la recta tangente. En este texto usamos ambas formas y, como antes, la elección de la definición dependerá del entorno. Ahora que hemos definido formalmente una recta tangente a una función en un punto, podemos usar esta definición para encontrar sus ecuaciones.



Ejemplo

3.1 Encontrar una recta tangente

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $x = 3$.



Solución



Ejemplo

3.2 La pendiente de una recta tangente

Utiliza la ecuación 3.4 para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $x = 3$.



Solución



Ejemplo

3.3 Encontrar la ecuación de una recta tangente

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 1/x$ en $x = 2$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.1

Encuentra la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$.

3.3.1 La derivada de una función en un punto

El tipo de límite que calculamos para encontrar la pendiente de la recta tangente a una función en un punto aparece en muchas aplicaciones de muchas disciplinas. Estas aplicaciones incluyen velocidad y aceleración en física, funciones de ganancia marginal en negocios y tasas de crecimiento en biología. Este límite ocurre con tanta frecuencia que le damos a este valor un nombre especial: **la derivada**. El proceso de encontrar una derivada se llama **derivación**.

DEFINICIÓN

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto a . La derivada de la función $f(x)$ en a , denotada por $f'(a)$, está definida por

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (3.5)$$

siempre que exista este límite.

Alternativamente, también podemos definir la derivada de $f(x)$ en a como

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (3.6)$$



Ejemplo

3.4 Estimación de una derivada

Para $f(x) = x^2$, usa una tabla para estimar $f'(3)$ usando la Ecuación 3.5.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.2

Para $f(x) = x^2$, usa una tabla para estimar $f'(3)$ usando la Ecuación 3.6.



Ejemplo

3.5 Encontrar una derivada

Para $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, encuentra $f'(2)$ usando la Ecuación 3.5.



Solución



Ejemplo

3.6 Revisando la derivada

Para $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, encuentra $f'(2)$ usando la Ecuación 3.6.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.3

Para $f(x) = x^2 + 3x + 2$, encuentra $f'(1)$.

3.2.2 Velocidades y razón o tasas de cambio

Ahora que sabemos cómo evaluar una derivada, podemos aplicarla para obtener la velocidad. Recuerda que si $s(t)$ es la posición de un objeto que se mueve a lo largo del eje de coordenadas, la velocidad promedio del objeto en un intervalo de tiempo $[a, t]$ si $t > a$ o $[t, a]$ si $t < a$ se da por el cociente incremental siguiente:

$$v_{media} = \frac{s(t) - s(a)}{t - a} \quad (3.7)$$

A medida que los valores de t se acercan al punto a , los valores de v_{media} se acercan al valor que llamamos **velocidad instantánea** en a . Es decir, la velocidad instantánea en a , denotada $v(a)$, está dada por

$$v(a) = s'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a} \quad (3.8)$$

Para comprender mejor la relación entre la velocidad promedio y la velocidad instantánea, se puede consultar la [Figura 3.8](#). En esta figura, la pendiente de la recta tangente (mostrada en rojo) es la velocidad instantánea del objeto en el tiempo $t = a$, cuya posición en el tiempo t está dada por la función $s(t)$. La pendiente de la línea secante (que se muestra en verde) es la velocidad promedio del objeto durante el intervalo de tiempo $[a, t]$.

Esta figura consta del plano cartesiano de coordenadas con 0, a y t marcados en el eje t . La función $y = s(t)$ se representa gráficamente en el primer cuadrante junto con dos líneas marcadas como tangente y secante. La recta tangente toca a la curva de $y = s(t)$ en un solo punto, $(a, s(a))$. La recta secante toca a la curva $y = s(t)$ en dos puntos: $(a, s(a))$ y $(t, s(t))$.

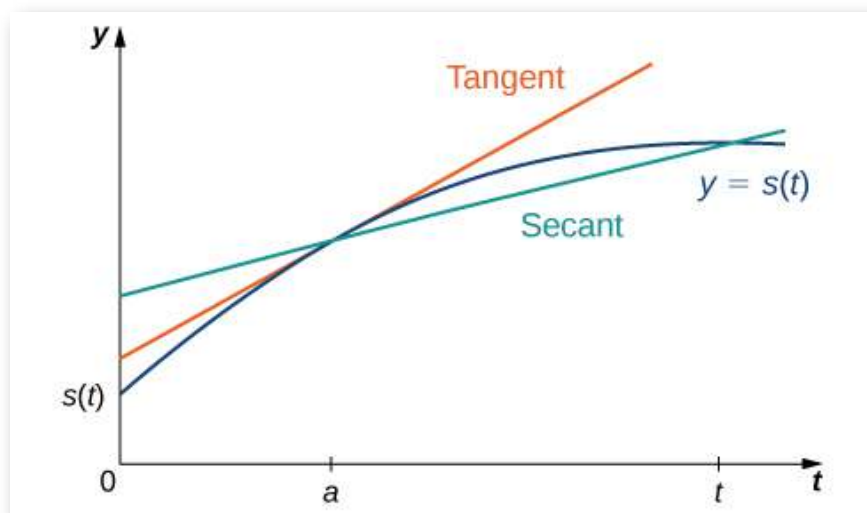


Figura 3.8 La pendiente de la recta secante es la velocidad promedio en el intervalo $[a, t]$. La pendiente de la recta tangente es la velocidad instantánea.

Podemos utilizar la Ecuación 3.5 para calcular la velocidad instantánea, o podemos estimar la velocidad de un objeto en movimiento a partir de una tabla de valores y confirmar después la estimación mediante la Ecuación 3.7.



Ejemplo

3.7 Estimación de la velocidad

Un peso de plomo sobre un resorte oscila hacia arriba y hacia abajo. Su posición en el tiempo t con respecto a una recta horizontal fija viene dada por $s(t) = \sin t$ (Figura 3.9). Utiliza una tabla de valores para estimar $v(0)$ y verifica la estimación usando la Ecuación 3.5.

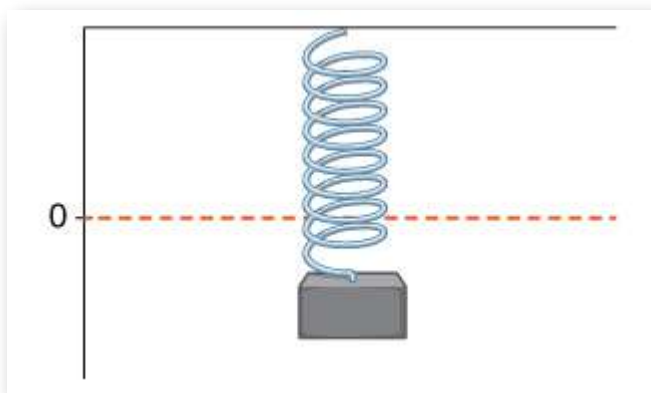


Figura 3.9 Un peso de plomo suspendido de un resorte en movimiento oscilatorio vertical.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.4

Se deja caer una roca desde una altura de 64 pies. Su altura sobre el suelo en el tiempo t segundos después, viene dada por $s(t) = -16t^2 + 64$, $0 \leq t \leq 2$

Encuentra, usando la Ecuación 3.5, su velocidad instantánea un segundo después de soltarla.

Nota: Un pie equivale a 30.48 centímetros.

Como hemos visto a lo largo de esta sección, la pendiente de una recta tangente a una función y la velocidad instantánea son conceptos relacionados. Cada uno se calcula calculando una derivada y cada uno mide la tasa de cambio instantánea de una función, o la tasa de cambio, en cualquier punto de la función.

DEFINICIÓN

La tasa instantánea de cambio de una función $f(x)$ en un valor a es su derivada $f'(a)$.



Ejemplo

3.8 Inicio del capítulo: Estimación de la tasa de cambio de velocidad



Figura 3.10 (crédito: modificación del trabajo de Codex41, Flickr).

Al alcanzar una velocidad máxima de 270,49 mph (millas por hora), el Hennessey Venom GT es uno de los coches más rápidos del mundo. En las pruebas pasó de 0 a 60 mph en 3.05 segundos, de 0 a 100 mph en 5.88 segundos, de 0 a 200 mph en 14.51 segundos y de 0 a 229.9 mph en 19.96 segundos.

Utiliza estos datos para sacar una conclusión sobre la tasa de cambio de velocidad (es decir, su aceleración) cuando se acerca a 229.9 mph. ¿Parece que la velocidad a la que acelera el automóvil aumenta, disminuye o es constante?

Nota: Una milla son 1609 metros.



Solución



Ejemplo

3.9 Tasa de cambio de temperatura

Un propietario ajusta el termostato para que la temperatura en la casa comience en 70° F a las 9 de la noche y luego empiece a bajar alcanzando un mínimo de 60° durante la noche y vuelva a subir a 70° a las 7 de la mañana siguiente. Supongamos que la temperatura en la casa está dada por $T(t) = 0.4t^2 - 4t + 70$ para $0 < t < 10$, donde t es el número de horas pasadas desde las 9 de la noche.

Encuentra la tasa instantánea de cambio de temperatura a la medianoche.



Solución



Ejemplo

3.10 Tasa de cambio de beneficio

Una empresa de juguetes puede vender x sistemas de juegos electrónicos a un precio de $p = -0,01x + 400$ dólares por sistema de juego. El coste de fabricación de un sistema x viene dado por $C(x) = 100x + 10,000$ dólares.

Encuentra la tasa de cambio de beneficio cuando se producen 10,000 juegos. ¿Debería la empresa de juguetes aumentar o disminuir la producción?



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.5

Una cafetería determina que el beneficio diario de bollos que se obtiene al cobrar s dólares por bollo es $P(s) = -20s^2 + 150s - 10$. La cafetería cobra actualmente 3.25 dólares por bollo. Encuentra $P'(3.25)$, esto es, la tasa de cambio del beneficio cuando el precio es 3.25 dólares y decide si la cafetería debería considerar subir o bajar los precios de los bollos.



3.2.3 Ejercicios



Para los siguientes ejercicios, utiliza la Ecuación 3.1 para encontrar la pendiente de la recta secante entre los valores x_1 y x_2 de la función $y = f(x)$.

1. $f(x) = 4x + 7; x_1 = 2, x_2 = 5$ ([Solución](#))
2. $f(x) = 8x - 3; x_1 = -1, x_2 = 3$
3. $f(x) = x^2 + 2x; x_1 = 3, x_2 = 3.5$ ([Solución](#))
4. $f(x) = x^2 + x + 2; x_1 = 0.5, x_2 = 1.5$
5. $f(x) = \frac{4}{3x-1}; x_1 = 1, x_2 = 2$ ([Solución](#))
6. $f(x) = \frac{x-7}{2x+1}; x_1 = 0, x_2 = 2$

7. $f(x) = \sqrt{x}; x_1 = 1, x_2 = 16$ ([Solución](#))

8. $f(x) = \sqrt{x-9}; x_1 = 10, x_2 = 13$

9. $f(x) = x^{1/3} + 1; x_1 = 0, x_2 = 8$ ([Solución](#))

10. $f(x) = 6x^{2/3} + 2x^{1/3}; x_1 = 1, x_2 = 27$



Para las siguientes funciones,

- utiliza la Ecuación 3.4 para encontrar la pendiente de la recta tangente $m_{tan} = f'(a)$, y
- encuentra la ecuación de la recta tangente a f en $x = a$.

11. $f(x) = 3 - 4x; a = 2$ ([Solución](#))

12. $f(x) = \frac{x}{5} + 6; a = -1$

13. $f(x) = x^2 + x; a = 1$ ([Solución](#))

14. $f(x) = 1 - x - x^2; a = 0$

15. $f(x) = \frac{7}{x}; a = 3$ ([Solución](#))

16. $f(x) = \sqrt{x+8}; a = 1$

17. $f(x) = 2 - 3x^2; a = -2$ ([Solución](#))

18. $f(x) = \frac{-3}{x-1}; a = 4$

19. $f(x) = \frac{2}{x+3}; a = -4$ (Solución)

20. $f(x) = \frac{3}{x^2}; a = 3$



Para las siguientes funciones $y = f(x)$, encuentra $f'(a)$ usando la Ecuación 3.1.

21. $f(x) = 5x + 4; a = -1$ (Solución)

22. $f(x) = -7x + 1; a = 3$

23. $f(x) = x^2 + 9x; a = 2$ (Solución)

24. $f(x) = 3x^2 - x + 2; a = 1$

25. $f(x) = \sqrt{x}; a = 2$ (Solución)

26. $f(x) = \sqrt{x-2}; a = 6$

27. $f(x) = \frac{1}{x}; a = 2$ (Solución)

28. $f(x) = \frac{1}{x-3}; a = -1$

29. $f(x) = \frac{1}{x^3}; a = 1$ (Solución)

30. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}; a = 4$



Para los siguientes ejercicios, dada la función $y = f(x)$,

- a. encuentra la pendiente de la recta secante PQ para cada punto $Q(x, f(x))$ con el valor de x dado en la tabla.

- b. Utiliza las respuestas de a) para estimar el valor de la pendiente de la recta tangente en P .
- c. Usa la respuesta de b) para encontrar la ecuación de la recta tangente a f en el punto P .

31. [T] $f(x) = x^2 + 3x + 4$; $P(1, 8)$ (redondear a 6 cifras decimales) (**Solución**)

x	Pendiente m_{PQ}	x	Pendiente m_{PQ}
1.1	(i)	0.9	(vii)
1.01	(ii)	0.99	(viii)
1.001	(iii)	0.999	(ix)
1.0001	(iv)	0.9999	(x)
1.00001	(v)	0.99999	(xi)
1.000001	(vi)	0.999999	(xii)

32. [T] $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$; $P(0, -1)$ (redondear a 6 cifras decimales)

x	Pendiente m_{PQ}	x	Pendiente m_{PQ}
0.1	(i)	-0.1	(vii)
0.01	(ii)	-0.01	(viii)
0.001	(iii)	-0.001	(ix)
0.0001	(iv)	-0.0001	(x)
0.00001	(v)	-0.00001	(xi)
0.000001	(vi)	-0.000001	(xii)

33. [T] $f(x) = 10e^{0.x}$; $P(0, 10)$ (redondear a 4 cifras decimales)
(Solución)

x	Pendiente m_{PQ}
-0.1	(i)
-0.01	(ii)
-0.001	(iii)
-0.0001	(iv)
-0.00001	(v)
-0.00001	(vi)

34. [T] $f(x) = 10e^{0.x}$; $P(0, 10)$ (redondear a 4 cifras decimales)

x	Pendiente m_{PQ}
3.1	(i)
3.14	(ii)
3.141	(iii)
3.1415	(iv)
3.1159	(v)
3.14192	(vi)



Para las siguientes funciones de posición $y = s(t)$, un objeto se mueve a lo largo de la recta, donde t es en segundos y s en metros. Encuentra

- la expresión simplificada para la velocidad media desde $t = 2$ a $t = 2 + h$.
- la velocidad media entre $t = 2$ y $t = 2 + h$, donde (i) $h = 0.1$, (ii) $h = 0.01$, (iii) $h = 0.001$ y (iv) $h = 0.0001$ y
- utilizar la respuesta de a), para estimar la velocidad instantánea a $t = 2$ segundos.

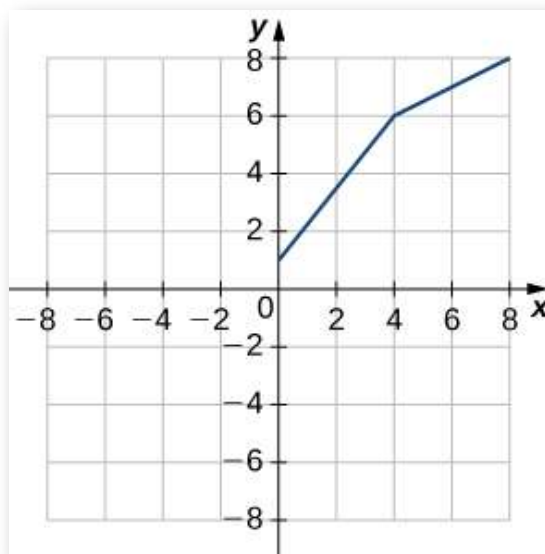
35. $s(t) = \frac{1}{3}t + 5$ ([Solución](#))

36. $s(t) = t^2 - 2t$

37. $s(t) = 2t^3 + 3$ ([Solución](#))

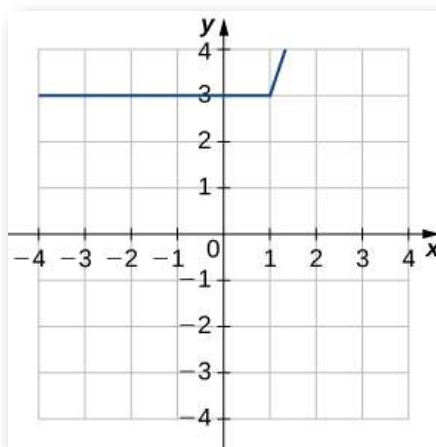
38. $s(t) = \frac{16}{t^2} - \frac{4}{t}$

39. Utiliza la siguiente gráfica para evaluar a) $f'(-3)$ y b) $f'(1, 5)$.



([Solución](#))

40. Utiliza la siguiente gráfica para evaluar a) $f'(-3)$ y b) $f'(1, 5)$.



Para las siguientes funciones utiliza la definición de derivada como límite para probar que la derivada no existe en $x = a$

41. $f(x) = x^{1/3}, x = 0$ ([Solución](#))

42. $f(x) = x^{2/3}, x = 0$

43. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, x = 1$ ([Solución](#))

44. $f(x) = \frac{|x|}{x}, x = 0$

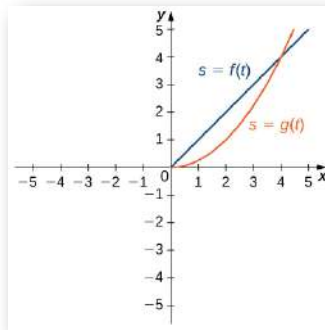
45. [T] La posición en pies de un automóvil de carreras a lo largo de una pista recta después de t segundos se modela mediante la función $s(t) = 8t^2 - \frac{1}{16}t^3$. ([Solución](#))

- Encuentra la velocidad promedio del vehículo en los siguientes intervalos de tiempo con cuatro decimales:
 1. $[4, 4.1]$
 2. $[4, 4.01]$
 3. $[4, 4.001]$
 4. $[4, 4.0001]$
- Usar el apartado anterior para sacar una conclusión sobre la velocidad instantánea del vehículo en $t = 4$ segundos.

46. [T] La distancia en pies que rueda una pelota por una pendiente está modelada por la función $s(t) = 14t^2$, donde t son los segundos después de que la pelota comienza a rodar.

- Encuentra la velocidad promedio de la pelota en los siguientes intervalos de tiempo:
 1. $[5, 5.1]$
 2. $[5, 5.01]$
 3. $[5, 5.001]$
 4. $[5, 5.0001]$
- Utiliza las respuestas del apartado a) para sacar una conclusión sobre la velocidad instantánea de la pelota en $t = 5$ segundos.

47. Dos vehículos comienzan a viajar uno al lado del otro por una carretera recta. Sus funciones de posición, que se muestran en el siguiente gráfico, están dadas por $s = f(t)$ y $s = g(t)$, donde s se mide en pies y t se mide en segundos. ([Solución](#))



La primera función $s = g(t)$ comienza en $(0, 0)$ y se arquea hacia arriba a través de aproximadamente $(2, 1)$ hasta $(4, 4)$. La segunda función $s = f(t)$ es una recta que pasa por $(0, 0)$ y $(4, 4)$.

- ¿Qué vehículo ha viajado más lejos en $t = 2$ segundos?
- ¿Cuál es la velocidad aproximada de cada vehículo en $t = 3$ segundos?
- ¿Qué vehículo viaja más rápido en $t = 4$ segundos?
- ¿Qué se cumple respecto a las posiciones de los vehículos en $t = 4$ segundos?

48. [T] El coste total $C(x)$, en cientos de dólares, para producir x frascos de mayonesa está dado por $C(x) = 0.000003x^3 + 4x + 300$

- Calcula el coste promedio por frasco en los siguientes intervalos:
 1. $[100, 100,1]$
 2. $[100, 100,01]$
 3. $[100, 100,001]$
 4. $[100, 100.0001]$
- Utiliza las respuestas del apartado anterior para estimar el coste promedio para producir 100 frascos de mayonesa.

49. [T] Para la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$, haz lo siguiente.

- Utiliza una calculadora gráfica para representar la gráfica de f en una ventana de visualización adecuada.
- Utiliza la función ZOOM de la calculadora para aproximar los dos valores de $x = a$ para los cuales $m_{tan} = f'(a) = 0$.

(Solución)

50. [T] Para la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, haga lo siguiente.

- Utiliza una calculadora gráfica para representar la gráfica de f en una ventana de visualización adecuada.
- Utiliza la función ZOOM de la calculadora para aproximar los valores de $x = a$ para los cuales $m_{tan} = f'(a) = 0$.

51. Supongamos que $N(x)$ calcula la cantidad de galones de gasolina que usa un vehículo que viaja x millas. Supón que el vehículo gasta 30 mpg (millas por galón).

- Encuentra una expresión matemática para $N(x)$.
- ¿Qué representa $N(100)$? Explica el significado físico.
- ¿Qué representa $N'(100)$? Explica el significado físico.

(Solución)

52. Para la función $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

- utiliza una calculadora gráfica para representar f utilizando una ventana de visualización adecuada.
- encuentra numéricamente la derivada utilizando una calculadora gráfica para estimar $f'(-2)$, $f'(-0.5)$, $f'(1.7)$ y $f'(2.718)$.

3.3 La derivada como función

Objetivos de aprendizaje

1. Definir la función derivada de una función dada.
2. Representar la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de una función dada.
3. Indicar la conexión entre derivadas y continuidad.
4. Describir tres condiciones para que una función no tenga derivada.
5. Explicar el significado de las derivadas de orden superior.

Como hemos visto, la derivada de una función en un punto dado nos da la tasa de cambio o pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Si derivamos una función de posición en un momento dado, obtenemos la velocidad en ese momento. Parece razonable concluir que conocer la derivada de la función en cada punto produciría información valiosa sobre el comportamiento de la función.

Sin embargo, el proceso de encontrar la derivada en un conjunto de valores utilizando las técnicas de la sección anterior, parece que sería un trabajo tedioso. En esta sección definimos la función derivada y aprendemos un proceso para encontrarla.

3.3.1 Función derivada

La función derivada asigna la derivada de una función f en cada punto del dominio de f . Se define a continuación formalmente la función derivada.

DEFINICIÓN

Sea f una función. La **función derivada**, denotada por f' , es la función cuyo dominio consiste en aquellos valores de x tales que existe el siguiente límite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.9)$$

Se dice que una **función** $f(x)$ es **derivable en** a si $f'(a)$ existe. De manera más general, se dice que una función es **derivable en un conjunto abierto** S si es derivable en cada punto de S , y una función derivable es aquella en la que $f'(x)$ existe en su dominio.

En los siguientes ejemplos usamos la Ecuación 3.9 para encontrar la derivada de una función.



Ejemplo

3.11 Hallar la derivada de la función raíz cuadrada

Encuentra la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$.



Solución



Ejemplo

3.12 Hallar la derivada de una función cuadrática

Encuentra la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.6

Encuentra la derivada de $f(x) = x^2$.

Usamos una variedad de notaciones diferentes para expresar la derivada de una función. En el ejemplo 3.12 mostramos que si $f(x) = x^2 - 2x$, entonces $f'(x) = 2x - 2$. Si hubiéramos expresado esta función en la forma $y = x^2 - 2x$, podríamos haber expresado la derivada como $y' = 2x - 2$ o $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$. Podríamos haber transmitido la misma información escribiendo $\frac{d}{dx}(x^2 - 2x) = 2x - 2$.

Por lo tanto, para la función $y = f(x)$, cualquiera de las siguientes notaciones representa la derivada de $f(x)$:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad \frac{d}{dx}(f(x))$$

En lugar de $f'(a)$ también podemos utilizar: $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$

El uso de la notación $\frac{dy}{dx}$ (llamada notación de Leibniz) es bastante común en ingeniería y física. Para entender mejor esta notación, recuerda que la derivada de una función en un punto es el límite de las pendientes de las rectas secantes cuando éstas se acercan a la recta tangente.

Las pendientes de estas rectas secantes a menudo se expresan en la forma $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ donde Δy es la diferencia en los valores y correspondientes a la diferencia en los valores x , que se expresan como Δx ([Figura 3.11](#)). Por tanto, la derivada, que se puede considerar como la tasa instantánea de cambio de y con respecto a x , se expresa como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La función $y = f(x)$ se representa gráficamente y se muestra como una curva en el primer cuadrante. El eje x está marcado con 0 , a y $a + \Delta x$. El eje y está marcado con 0 , $f(a)$ y $f(a) + \Delta y$. Hay una recta que corta a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ y $(a + \Delta x, f(a) + \Delta y)$.

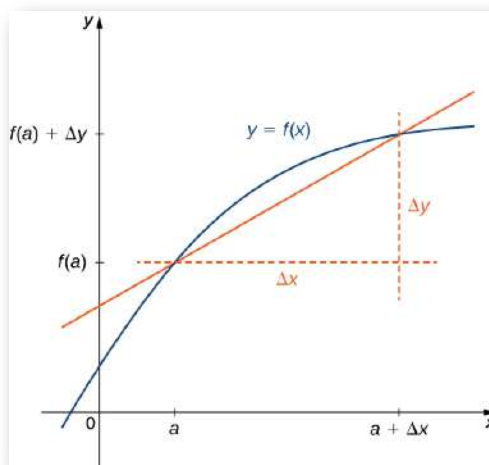


Figura 3.11 La derivada se expresa como $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Desde el punto $(a, f(a))$, se traza una recta horizontal; desde el punto $(a + \Delta x, f(a) + \Delta y)$, se traza una recta vertical. La distancia de $(a, f(a))$ a $(a + \Delta x, f(a))$ se indica como Δx ; la distancia de $(a + \Delta x, f(a) + \Delta y)$ a $(a + \Delta x, f(a))$ se denota como Δy .

3.3.2 Gráfica de una derivada

Ya hemos visto cómo representar una función, así que dada la ecuación de una función o la de una función derivada, podríamos representarlas y esperaríamos ver una correspondencia entre sus gráficas, ya que $f'(x)$ da la tasa de cambio de una función $f(x)$ (o pendiente de la recta tangente a $f(x)$).

En el ejemplo 3.11 encontramos que para $f(x) = \sqrt{x}$, se tenía que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Si graficamos estas funciones en los mismos ejes, como en la [Figura 3.12](#), podemos usar sus gráficas para comprender la relación entre estas dos funciones.

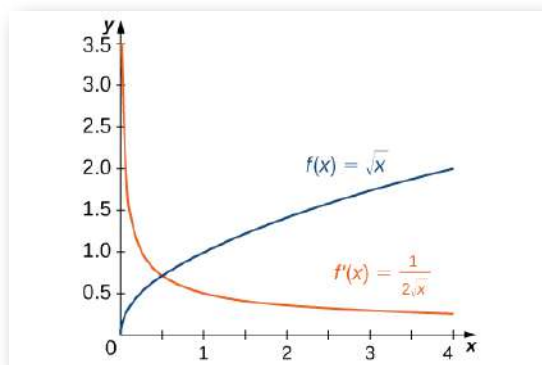
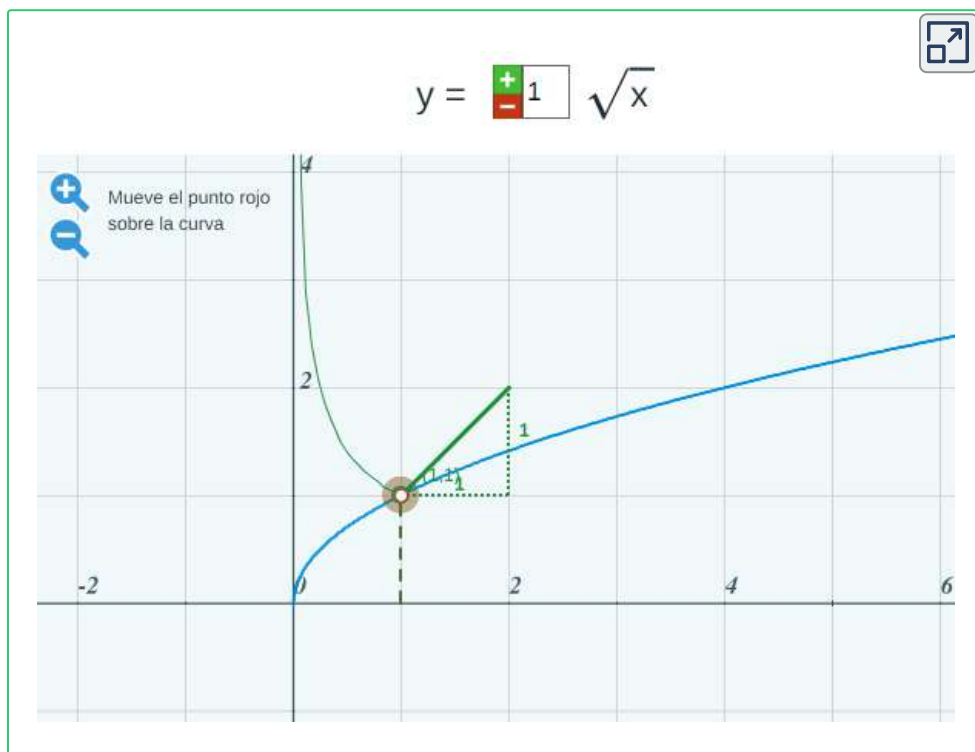


Figura 3.12 La derivada $f'(x)$ es positiva en todas partes porque la función $f(x)$ es creciente.



En la siguiente escena interactiva se representa la gráfica de la función derivada de la función $a\sqrt{x}$ para distintos valores de a .



Primero, notamos que $f(x)$ está aumentando en todo su dominio, lo que significa que las pendientes de sus rectas tangentes en todos los puntos son positivas. En consecuencia, esperamos $f'(x) > 0$ para todos los valores de x en su dominio. Además, a medida que x aumenta, las pendientes de las rectas tangentes a $f(x)$ están disminuyendo y esperamos ver una disminución correspondiente en $f'(x)$.

También observamos que $f'(0)$ no está definida y que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \infty$ lo que se corresponde con una tangente vertical a $f(x)$ en el punto 0.

La función $f(x) = x^2 - 2x$ del ejemplo 3.12 se representa gráficamente junto con su derivada $f'(x) = 2x - 2$ en la siguiente figura.

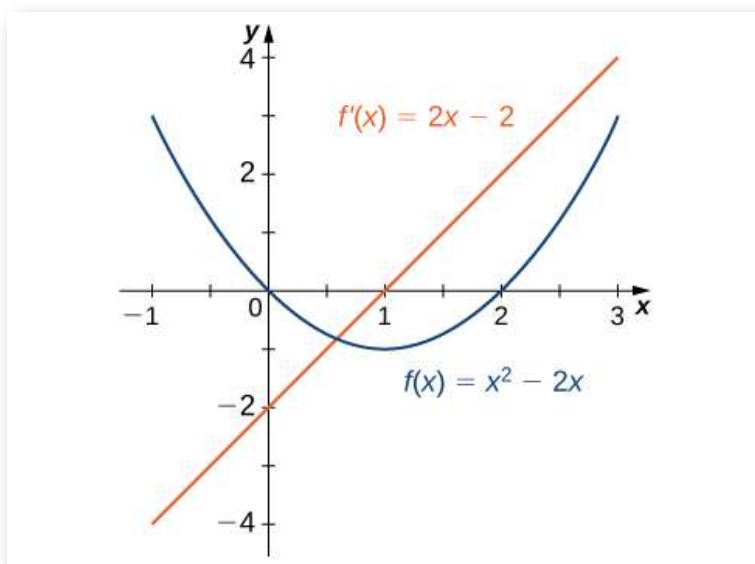
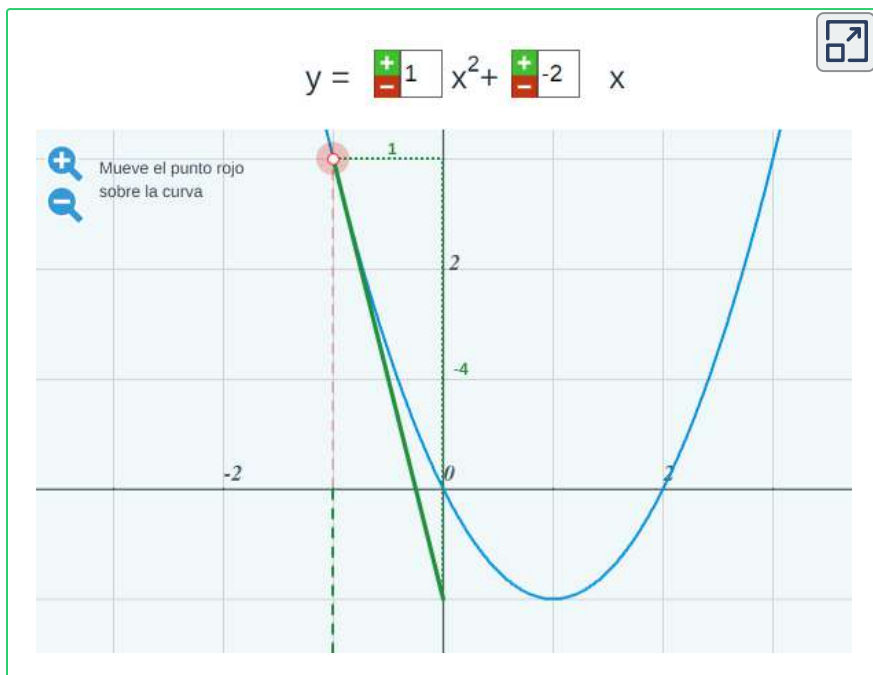


Figura 3.13 La derivada $f'(x) < 0$ donde la función $f(x)$ es decreciente y $f'(x) > 0$ donde $f(x)$ es creciente. La derivada es cero donde la función tiene una tangente horizontal.



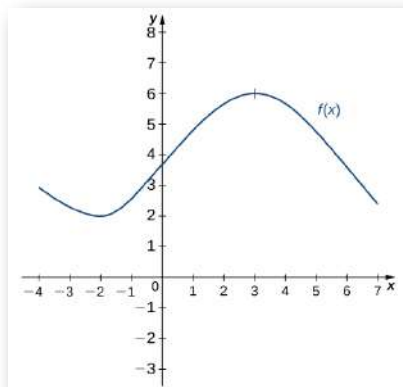
En la siguiente escena interactiva se representa la gráfica de la función derivada de $f(x) = ax^2 + bx$ para distintos valores de a y b .



Ejemplo

3.13 Dibujar la derivada a partir de una función

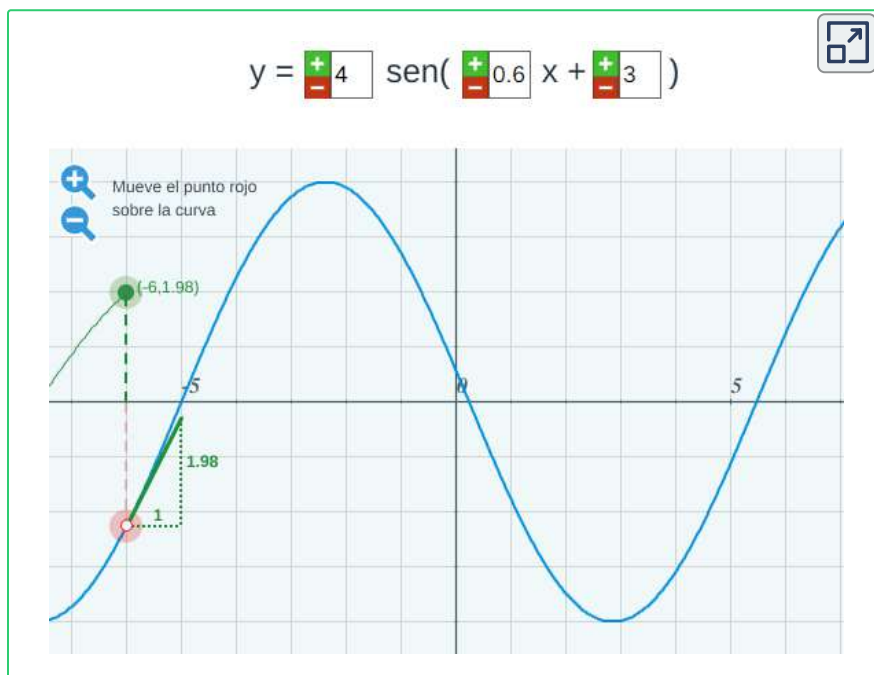
Usa la siguiente gráfica de $f(x)$ para dibujar la gráfica de $f'(x)$. La función $f(x)$ es aproximadamente sinusoidal, comienza en $(-4, 3)$, disminuye hasta un mínimo local en $(-2, 2)$, luego aumenta hasta un máximo local en $(3, 6)$ y se corta en $(7, 2)$.



 **Solución**



En la siguiente escena interactiva se representa la gráfica de la función derivada de $f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c)$ para distintos valores de a , b y c .





Pregunta
de control

Cuestión 3.7

Dibuja la gráfica de $f(x) = x^2 - 4$. ¿En qué intervalo está la gráfica de $f'(x)$ por encima del eje X ?

3.3.3 Derivadas y continuidad

Ahora que podemos representar la función derivada, examinaremos el comportamiento de las gráficas. Primero, consideremos la relación entre derivabilidad y continuidad. Veremos que si una función es derivable en un punto, debe ser continua en dicho punto; sin embargo, una función que es continua en un punto no es necesariamente derivable en ese punto. De hecho, una función puede ser continua y no derivable en un punto por diferentes razones.

TEOREMA 3.1. La derivabilidad implica continuidad

Sea $f(x)$ una función y a un punto de su dominio. Si $f(x)$ es derivable en a , entonces f es continua en a .

Prueba

Si $f(x)$ es derivable en a , entonces $f'(a)$ existe y

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Queremos demostrar que entonces $f(x)$ es continua en a mostrando que $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Así,

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a) + f(a)]$$

Multiplicando y dividiendo $f(x) - f(a)$ por $x - a$

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + \lim_{x \rightarrow a} f(a)$$

$$f(a) = f'(a) \cdot 0 + f(a)$$

Por lo tanto, concluimos que f es continua en a .

Acabamos de demostrar que la derivabilidad implica continuidad, pero ahora consideramos si la continuidad implica diferenciabilidad. Para determinar una respuesta a esta pregunta, examinamos la función $f(x) = |x|$. Esta función es continua en todo su dominio; sin embargo, $f'(0)$ no está definido y, por lo tanto, la continuidad no implica derivabilidad. Veamos que no existe la derivada en el cero.

Para $f(x) = |x|$,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

Este límite no existe porque

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Ver la [Figura 3.14](#).

La gráfica de la función $f(x) = |x|$ consta de dos segmentos rectos: el primero tiene por ecuación $y = -x$ y termina en el origen; el segundo tiene por ecuación $y = x$ y comienza en el origen.

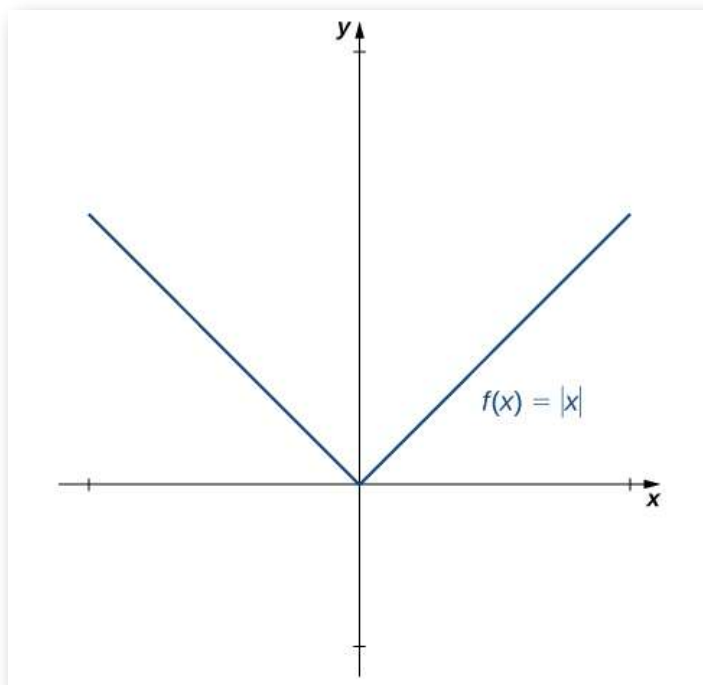


Figura 3.14 La función $f(x) = |x|$ es continua en 0 pero no derivable en dicho punto.

Consideremos algunos ejemplos más en los que una función continua no es derivable. Consideremos la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

Por tanto, $f'(0)$ no existe. Un vistazo rápido a la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ muestra que tiene una tangente vertical en 0 ([Figura 3.15](#)).

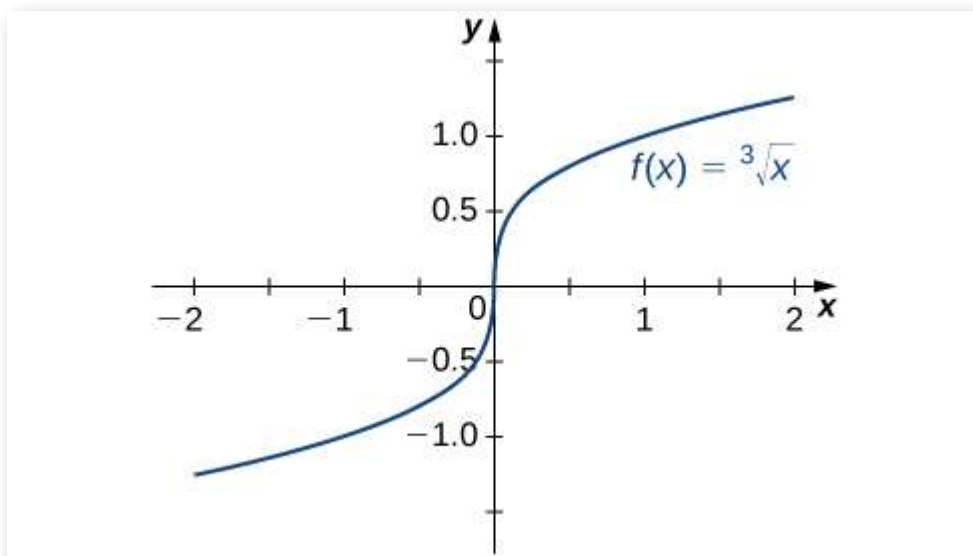


Figura 3.15 La función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ tiene una tangente vertical en $x = 0$. Es continua en el punto 0 pero no derivable en 0.

La función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

también tiene una derivada con un comportamiento interesante en el punto 0. Vemos que

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

este límite no existe, esencialmente porque las pendientes de las rectas secantes cambian continuamente de dirección a medida que se acercan a cero ([Figura 3.16](#)). Se grafica de la función parece una función sinusoidal que oscila rápidamente con una amplitud que disminuye a 0 en el origen.

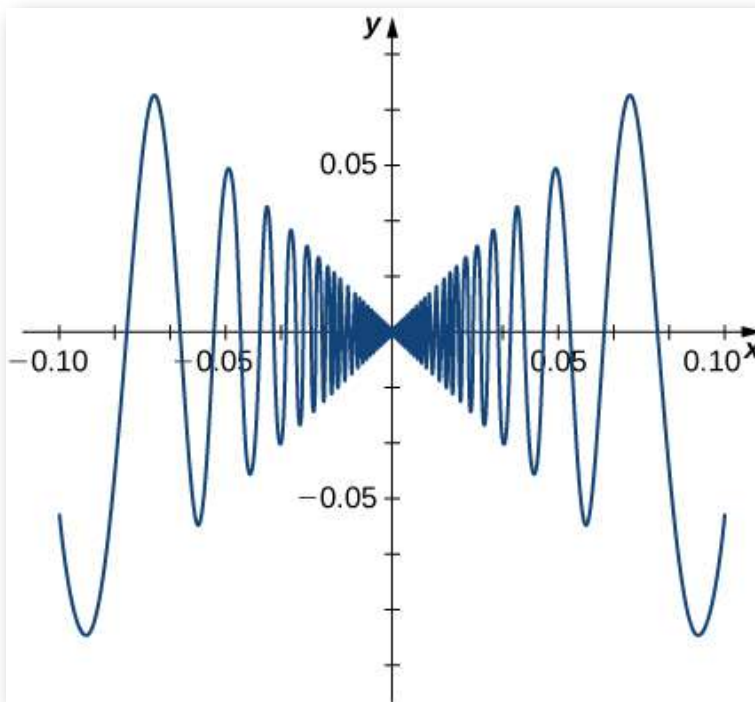


Figura 3.16 La función $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ no es derivable en el punto 0.

En resumen:

1. Observamos que si una función no es continua, no puede ser derivable, ya que toda función derivable debe ser continua. Sin embargo, si una función es continua, es posible que no sea derivable.
2. Hemos visto que $f(x) = |x|$ no es derivable en 0 porque el límite de las pendientes de las rectas tangentes a la izquierda y a la derecha no coincidían. Visualmente, esto resultó que la gráfica tenía un pico en la gráfica de la función en 0. De esto concluimos que para ser derivable en un punto, una función debe ser “suave” en ese punto.

3. Como hemos visto en el ejemplo de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, una función no es derivable en un punto donde hay una recta tangente vertical.
4. Como hemos visto al considerar $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, una función también puede no ser derivable en un punto en otras situaciones distintas a las anteriores.



Ejemplo

3.14 Una función por partes que es continua y diferenciable

Una empresa de juguetes quiere diseñar una pista para un automóvil que comienza a lo largo de una curva parabólica y luego se convierte en una línea recta ([Figura 3.17](#)). La función que describe la pista podría tener la forma siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x^2 + bx + c & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

donde x y $f(x)$ están en pulgadas. Para que el automóvil se mueva suavemente a lo largo de la pista, la función $f(x)$ debe ser continua y derivable en -10 . Encuentra los valores de b y c que hagan que $f(x)$ sea continua y derivable.

Se dibuja un carro en una línea que se curva a través de $(-10, 5)$ a $(10, 0)$ con una intersección y aproximadamente $(0, 2)$.

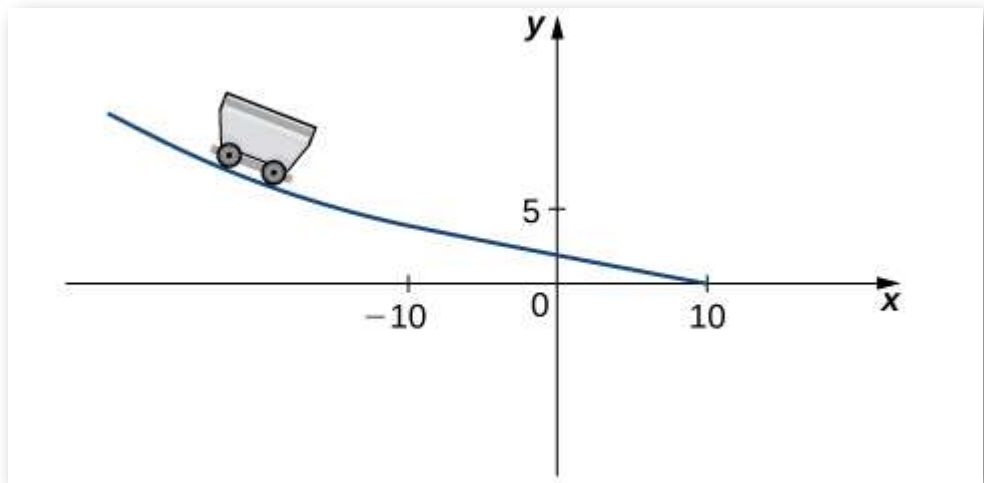


Figura 3.17 Para que el automóvil se mueva suavemente a lo largo de la pista, la función debe ser continua y derivable.

Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.8

Encuentra los valores de a y b que hagan

$$\begin{cases} ax + b & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

tanto continua como derivable en 3.

3.3.4 Derivadas de orden superior

La derivada de una función es en sí misma una función, por lo que podemos calcular la derivada de una derivada. Por ejemplo, la derivada de una función de posición es la tasa de cambio de la posición o velocidad. La derivada de la velocidad es la tasa de cambio de la velocidad, que es la aceleración. La nueva función que se obtiene al derivar la derivada se denomina segunda derivada. Además, podemos seguir tomando derivadas para obtener sucesivamente la derivada tercera, la derivada cuarta, etc. En conjunto, estas derivadas se denominan **derivadas de orden superior**. La notación para las derivadas de orden superior de la función $y = f(x)$ se pueden expresar de las siguientes formas:

$$f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

$$y''(x), y'''(x), y^{(4)}(x), \dots, y^{(n)}(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4} \cdots \frac{d^ny}{dx^n}$$

Es interesante notar que la notación para $\frac{d^2y}{dx^2}$ puede verse como un intento de expresar de forma más compacta $\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$. De manera análoga, $\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d^3y}{dx^3}$.



Ejemplo

3.15 Encontrar la segunda derivada

Dada $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, encuentra $f''(x)$.

 Solución



**Pregunta
de control**

Cuestión 3.9

Encuentra $f''(x)$ para $f(x) = x^2$.



Ejemplo

3.16 Encontrar aceleración

La posición de una partícula a lo largo de un eje de coordenadas en el tiempo t (en segundos) viene dada por

$$s(t) = 3t^2 - 4t + 1$$

(en metros). Encuentra la función que describe su aceleración en el tiempo t .

 Solución



**Pregunta
de control**

Cuestión 3.10

Para $s(t) = t^3$, encuentra $a(t)$.



3.3.5 Ejercicios



Para las siguientes funciones, utiliza la definición de derivada y encuentra $f'(x)$

54. $f(x) = 6$

55. $f(x) = 2 - 3x$ (Solución)

56. $f(x) = \frac{2x}{7} + 1$

57. $f(x) = 4x^2$ (Solución)

58. $f(x) = 5x - x^2$

59. $f(x) = \sqrt{2x}$ (Solución)

60. $f(x) = \sqrt{x-6}$

61. $f(x) = \frac{9}{x}$ (Solución)

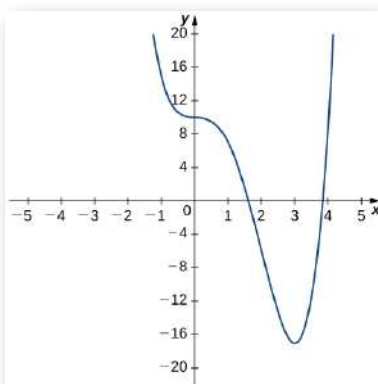
62. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

63. $f(x) = 1/\sqrt{x}$ (Solución)

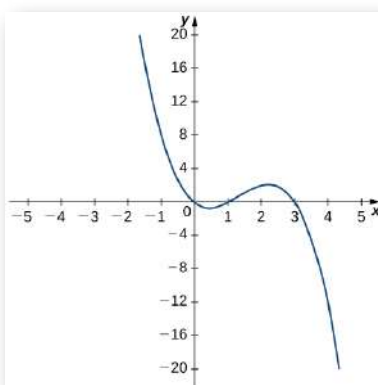


Para las siguientes funciones, utiliza la gráfica de $y = f(x)$ para hacer un bosquejo de la gráfica de su derivada $f'(x)$

64.

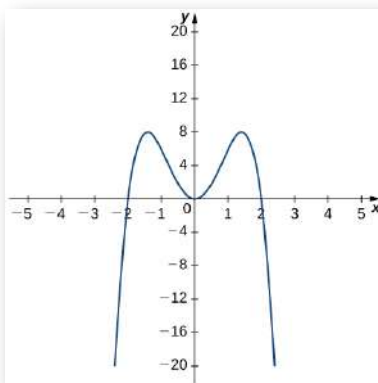


65.

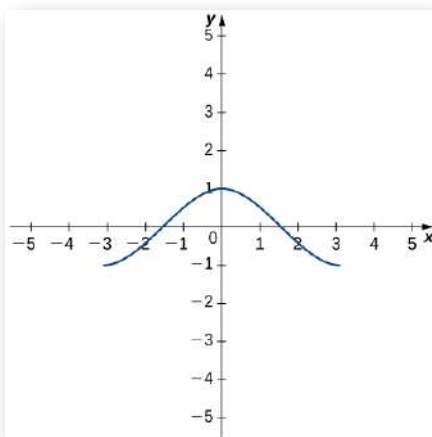


(Solución)

66.



67.



(**Solución**)



Para los siguientes ejercicios, el límite dado representa la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto a . Encuentra $f(x)$ y a

68. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^{2/3} - 1}{h}$

69. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(2+h)^2 + 2] - 14}{h}$ (**Solución**)

70. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi+h) + 1}{h}$

71. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^4 - 16}{h}$ (**Solución**)

72. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(3+h)^2 - (3+h)] - 15}{h}$

73. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$ (**Solución**)



Para las siguientes funciones,

- bosqueja la gráfica y
- usa la definición de la derivada para probar que la función no es derivable en $x = 1$

$$74. f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$75. f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ 3x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ (Solución)}$$

$$76. f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

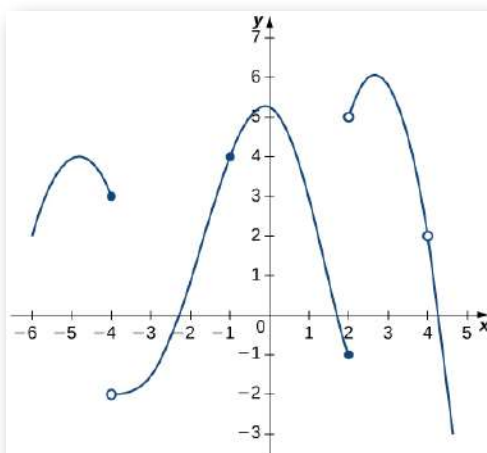
$$77. f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ (Solución)}$$



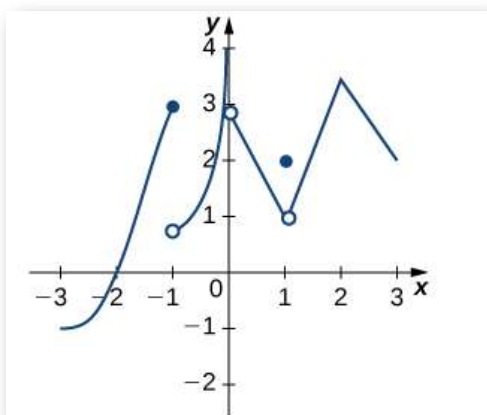
Para las siguientes funciones,

- determina para qué valores de $x = a$, el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe pero f no es continua en $x = a$
- determina para que valores de $x = a$, la función es continua pero no derivable en $x = a$

78.

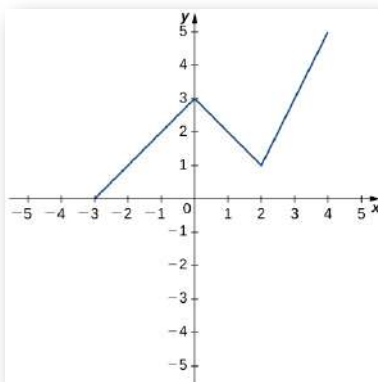


79.



(Solución)

80. Utiliza la gráfica de la función para evaluar a) $f'(-0.5)$, b) $f'(0)$, c) $f'(1)$, d) $f'(2)$ y e) $f'(3)$, si es que existen estos valores



Para las siguientes funciones, utiliza $f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ para encontrar $f''(x)$

81. $f(x) = 2 - 3x$ (**Solución**)

82. $f(x) = 4x^2$

83. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (**Solución**)



Para las siguientes funciones, utiliza una calculadora gráfica para representar $f(x)$. Determina la función $f'(x)$, y usa después una calculadora para representar $f'(x)$

84. [T] $f(x) = -\frac{5}{x}$

85. [T] $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$ (**Solución**)

86. [T] $f(x) = \sqrt{x} + 3x$

87. [T] $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ (**Solución**)

$$88. [T] f(x) = 1 + x + \frac{1}{x}$$

$$89. [T] f(x) = x^3 + 1$$

(Solución)



Para los siguientes ejercicios, describe lo que representan las dos expresiones en términos de cada una de las situaciones dadas. Asegúrate de incluir unidades.

- $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

90. $P(x)$ denota la población de una ciudad en el tiempo x en años.

91. $C(x)$ denota la cantidad total de dinero (en miles de dólares) gastada en concesiones por x clientes en un parque de diversiones.

(Solución)

92. $R(x)$ denota el coste total (en miles de dólares) de fabricación de x radio reloj.

93. $g(x)$ denota la calificación (en puntos porcentuales) recibida en una prueba, dadas x horas de estudio. **(Solución)**

94. $B(x)$ denota el coste (en dólares) de un libro de texto de sociología en las librerías universitarias de los Estados Unidos en x años desde 1990.

95. $p(x)$ denota la presión atmosférica a una altitud de x pies. **(Solución)**

96. Dibuja la gráfica de una función $y = f(x)$ con todas las siguientes propiedades:

- $f'(x) > 0$ para $-2 \leq x < 1$
- $f'(2) = 0$
- $f'(x) > 0$ para $x > 2$
- $f(2) = 2$ y $f(0) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- $f'(1)$ no existe.

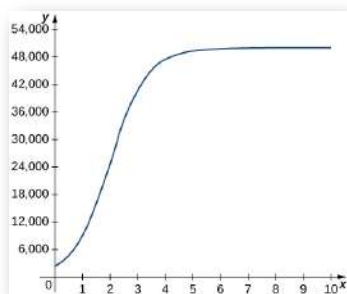
97. Supón que la temperatura T en grados Fahrenheit a una altura x en pies sobre el suelo está dada por $y = T(x)$. Da una interpretación física, con unidades, de $T'(x)$. Si sabemos que $T'(1000) = -0.1$, explica el significado físico. ([Solución](#))

98. Supón que la ganancia total de una empresa es $y = P(x)$ en miles de dólares cuando se venden x unidades de un artículo.

- ¿Qué mide $\frac{P(b)-P(a)}{b-a}$ para $0 < a < b$, y cuáles son las unidades?
- ¿Qué mide $P'(x)$ y cuáles son las unidades?
- Supongamos que $P'(30) = 5$, ¿cuál es el cambio aproximado en la ganancia si el número de artículos vendidos aumenta de 30 a 31?

99. El gráfico de la siguiente figura modela el número de personas $N(t)$ que han contraído la gripe t semanas después de su brote inicial en una ciudad con una población de 50.000 habitantes.

- Describe qué representa $N(t)$ y cómo se comporta cuando t aumenta.
- ¿Qué nos dice la derivada sobre cómo esta ciudad se ve afectada por el brote de gripe?



La función comienza en $(0, 3000)$ y aumenta rápidamente a una asíntota en $y = 50000$.

(Solución)



Para los siguientes ejercicios, usa la siguiente tabla, que muestra la altura h del cohete Saturno V para la misión Apolo 11, t segundos después del lanzamiento.

Tiempo (segundos)	Altura (metros)
0	0
1	2
3	13
4	25
5	32

100. ¿Cuál es el significado físico de $h'(t)$? ¿Cuáles son las unidades?

101. [T] Construye una tabla de valores para $h'(t)$ y representa tanto $h(t)$ como $h'(t)$ en la misma gráfica. Sugerencia: para los puntos interiores, estima tanto el límite izquierdo como el derecho. Un punto interior de un intervalo I es un elemento de I que no es un punto final del intervalo. ([Solución](#))

102. [T] El mejor ajuste lineal a los datos viene dado por $H(t) = 7.229t - 4.905$, donde H es la altura del cohete (en metros) y t es el tiempo transcurrido desde el despegue. A partir de esta ecuación, determina $H'(t)$. Representa la gráfica $H(t)$ con los datos dados y, en un plano de coordenadas separado, representa la gráfica de $H'(t)$.

103. [T] El mejor ajuste cuadrático a los datos viene dado por $G(t) = 1.429t^2 + 0.0857t - 0.1429$, donde G es la altura del cohete (en metros) y t es el tiempo transcurrido desde el despegue. A partir de esta ecuación, determina $G'(t)$. Representa la gráfica $G(t)$ con los datos dados y, en un plano de coordenadas separado, representa la gráfica de $G'(t)$. ([Solución](#))

104. [T] El mejor ajuste cúbico a los datos viene dado por $F(t) = 0.2037t^3 + 2.956t^2 - 2.705t + 0.4683$, donde F es la altura del cohete (en m) y t es el tiempo transcurrido desde el despegue. A partir de esta ecuación, determina $F'(t)$. Representa la gráfica de $F(t)$ con los datos dados y, en un plano de coordenadas separado, representa la gráfica de $F'(t)$. ¿La función lineal, cuadrática o cúbica se ajusta mejor a los datos?

105. Utilizando los mejores ajustes lineales, cuadráticos y cúbicos de los datos, determina cuáles son $H''(t)$, $G''(t)$ y $F''(t)$. ¿Cuáles son los significados físicos de $H''(t)$, $G''(t)$ y $F''(t)$, y sus unidades? (Solución)

3.4 Reglas de derivación

Objetivos de aprendizaje

1. Establecer las reglas de derivada de una potencia, producto por una constante y la de una constante.
2. Aplicar las reglas de la suma y la diferencia para combinar derivadas.
3. Usar la regla del producto para hallar la derivada de un producto de funciones.
4. Usar la regla del cociente para hallar la derivada de un cociente de funciones.
5. Extender la regla de la potencia a funciones con exponentes negativos.
6. Combinar las reglas de derivación para encontrar la derivada de un polinomio o una función racional.

Encontrar las derivadas de funciones mediante el uso de la definición de derivada puede ser un proceso largo y, para ciertas funciones, bastante desafiante. Por ejemplo, previamente encontramos que $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ usando un proceso que involucraba multiplicar una expresión por un conjugado antes de evaluar un límite. El proceso que podríamos usar para evaluar $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x})$ usando la definición, aunque similar, es más complicado.

En esta sección, desarrollamos reglas para encontrar derivadas que nos permitan evitar este proceso. Empezaremos por lo básico.

3.4.1 Derivada de una constante

Las funciones $f(x) = c$ y $g(x) = x^n$ donde n es un entero positivo son las funciones básicas a partir de los cuales se construyen todos los polinomios y funciones racionales. Para encontrar sus derivadas de manera eficiente, sin recurrir a la definición de límite de la derivada, primero debemos desarrollar fórmulas para derivar estas funciones básicas.

Derivada de una constante

Primero aplicamos la definición de límite de la derivada para encontrar la derivada de la función constante, $f(x) = c$. Para esta función, tanto $f(x) = c$ como $f(x + h) = c$, por lo tanto se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

La regla para derivar funciones constantes se llama **regla de la constante** y establece que la derivada de una función constante es cero; es decir, dado que una función constante es una recta horizontal, la pendiente o la tasa de cambio de una función constante es 0. Formulamos esta regla en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.2. La regla de la función constante

Sea c una constante. Si $f(x) = c$, entonces $f'(c) = 0$.

Alternativamente, podemos expresar esta regla como $\frac{d}{dx}(c) = 0$.



Ejemplo

3.17 Aplicar la regla de la constante

Encuentra la derivada de $f(x) = 8$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.11

Encuentra la derivada de $g(x) = -3$.

3.4.2 Derivada de una potencia

Hemos demostrado que (ejemplos 3.11 y 3.12)

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

En este punto, es posible que vea un patrón para derivadas de la forma $\frac{d}{dx}(x^n)$. Vamos a proceder para ello en etapas, comenzando con potencias enteras positivas. Antes de ello, analicemos un caso particular, $\frac{d}{dx}(x^3)$. A medida que avancemos en la derivación de estas funciones, observaremos que la técnica utilizada en este caso es esencialmente la misma que la técnica utilizada para probar el caso general.



Ejemplo

3.18 Derivando x^3

Encuentra $\frac{d}{dx}(x^3)$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.12

Encuentra $\frac{d}{dx}(x^4)$.

Como veremos, el procedimiento para encontrar la derivada de la forma general $f(x) = x^n$ es muy similar. Aunque a menudo no es prudente sacar conclusiones generales de ejemplos específicos, observamos que cuando derivamos $f(x) = x^3$, la potencia se convierte en el coeficiente de x^2 en la derivada y la potencia de x en la derivada disminuye en 1. El siguiente teorema establece que la regla de la potencia es válida para todas las potencias enteras positivas de x . Eventualmente ampliaremos este resultado a potencias enteras negativas.

Más adelante, veremos que esta regla también puede extenderse primero a potencias racionales de x y luego a potencias arbitrarias de x . Sin embargo, ten en cuenta que esta regla no se aplica a funciones en las que una constante se eleva a una potencia variable, como $f(x) = 3^x$.

TEOREMA 3.3. La regla de la potencia

Sea n un número entero positivo. Si $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Alternativamente, podemos expresar esta regla como

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

.

Prueba

Para $f(x) = x^n$ donde n es un entero positivo, tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

como

$$\begin{aligned} (x+h)^n &= x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \\ &\quad + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \dots + nxh^{n-1} + h^n \end{aligned}$$

se tiene

$$(x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \\ + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \dots + nxh^{n-1} + h^n$$

Al dividir ambos lados por h :

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \\ + \binom{n}{3}x^{n-3}h^2 + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

Finalmente,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \\ + \binom{n}{3}x^{n-3}h^2 + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}] = nx^{n-1}$$



Ejemplo

3.19 Aplicar la regla de la potencia

Encuentra la derivada de la función $f(x) = x^{10}$ aplicando la regla de la potencia.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.13

Encuentra la derivada de $f(x) = x^7$.

3.4.3 Las reglas de la suma, diferencia y producto por una constante

Se resumen en el siguiente teorema las reglas de derivación de la suma, diferencia y producto por constantes de funciones.

TEOREMA 3.4. Reglas de suma, diferencia y múltiplo constante

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables y k una constante. Entonces se cumple cada una de las siguientes reglas.

- **Regla de la suma.** La derivada de la suma de una función f y una función g es la suma de la derivada de f y la derivada de g .

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$$

es decir, para $j(x) = f(x) + g(x)$, $j'(x) = f'(x) + g'(x)$

- **Regla de la diferencia.** La derivada de la diferencia de una función f y una función g es la misma que la diferencia de la derivada de f y la derivada de g :

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) - \frac{d}{dx}(g(x))$$

es decir, para

$$j(x) = f(x) - g(x), j'(x) = f'(x) - g'(x)$$

- **Regla del producto por una constante.** La derivada de una constante k multiplicada por una función f es la misma que la constante multiplicada por la derivada:

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k \frac{d}{dx}(f(x))$$

es decir, para

$$j(x) = kf(x), j'(x) = kf'(x)$$

Prueba

Aquí solo proporcionamos la prueba de la regla de la suma. Para el resto se procedería de manera similar.

Para funciones diferenciables $f(x)$ y $g(x)$, consideramos $j(x) = f(x) + g(x)$. Usando la definición límite de la derivada tenemos

$$j'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{j(x+h) - j(x)}{h}$$

Sustituyendo

$$j(x+h) = f(x+h) + g(x+h)$$

$$j(x) = f(x) + g(x)$$

obtenemos

$$j'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

Reorganizando y reagrupando los términos, tenemos

$$j'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$$

Ahora aplicamos la ley de la suma para los límites y la definición de la derivada para obtener

$$\begin{aligned} j'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$



Ejemplo

3.20 Aplicación de la regla del múltiplo constante

Encuentra la derivada de $g(x) = 3x^2$ y compárela con la derivada de $f(x) = x^2$.



Solución



Ejemplo

3.21 Aplicación de reglas de derivadas básicas

Encuentra la derivada de $f(x) = 2x^5 + 7$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.14

Encuentra la derivada de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$.



Ejemplo

3.22 Encontrar la ecuación de una recta tangente

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 6$ en $x = 1$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.15

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^2 - 11$ en $x = 2$. Usa la ecuación punto-pendiente de la recta.

3.4.4 La derivada de un producto

Ahora que hemos examinado las reglas básicas, podemos comenzar a ver algunas de las reglas más avanzadas. En primer lugar veremos la derivada del producto de dos funciones. Aunque puede resultar tentador suponer que la derivada del producto es el producto de las derivadas, como así ocurría para las reglas de la suma y diferencia de funciones, la regla del producto no sigue este patrón. Para ver por qué no podemos usar este patrón, consideremos la función $f(x) = x^2$, cuya derivada es $f'(x) = 2x$ y no $\frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1$.

TEOREMA 3.5. Regla del producto

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones diferenciables, se cumple

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) + \frac{d}{dx}g(x) \cdot f(x)$$

Es decir, si $j(x) = f(x)g(x)$, entonces

$$j'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

Esto significa que la derivada de un producto de dos funciones es la derivada de la primera función por la segunda función más la derivada de la segunda función por la primera.

Prueba

Comenzamos suponiendo que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables. En un punto clave de esta demostración, debemos utilizar el hecho de que, dado que $g(x)$ es derivable, también es continua.

Utilizando el hecho de que $g(x)$ es continua,

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$$

Al aplicar la definición de la derivada mediante límites a la función $j(x) = f(x)g(x)$, obtenemos

$$j'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Al sumar y restar $f(x)g(x+h)$ en el numerador, tenemos

$$j'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h)}{h}$$

Después de separar este cociente y aplicar la ley de la suma para los límites, la derivada se convierte en

$$\begin{aligned} j'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \end{aligned}$$

Reordenando, obtenemos

$$\begin{aligned} j'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

Utilizando la continuidad de $g(x)$, la definición de las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$, y aplicando las leyes del límite, llegamos a la regla del producto,

$$j'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$



Ejemplo

3.23 Aplicación de la regla del producto a funciones en un punto

Para $j(x) = f(x)g(x)$, usa la regla del producto para encontrar $j'(2)$ si $f(2) = 3$, $f'(2) = -4$, $g(2) = 1$, y $g'(2) = 6$.



Solución



Ejemplo

3.24 Aplicar la regla de producto a binomios

Para $j(x) = (x^2 + 2)(3x^3 - 5x)$, encuentra $j'(x)$ aplicando la regla del producto. Verifica el resultado encontrando primero el producto y luego derivando.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.16

Usa la regla del producto para obtener la derivada de $j(x) = 2x^5(4x^2 + x)$.

3.4.5 La derivada de un cociente

Habiendo desarrollado y practicado la regla del producto, ahora consideramos la derivada del cociente de funciones. Como vemos en el siguiente teorema, la derivada del cociente no es el cociente de las derivadas. Es la derivada de la función del numerador por la función del denominador menos la derivada de la función del denominador por la función del numerador, todo dividido por el cuadrado de la función del denominador.

Para comprender mejor por qué no podemos simplemente tomar el cociente de las derivadas, observa que

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \quad \text{no} \quad \frac{\frac{d}{dx}(x^3)}{\frac{d}{dx}(x)} = \frac{3x^2}{1} = 3x^2$$

TEOREMA 3.6. La regla del cociente

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables. Se tiene

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x) - \frac{d}{dx}(g(x)) \cdot f(x)}{g(x)^2}.$$

Es decir, si $j(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, entonces

$$j'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

La prueba de la regla del cociente es muy similar a la prueba de la regla del producto, por lo que se omite aquí. En cambio, aplicamos esta nueva regla para encontrar derivadas en el siguiente ejemplo.



Ejemplo

3.25 Aplicación de la regla del cociente

Usa la regla del cociente para hallar la derivada de $k(x) = \frac{5x^2}{4x+3}$.



Solución

En este momento, se puede utilizar la regla del cociente para extender la regla de la potencia para encontrar derivadas de funciones de la forma x^k donde k es un número entero negativo.

TEOREMA 3.7. Regla de la potencia extendida

Si k es un entero negativo, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$$

Prueba

Si k es un entero negativo, podemos establecer $n = -k$, de modo que n es un entero positivo con $k = -n$. Dado que para cada entero positivo n , $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, ahora podemos aplicar la regla del cociente estableciendo $f(x) = 1$ y $g(x) = x^n$. En este caso, $f'(x) = 0$ y $g'(x) = nx^{n-1}$. Así,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{0 \cdot (x^n) - 1 \cdot (nx^{n-1})}{(x^n)^2}$$

Simplificando, vemos que

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{(n-1)-2n} = -nx^{-n-1}$$

Finalmente, observamos que como $k = -n$, al sustituir tenemos

$$\frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$$



Ejemplo

3.26 Usar la regla de potencia extendida

Encuentra $\frac{d}{dx}(x^{-4})$.



Solución



Ejemplo

3.27 Usar la regla de potencia extendida y la regla de multiplicación por una constante

Usa la regla de la potencia extendida y la regla de la multiplicación por una constante para encontrar la derivada de la función

$$f(x) = \frac{6}{x^2}$$



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.18

Encuentra la derivada de $g(x) = \frac{1}{x^7}$ usando la regla de la potencia extendida.

3.4.6 Combinando reglas de derivación

Como hemos visto a lo largo de los ejemplos de esta sección, rara vez se nos pide que apliquemos una sola regla de derivación para encontrar la derivada de una función dada. En este punto, al combinar las reglas de derivación, podemos encontrar las derivadas de cualquier polinomio o función racional. Más adelante encontraremos combinaciones más complejas de reglas de derivación. Una buena regla general para usar cuando se aplican varias reglas es aplicar las reglas en orden inverso al orden en que evaluaríamos la función.



Ejemplo

3.28 Combinando reglas de derivación

Para $k(x) = 3h(x) + x^2g(x)$, encuentra $k'(x)$.



Solución



Ejemplo

3.29 Ampliación de la regla del producto

Para $k(x) = f(x)g(x)h(x)$, expresa $k'(x)$ en términos de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ y sus derivadas.



Solución



Ejemplo

3.30 Combinando la regla del cociente y la regla del producto

Para $h(x) = \frac{2x^3 k(x)}{3x+2}$, encuentra $h'(x)$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.19

Encuentra $\frac{d}{dx}(3f(x) - 2g(x))$.



Ejemplo

3.31 Determinar dónde tiene una función una tangente horizontal

Determina los valores de x para los cuales $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 1$ tiene una recta tangente horizontal.

 Solución

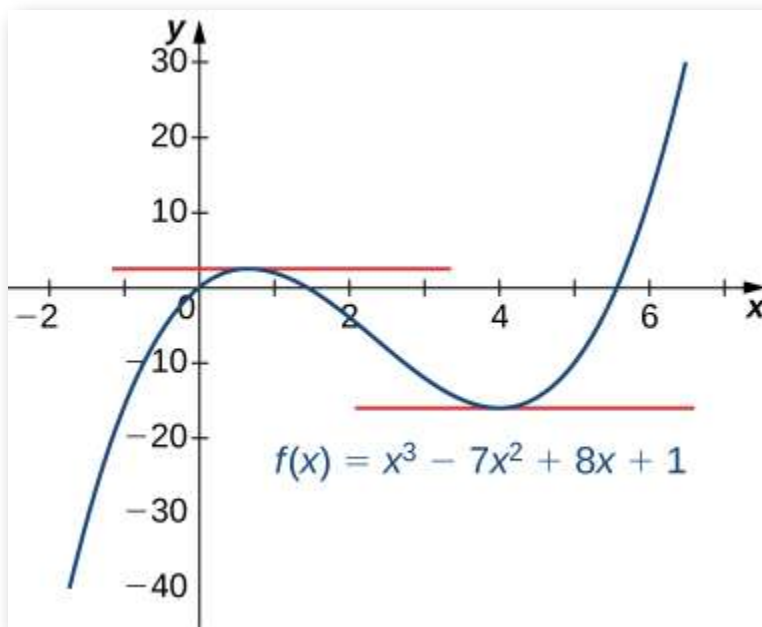


Figura 3.19 Esta función tiene rectas tangentes horizontales en $x = 2/3$ y $x = 4$.



Ejemplo

3.32 Encontrar una velocidad

La posición de un objeto en un eje de coordenadas en el tiempo t está dada por $s(t) = \frac{t}{t^2+1}$. ¿Cuál es la velocidad inicial del objeto?

 Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.20

Encuentra los valores de x para los cuales la gráfica de $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$ tiene una recta tangente paralela a la recta $y = 2x + 3$.

PROYECTO DEL ESTUDIANTE. Tribunas de Fórmula Uno

Las carreras de coches de Fórmula Uno pueden ser muy emocionantes de ver y atraer a muchos espectadores. Los diseñadores de pistas de Fórmula Uno deben asegurarse de que haya suficiente espacio en las tribunas alrededor de la pista para acomodar a estos espectadores. Sin embargo, las carreras de coches pueden ser peligrosas y las consideraciones de seguridad son primordiales. Las tribunas deben ubicarse donde los espectadores no estén en peligro si un conductor pierde el control de un automóvil ([Figura 3.20](#)).



Figura 3.20 La tribuna junto a una recta del circuito de carreras del Circuito de Barcelona-Cataluña, ubicada donde los espectadores no corren peligro.

La seguridad es especialmente una preocupación en los giros. Si un conductor no reduce la velocidad lo suficiente antes de entrar en la curva, el automóvil puede deslizarse fuera de la pista de carreras. Normalmente, esto solo da como resultado un giro más amplio, lo que ralentiza al conductor. Pero si el conductor pierde el control por completo, el automóvil puede salirse de la pista por completo en un camino tangente a la curva de la pista de carreras.

Supongamos que está diseñando una nueva pista de Fórmula Uno. Una sección de la pista se puede modelar mediante la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + x$ (Figura 3.21).

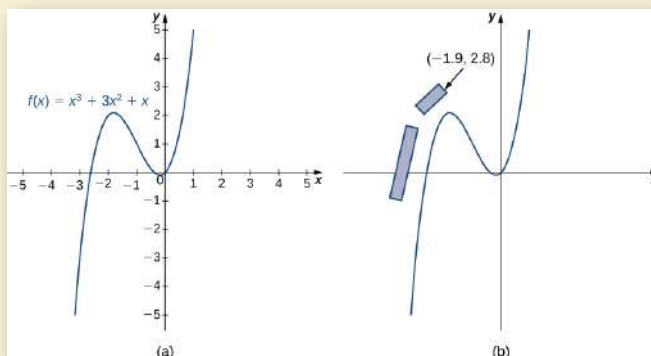


Figura 3.21 (a) Una sección de la pista de carreras se puede modelar mediante la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + x$. (b) La esquina delantera de la tribuna se encuentra en $(-1.9, 2.8)$.

El plan actual exige la construcción de tribunas a lo largo de la primera recta y alrededor de una parte de la primera curva. Los planos requieren que la esquina frontal de la tribuna se ubique en el punto $(-1.9, 2.8)$. Queremos determinar si esta ubicación pone en peligro a los espectadores en el caso de que un conductor pierda el control del automóvil.

Esta figura tiene dos partes etiquetadas como a y b . La figura a muestra la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2 + x$. La figura b muestra el mismo gráfico pero esta vez con dos cuadros. El primer cuadro aparece a lo largo del lado izquierdo del gráfico a ambos lados del eje x aproximadamente paralelo a $f(x)$. El segundo cuadro aparece un poco más alto, también aproximadamente paralelo a $f(x)$, con su esquina frontal ubicada en $(-1, 9, 2, 8)$. Tenga en cuenta que esta esquina está aproximadamente en línea con el camino directo de la pista antes de que comenzara a girar.

1. Los físicos han determinado que es más probable que los conductores pierdan el control de sus automóviles al entrar en una curva, en el punto donde la pendiente de la línea tangente es 1. Encuentra las coordenadas (x, y) de este punto cerca de la curva.
2. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva en este punto. Para determinar si los espectadores están en peligro en este escenario, encuentra la coordenada x del punto donde la línea tangente cruza la recta $y = 2.8$.
3. ¿Se estará seguro a la derecha de la tribuna o los espectadores corren peligro?
4. ¿Qué pasa si un conductor pierde el control de que la pendiente sea 1 como establecen los físicos? Supongamos que un conductor pierde el control en el punto $(-2.5, 0.625)$. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en este punto?

5. Si un conductor pierde el control como se describe en la parte 4, ¿están los espectadores a salvo?
6. ¿Debería continuar con el diseño actual de la tribuna o debería mover las tribunas?



3.4.7 Ejercicios



Para las siguientes funciones, encuentra $f'(x)$ para cada función

106. $f(x) = x^7 + 10$

107. $f(x) = x^3 - x + 1$ ([Solución](#))

108. $f(x) = 4x^2 - 7x$

109. $f(x) = 8x^4 + 9x^2 - 1$ ([Solución](#))

110. $f(x) = x^4 + \frac{2}{x}$

111. $f(x) = 3x \left(18x^4 + \frac{13}{x+1} \right)$ ([Solución](#))

112. $f(x) = (x + 2)(2x^2 - 3)$

113. $f(x) = x^2 \left(\frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)$ ([Solución](#))

114. $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{3}$

115. $f(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$ ([Solución](#))

$$116. f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$$

$$117. f(x) = \frac{x+9}{x^2-7x+1}$$

(**Solución**)



Para las siguientes funciones, encuentra la ecuación de la tangente $T(x)$ a la gráfica de la función en el punto indicado. Utiliza una calculadora gráfica para representar de la función y su recta tangente.

$$118. [T] y = 3x^2 + 4x + 1 \text{ en } (0, 1)$$

$$119. [T] y = 2\sqrt{x} + 1 \text{ en } (4, 5) \text{ (**Solución**)}$$

$$120. [T] y = \frac{2x}{x-1} \text{ en } (-1, 1)$$

$$121. [T] y = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \text{ en } (1, -1) \text{ (**Solución**)}$$



Para los siguientes ejercicios, supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son ambas funciones derivables. Encuentra la derivada de cada función $h(x)$

$$122. [T] h(x) = 4f(x) + \frac{g(x)}{7}$$

$$123. [T] h(x) = x^3 f(x) \text{ (**Solución**)}$$

$$124. [T] h(x) = 4 \frac{f(x)g(x)}{2}$$

$$125. [T] h(x) = \frac{3f(x)}{g(x)+2} \text{ (**Solución**)}$$



Para los siguientes ejercicios, supongamos que tanto $f(x)$ como $g(x)$ son derivables.

Utiliza la tabla para calcular las derivadas que se solicitan.

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	5	-2	0
$g(x)$	2	3	-4	6
$f'(x)$	-1	7	8	-3
$g'(x)$	4	1	2	9

126. Encuentra $h'(1)$ si $h(x) = xf(x) + 4g(x)$

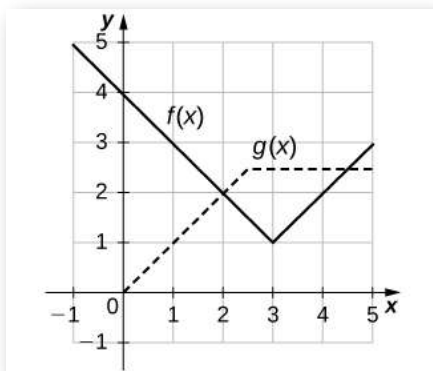
127. Encuentra $h'(2)$ si $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ([Solución](#))

128. Encuentra $h'(3)$ si $h(x) = 2x + f(x)g(x)$

129. Encuentra $h'(4)$ si $h(x) = \frac{1}{x} + \frac{g(x)}{f(x)}$ ([Solución](#))



Para los siguientes ejercicios, utiliza las siguientes figuras para encontrar la derivada indicada si es que existe.



130. Sea $h(x) = f(x) + g(x)$. Encuentra

- $h'(1)$
- $h'(3)$
- $h'(4)$

131. Sea $h(x) = f(x)g(x)$. Encuentra

- $h'(1)$
- $h'(3)$
- $h'(4)$

([Solución](#))

132. Sea $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Encuentra

- $h'(1)$
- $h'(3)$
- $h'(4)$



Para los siguientes ejercicios,

- evalúa $f'(a)$
- representa la función $f(x)$ y la recta tangente en el punto $x = a$.

133. [T] $f(x) = 2x^3 + 3x - x^2, a = 2$ ([Solución](#))

134. [T] $f(x) = \frac{1}{x} - x^2, a = 1$

135. [T] $f(x) = x^2 - x^{12} + 3x + 2, a = 0$ ([Solución](#))

136. [T] $f(x) = \frac{1}{x} - x^{2/3}, a = -1$

137. [T] Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 3, x = -1$ ([Solución](#))

138. [T] Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + \frac{4}{x} - 10, x = 8$

139. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = (3x - x^2)(3 - x - x^2), x = 1$ ([Solución](#))

140. Encuentra el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3$ tal que la recta tangente en el punto tiene intersección con el eje x en el punto 6

141. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, 2)$ y tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{6}{x-1}$ ([Solución](#))

142. Determina todos los puntos de la gráfica de $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ para los cuales

- la recta tangente es horizontal
- la recta tangente tiene una pendiente de -1

143. Encuentra un polinomio cuadrático tal que $f(1) = 5, f'(1) = 3$ y $f''(1) = -6$. ([Solución](#))

144. Un automóvil que circula por una autopista con tráfico ha recorrido $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ metros en t segundos

- Determina el tiempo en segundos para que la velocidad del coche sea 0
- Determina la aceleración del coche cuando la velocidad es 0

145. [T] Un arenque que nada en línea recta ha viajado $s(t) = \frac{t^2}{t^2+2}$ pies en t segundos. Determina la velocidad del arenque cuando ha viajado 3 segundos. ([Solución](#))

146. La población en millones de lenguado ártico en el Océano Atlántico se modela mediante la función $P(t) = \frac{8t+3}{0.2t^2+1}$, donde t se mide en años.

- Determina la población inicial de platija.
- Determina $P'(10)$ e interprete brevemente el resultado.

147. [T] La concentración de antibiótico en el torrente sanguíneo t horas después de ser inyectado viene dada por la función $C(t) = \frac{2t^2+t}{t^3+50}$, donde C se mide en miligramos por litro de sangre.

- Encuentra la tasa de cambio de $C(t)$.
- Determina la tasa de cambio para $t = 8, 12, 24$ y 36 .
- Describe brevemente lo que parece estar ocurriendo a medida que aumenta el número de horas.

([Solución](#))

148. Un editor de libros tiene una función de coste dada por $C(x) = \frac{x^3+2x+3}{x^2}$, donde x es el número de copias de un libro en miles y C es el coste, por libro, medido en dólares. Evalúa $C'(2)$ y explica su significado.

149. [T] Según la ley de Newton de la gravitación universal, la fuerza F entre dos cuerpos de masa constante m_1 y m_2 viene dada por la fórmula $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$, donde G es la constante gravitacional y d es la distancia entre los cuerpos.

- Supón que G , m_1 y m_2 son constantes. Encuentra la tasa de cambio de la fuerza F con respecto a la distancia d .
- Encuentra la tasa de cambio de la fuerza F con constante gravitacional $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$, en dos cuerpos separados por 10 metros, cada uno con una masa de 1000 kilogramos.

([Solución](#))

3.5 Derivada como tasa o razón de cambio

Objetivos de aprendizaje

1. Determinar el valor de una función a partir del valor conocido de la función en otro punto y la tasa de cambio.
2. Calcular la tasa de cambio promedio y explicar en qué se diferencia de la tasa de cambio instantánea.
3. Aplicar tasas de cambio al desplazamiento, la velocidad y la aceleración de un objeto que se mueve a lo largo de una recta.
4. Predecir la población futura a partir del valor actual y la tasa de crecimiento de la población.
5. Utilizar derivadas para calcular el coste y los ingresos marginales en una situación comercial.

En esta sección, examinamos algunas aplicaciones de la derivada centrándonos en la interpretación de la derivada como la tasa de cambio de una función. Estas aplicaciones incluyen aceleración y velocidad en física, tasas de crecimiento poblacional en biología y funciones marginales en economía.

3.5.1 Razón de cambio

Una aplicación de las derivadas es estimar un valor desconocido de una función en un punto utilizando un valor conocido de una función en un punto dado junto con su **tasa de cambio** en ese punto. Si $y = f(x)$ es una función definida en un intervalo $[a, a + h]$, entonces la cantidad de cambio de $f(x)$ en el intervalo es el cambio en los valores y de la función en ese intervalo y está dada por $f(a + h) - f(a)$.

La tasa de cambio promedio de la función f en ese mismo intervalo es la razón entre la cantidad de cambio en ese intervalo y el cambio correspondiente en los valores de x . Está dado por $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Como ya sabemos, la **tasa de cambio instantánea** de $f(x)$ en a es su derivada

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Para valores suficientemente pequeños de h , $f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Luego, podemos despejar $f(a+h)$ para obtener la fórmula de la cantidad de cambio:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$$

Podemos usar esta fórmula si solo conocemos $f(a)$ y $f'(a)$ y deseamos estimar el valor de $f(a+h)$. Por ejemplo, se puede considerar la población actual de una ciudad y la tasa a la que está creciendo para estimar su población en el futuro cercano. Como podemos ver en la [Figura 3.22](#), estamos aproximando $f(a+h)$ por la coordenada y en $a+h$ en la recta tangente a $f(x)$ en $x=a$. Observa que la precisión de esta estimación depende del valor de h , así como del valor de $f'(a)$.

En el plano cartesiano de coordenadas con a y $a+h$ marcadas en el eje x , se representa gráficamente la función f . Pasa por $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$. Se traza una línea recta a través de $(a, f(a))$ con su pendiente como derivada en ese punto.

Esta recta pasa por $(a + h, f(a) + f'(a)h)$. Hay un segmento de línea que conecta $(a + h, f(a + h))$ y $(a + h, f(a) + f'(a)h)$, y está marcado que este es el error al usar $f(a) + f'(a)h$ para estimar $f(a + h)$.

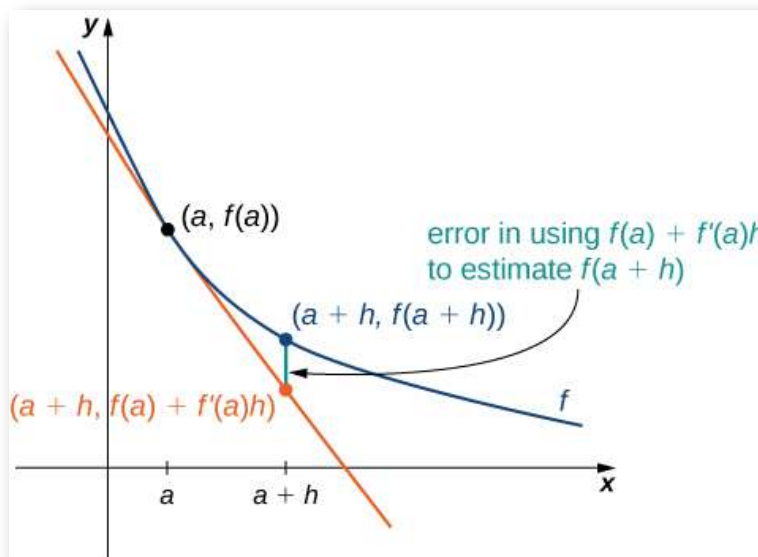


Figura 3.22 El nuevo valor de $f(a + h)$ es igual al valor original más la tasa de cambio multiplicada por el intervalo de cambio: $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$.

Enlace: en la siguiente página <https://demonstrations.wolfram.com/ASnowballsRateOfChange> hay una demostración interesante de la tasa de cambio.



Ejemplo

3.33 Estimando el valor de una función

Si $f(3) = 2$ y $f'(3) = 5$, estime $f(3.2)$.



Pregunta
de control

Cuestión 3.21

Dado $f(10) = -5$ y $f'(10) = 6$, estime $f(10.1)$.

3.5.2 Movimiento a lo largo de una recta

Otra aplicación de la derivada es analizar el movimiento a lo largo de una recta. Hemos descrito la velocidad como la tasa de cambio de la posición. Si tomamos la derivada de la velocidad, podemos encontrar la aceleración o la tasa de cambio de la velocidad. También es importante introducir la idea de aceleración, que es la magnitud de la velocidad. Por tanto, podemos enunciar las siguientes definiciones matemáticas.

DEFINICIÓN

Sea $s(t)$ una función que da la posición de un objeto en el tiempo t .

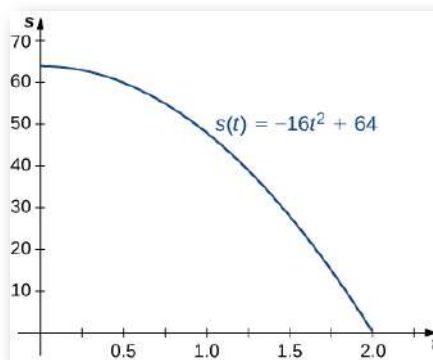
- La **velocidad** del objeto en el tiempo t viene dada por $v(t) = s'(t)$.
- La **rapidez** del objeto en el tiempo t viene dada por $|v(t)|$.
- La **aceleración** del objeto en t está dada por $a(t) = v'(t) = s''(t)$.



Ejemplo

3.34 Comparación entre la velocidad instantánea y la velocidad media

Se deja caer una pelota desde una altura de 64 pies. Su altura sobre el suelo (en pies) a los t segundos después, está definida por la función $s(t) = -16t^2 + 64$. En el plano cartesiano de coordenadas, se representa la función $s(t)$, esta función comienza en $(0, 64)$ y disminuye a $(2, 0)$.



- ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota cuando golpea el suelo?
- ¿Cuál es la velocidad promedio durante su caída?



Solución



Ejemplo

3.35 Interpretación de la relación entre $v(t)$ y $a(t)$

Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas en la dirección positiva hacia la derecha.

Su posición en el tiempo t está dada por $s(t) = t^3 - 4t + 2$. Encuentra $v(1)$ y $a(1)$ y usa estos valores para responder las siguientes preguntas.

- ¿Se mueve la partícula de izquierda a derecha o de derecha a izquierda en el tiempo $t = 1$?
- ¿La partícula se acelera o desacelera en el tiempo $t = 1$?



Solución



Ejemplo

3.36 Posición y velocidad

La posición de una partícula que se mueve a lo largo de un eje de coordenadas es $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 4$, $t \leq 0$.

- Encuentra $v(t)$.
- ¿En qué momento está en reposo la partícula?
- ¿En qué intervalos de tiempo se mueve la partícula de izquierda a derecha? ¿De derecha a izquierda?
- Utiliza la información obtenida para dibujar la trayectoria de la partícula a lo largo de un eje de coordenadas.



Solución



Figura 3.23 El signo de $v(t)$ determina la dirección de la partícula.



Pregunta
de control

Cuestión 3.22

Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas. Su posición en el tiempo t está dada por $s(t) = t^2 - 5t + 1$. ¿Se mueve la partícula de derecha a izquierda o de izquierda a derecha en el tiempo $t = 3$?

3.5.3 Tasa de cambio de una población

Además de analizar la velocidad, la aceleración y la posición, podemos utilizar derivadas para analizar varios tipos de poblaciones, incluidas aquellas tan diversas como colonias de bacterias y ciudades. Podemos considerar una población actual, junto con una tasa de crecimiento, para estimar el tamaño de la población en el futuro. La tasa de crecimiento de la población es su tasa de cambio y, en consecuencia, puede representarse mediante la derivada del tamaño de la población.

DEFINICIÓN

Si $P(t)$ es el número de entidades presentes en una población, entonces la tasa de crecimiento poblacional de $P(t)$ se define como $P'(t)$.



Ejemplo

3.37 Estimación de una población

La población de una ciudad se triplica cada 5 años. Si su población actual es de 10,000, ¿cuál será su población aproximada dentro de 2 años?



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.23

Se sabe que la población actual de una colonia de mosquitos es de 3.000; es decir, $P(0) = 3000$. Si $P'(0) = 100$, estime el tamaño de la población en 3 días, donde t se mide en días.

3.5.4 Tasa de cambio de coste y beneficio

Además de analizar el movimiento a lo largo de una recta y el crecimiento de la población, las derivadas son útiles para analizar los cambios en los costes, los ingresos y las ganancias. El concepto de función marginal es común en los campos de los negocios y la economía e implica la utilización de derivadas. El coste marginal es la derivada de la función de coste. El ingreso marginal es la derivada de la función de ingreso. La ganancia marginal es la derivada de la función de ganancia, que se basa en la función de coste y la función de ingreso.

DEFINICIÓN

- Si $C(x)$ es el coste de producir x artículos, entonces el **coste marginal** $MC(x)$ es $MC(x) = C'(x)$.
- Si $R(x)$ es el ingreso obtenido por la venta de x artículos, entonces el **ingreso marginal** $MR(x)$ es $MR(x) = R'(x)$.
- Si $P(x) = R(x) - C(x)$ es la ganancia obtenida de la venta de x artículos, entonces **la ganancia marginal** $MP(x)$ se define como $MP(x) = P'(x) = MR(x) - MC(x) = R'(x) - C'(x)$.

Podemos aproximarnos a

$$MC(x) = C'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$$

eligiendo un valor apropiado para h . Como x representa objetos, un valor razonable y pequeño para h es 1. Por lo tanto, al sustituir $h = 1$, obtenemos la aproximación $MC(x) = C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$. En consecuencia, $C'(x)$ para un valor dado de x se puede considerar como el cambio del coste asociado a la producción de un artículo adicional. De manera similar, $MR(x) = R'(x)$ aproxima los ingresos obtenidos al vender un artículo adicional, y $MP(x) = P'(x)$ aproxima la ganancia obtenida al producir y vender un artículo adicional.



Ejemplo

3.38 Aplicación de ingresos marginales

Supongamos que el número de cenas de barbacoa que se pueden vender, x , se puede relacionar con el precio cobrado, p , mediante la ecuación $p(x) = 9 - 0.03x$, $0 \leq x \leq 300$.

En este caso, el ingreso en dólares obtenido por la venta de x cenas de barbacoa viene dado por

$$R(x) = xp(x) = x(9 - 0.03x) = -0.03x^2 + 9x$$

para $0 \leq x \leq 300$.

Utiliza la función de ingresos marginales para estimar los ingresos obtenidos por la venta de la cena de barbacoa número 101. Compara esto con los ingresos reales obtenidos por la venta de esta cena.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.24

Supongamos que la ganancia obtenida de la venta de x cenas de pescado frito viene dada por $P(x) = -0.03x^2 + 8x - 50$. Utiliza la función de beneficio marginal para estimar el beneficio de la venta de la 101ª cena de pescado frito.



3.5.5 Ejercicios



Para los siguientes ejercicios, las funciones representan la posición de una partícula viajando a lo largo de una recta horizontal

- Encuentra las funciones velocidad y aceleración.
- Determina los intervalos de tiempo en los que el objeto se ralentiza o acelera.

150. $s(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$

151. $s(t) = 2t^3 - 15t^2 + 36t - 10$ (Solución)

152. $s(t) = \frac{t}{1+t^2}$

153. Se dispara un cohete verticalmente hacia arriba desde el suelo. La distancia s en pies del cohete desde el suelo después de t segundos viene dada por $s(t) = -16t^2 + 560t$.

- Encuentra la velocidad del cohete 3 segundos después de ser disparado.
- Encuentra la aceleración del cohete 3 segundos después de ser disparado.

(Solución)

154. Se lanza una pelota hacia abajo con una velocidad de 8 pies/s desde lo alto de un edificio de 64 pies de altura. Después de t segundos, su altura sobre el suelo viene dada por $s(t) = -16t^2 - 8t + 64$.

- Determina cuánto tiempo tarda la pelota en golpear el suelo.
- Determina la velocidad de la pelota cuando golpea el suelo.

155. La función de posición $s(t) = t^2 - 3t - 4$ representa la posición de la parte trasera de un automóvil que sale marcha atrás de un camino de entrada y luego conduce en línea recta, donde s está en pies y t en segundos. En este caso, $s(t) = 0$ representa el momento en el que la parte trasera del automóvil está en la puerta del garaje, por lo que $s(0) = -4$ es la posición inicial del automóvil, 4 pies dentro del garaje.

- Determina la velocidad del automóvil cuando $s(t) = 0$.
- Determina la velocidad del automóvil cuando $s(t) = 14$.

(Solución)

156. La posición de un colibrí volando a lo largo de una línea recta en t segundos viene dada por $s(t) = 3t^3 - 7t$ metros.

- Determina la velocidad del ave en $t = 1$ seg.
- Determina la aceleración del ave en $t = 1$ seg.
- Determina la aceleración del ave cuando la velocidad es igual a 0.

157. Una patata se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 100 pies / s desde una pistola de patatas en la parte superior de un edificio de 85 pies de altura. La distancia en pies que recorre la patata desde el suelo después de t segundos viene dada por $s(t) = -16t^2 + 100t + 85$.

- Encuentra la velocidad de la patata después de 0.5 s y 5.75 s.
- Encuentra la rapidez de la patata a 0.5 seg. y 5.75 seg.
- Determina cuándo la patata alcanza su altura máxima.
- Encuentra la aceleración de la patata a 0.5 seg. y 1.5 seg.
- Determina cuánto tiempo está la patata en el aire.
- Determina la velocidad de la patata al golpear el suelo.

(Solución)

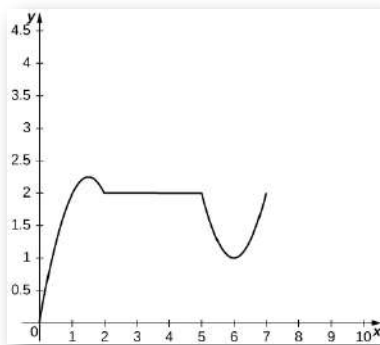
158. La función de posición $s(t) = t^3 - 8t$ da la posición en millas de un tren de carga donde el este es la dirección positiva y t se mide en horas.

- Determina la dirección en la que viaja el tren cuando $s(t) = 0$.
- Determina la dirección en la que viaja el tren cuando $a(t) = 0$.
- Determina los intervalos de tiempo en los que el tren se ralentiza o acelera.

159. El siguiente gráfico muestra la posición $y = s(t)$ de un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta. En el plano cartesiano de coordenadas, se representa la gráfica de una función que es parte de una parábola desde el origen hasta $(2, 2)$ con un máximo en $(1.5, 2.25)$. Después la función es constante hasta $(5, 2)$, en cuyo punto se vuelve una parábola nuevamente, disminuyendo después hasta un mínimo en $(6, 1)$ y luego aumentando a $(7, 2)$.

- Utiliza el gráfico de la función de posición para determinar los intervalos de tiempo en los que la velocidad es positiva, negativa o cero.
- Dibuja la gráfica de la función de velocidad.
- Utiliza la gráfica de la función de velocidad para determinar los intervalos de tiempo en los que la aceleración es positiva, negativa o cero.
- Determina los intervalos de tiempo en que el objeto acelera o desacelera.

(Solución)



160. La función de coste, en dólares, de una empresa que fabrica procesadores de alimentos está dada por $C(x) = 200 + \frac{7}{x} + \frac{x^2}{7}$, donde x es el número de procesadores de alimentos fabricados.

- Encuentra la función de coste marginal.
- Utiliza la función de coste marginal para estimar el coste de fabricación del decimotercer procesador de alimentos.
- Encuentra el coste real de fabricación del decimotercer procesador de alimentos.

161. El precio p (en dólares) y la demanda x de un cierto radio reloj digital están relacionados por la función precio-demanda $p = 10 - 0.001x$.

- Encuentra la función de ingresos $R(x)$.
- Encuentra la función de ingreso marginal.
- Encuentra el ingreso marginal en $x = 2000$ y 5000 .

(Solución)

162. [T] Se obtiene una ganancia cuando los ingresos superan el coste. Supón que la función de ganancias para un fabricante de patinetes viene dada por $P(x) = 30x - 0.3x^2 - 250$, donde x es el número de patinetes vendidos.

- Encuentra el beneficio exacto de la venta del trigésimo patinete.
- Encuentra la función de ganancia marginal y úsela para estimar la ganancia de la venta del trigésimo patinete.

163. [T] En general, la función de ganancias es la diferencia entre las funciones de ingresos y costes: $P(x) = R(x) - C(x)$. Supón que las funciones de precio-demanda y coste para la producción de taladros inalámbricos están dadas respectivamente por $p = 143 - 0.03x$ y $C(x) = 75,000 + 65x$, donde x es el número de taladros inalámbricos que se venden a un precio de p dólares por taladro y $C(x)$ es el coste de producción de x taladros inalámbricos.

- Encuentra la función de coste marginal.
- Encuentra las funciones de ingresos e ingresos marginales.
- Encuentra $R'(1000)$ y $R'(4000)$. Interpreta los resultados.

- Encuentra las funciones de beneficio y beneficio marginal.
- Encuentra $P'(1000)$ y $P'(4000)$. Interpreta los resultados.

(Solución)

164. Una pequeña ciudad de Ohio encargó a una empresa que realizara un estudio que modelara la tasa de cambio de la población de la ciudad. El estudio encontró que la población de la ciudad (medida en miles de personas) se puede obtener mediante la función $P(t) = -13t^3 + 64t + 3000$, donde t se mide en años.

- Encuentra la función de tasa de cambio $P'(t)$ de la función de población.
- Encuentra $P'(1)$, $P'(2)$, $P'(3)$ y $P'(4)$. Interpreta lo que significan los resultados para la ciudad.
- Interpreta los resultados obtenidos en el apartado anterior.

165. [T] Un cultivo de bacterias crece en número según la función $N(t) = 3000 \left(1 + \frac{4t}{t^2 + 100}\right)$, donde t se mide en horas.

- Calcula la tasa de cambio del número de bacterias.
- Encuentra $N'(0)$, $N'(10)$, $N'(20)$ y $N'(30)$.
- Interpreta los resultados en (b) sobre el crecimiento de la población de bacterias.

(Solución)

166. La fuerza centrípeta de un objeto de masa m está dada por $F(r) = \frac{mv^2}{r}$, donde v es la velocidad de rotación y r es la distancia desde el centro de rotación.

- Encuentra la tasa de cambio de la fuerza centrípeta con respecto a la distancia desde el centro de rotación.
- Encuentra la tasa de cambio de la fuerza centrípeta de un objeto con una masa de 1000 kilogramos, una velocidad de 13.89 m/s y una distancia desde el centro de rotación de 200 metros.



Las siguientes preguntas se refieren a la población (en millones) de Londres por década en el siglo XIX, que se incluyen en la siguiente tabla.

Años desde 1800	Población (millones)
1	0.8795
11	1.040
21	1.264
31	1.516
41	1.661
51	2.000
61	2.634
71	3.272
81	3.911
91	4.422

Tabla 3.4 Población de Londres Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/Demographics_of_London.

167. [T]

- Con una calculadora o un programa de computadora, encuentra la función lineal más adecuada para medir la población.
- Encuentra la derivada de la ecuación obtenida en a) y explica su significado físico.
- Encuentra la segunda derivada de la ecuación y explica su significado físico.

(Solución)

168. [T]

- Con una calculadora o un programa de ordenador, encuentra la curva cuadrática que mejor se ajuste a los datos.
- Encuentra la derivada de la ecuación y explica su significado físico.
- Encuentra la segunda derivada de la ecuación y explica su significado físico.



Para los siguientes ejercicios, considera un astronauta en un planeta grande de otra galaxia. Para aprender más sobre la composición de este planeta, el astronauta deja caer un sensor electrónico en una zanja profunda. El sensor transmite su posición vertical cada segundo en relación con la posición del astronauta. El resumen de los datos del sensor de caída se muestra en la siguiente tabla.

Tiempo después de la caída (s)	Posición (m)
0	0
1	-1
2	-2
3	-5
4	-7
5	-14

169. [T]

- Con una calculadora o un programa de ordenador, encuentra la curva cuadrática que mejor se ajuste a los datos.
- Encuentra la derivada de la función de posición y explica su significado físico.
- Encuentra la segunda derivada de la función de posición y explica su significado físico.

(Solución)

170. [T]

- Con una calculadora o un programa de computadora, encuentra la curva cúbica que mejor se ajuste a los datos.
- Encuentra la derivada de la función de posición y explica su significado físico.
- Encuentra la segunda derivada de la función de posición y explica su significado físico.
- Usando el resultado del apartado c) explique por qué una función cúbica no es una buena opción para este problema.



Los siguientes problemas tratan de las ecuaciones de Holling tipo I, II y III. Estas ecuaciones describen el evento ecológico de crecimiento de una población de depredadores dada la cantidad de presas disponibles para el consumo.

171. [T] La ecuación de Holling tipo I se describe mediante $f(x) = ax$, donde x es la cantidad de presas disponibles y $a > 0$ es la velocidad de consumo de presas del depredador.

- Representa la ecuación de Holling tipo I, dado $a = 0.5$.
- Determina la primera derivada de la ecuación de Holling tipo I y explique físicamente lo que implica la derivada.
- Determina la segunda derivada de la ecuación de Holling tipo I y explique físicamente lo que implica la derivada.
- Usando las interpretaciones de b) y c) explica por qué la ecuación de Holling tipo I puede no ser realista.

(Solución)

172. [T] La ecuación de Holling tipo II se describe mediante $f(x) = \frac{ax}{n+x}$, donde x es la cantidad de presas disponibles y $a > 0$ es la tasa máxima de consumo del depredador.

- Representa la gráfica de la ecuación de Holling tipo II dado $a = 0.5$ y $n = 5$. ¿Cuáles son las diferencias entre las ecuaciones de Holling tipo I y II?
- Toma la primera derivada de la ecuación de Holling tipo II e interprete el significado físico de la derivada.
- Muestra que $f(n) = \frac{1}{2}a$ e interpreta el significado del parámetro n .

- c. Encuentra e interpreta el significado de la segunda derivada. ¿Qué hace que la función Holling tipo II sea más realista que la función Holling tipo I?

173. [T] La ecuación de Holling tipo III se describe mediante $f(x) = \frac{ax^2}{n^2+x^2}$, donde x es la cantidad de presas disponibles y $a > 0$ es la tasa máxima de consumo del depredador.

- Representa la ecuación de Holling tipo III dado $a = 0.5$ y $n = 5$. ¿Cuáles son las diferencias entre las ecuaciones de Holling tipo II y III?
- Toma la primera derivada de la ecuación de Holling tipo III e interpreta el significado físico de la derivada.
- Encuentra e interprete el significado de la segunda derivada (puede ser útil graficar la segunda derivada).
- ¿Qué fenómenos ecológicos adicionales describe la función Holling tipo III en comparación con la función Holling tipo II? (**Solución**)

174. [T] Las poblaciones de liebre de patas blancas (en miles) y el lince (en cientos) analizadas durante 7 años desde 1937 hasta 1943 se muestran en la siguiente tabla.

Población de liebres con patas blancas (miles)	Población de lince (cientos)
20	10
55	15
65	55
95	60

Tabla 3.5 Poblaciones de liebres de patas blancas y lince

La liebre con patas blancas es la principal presa del lince. Fuente: <http://www.biotopics.co.uk/newgcse/predatorprey.html>.

- Representa en una gráfica los datos y determina qué función de tipo Holling se ajusta mejor a ellos.
- Usando el significado de los parámetros a y n , determina los valores para esos parámetros examinando el gráfico de los datos. Recuerda que n mide el valor de presas a considerar para tener la mitad de consumo de los depredadores.
- Representa las funciones de tipo I, II y III de Holling a partir de los datos. ¿Fue el resultado de la parte a) correcto?

3.6 Derivadas de funciones trigonométricas

Objetivos de aprendizaje

1. Encontrar las derivadas de las funciones seno y coseno.
2. Encontrar las derivadas de las funciones trigonométricas estándar.
3. Calcular las derivadas de orden superior de las funciones seno y coseno.

Uno de los tipos de movimiento más importantes en física es el movimiento armónico simple, que está asociado por ejemplo a un objeto con masa que oscila en un resorte. El movimiento armónico simple se puede describir utilizando las funciones seno o coseno. En esta sección ampliamos nuestro conocimiento calculando las derivadas de estas y otras funciones trigonométricas.

3.6.1 Derivadas de las funciones seno y coseno

Comenzamos con las derivadas de las funciones seno y coseno y luego las usamos para obtener fórmulas para las derivadas de las cuatro funciones trigonométricas restantes. Sabiendo calcular las derivadas de las funciones seno y coseno nos permitirá encontrar la velocidad y la aceleración del movimiento armónico simple.

Comenzamos nuestra exploración de la derivada de la función seno usando la fórmula para hacer una suposición razonable de su derivada. Recuerde que para una función $f(x)$,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En consecuencia, para valores de h muy cercanos a 0,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vemos que al usar $h = 0.01$,

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}x) \approx \frac{\text{sen}(x+0.01) - \text{sen}(x)}{0.01}$$

Considerando $D(x) = \frac{\text{sen}(x+0.01) - \text{sen}x}{0.01}$ y usando una utilidad gráfica, podemos obtener una gráfica de una aproximación a la derivada de $\text{sen}(x)$ ([Figura 3.25](#)).

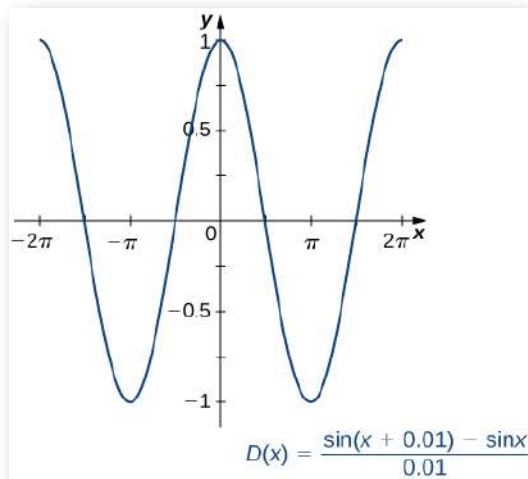


Figura 3.25 La gráfica de la función $D(x) = (\text{sen}(x + 0.01) - \text{sen}x)/0.01$ se parece mucho a una curva de coseno.

Tras la inspección, la gráfica de $D(x)$ parece estar muy cerca de la gráfica de la función coseno. De hecho, demostraremos que

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}x) = \text{cos}x$$

Si tuviéramos que seguir los mismos pasos para aproximar la derivada de la función coseno, encontraríamos que

$$\frac{d}{dx}(\text{cos}x) = -\text{sen}x$$

TEOREMA 3.8. Las derivadas de $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$

La derivada de la función seno es el coseno y la derivada de la función coseno es el seno negativo.

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}x) = \text{cos}x \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \quad (3.12)$$

Prueba

Debido a que las demostraciones para $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x)) = \cos(x)$ y $\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\operatorname{sen}(x)$ usan técnicas similares, proporcionamos solo la prueba para la primera igualdad. Antes de comenzar, recuerde dos límites trigonométricos importantes:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

Las gráficas de $y = \frac{\operatorname{sen} h}{h}$ y $y = \frac{\cos h - 1}{h}$ se muestran en la [Figura 3.26](#). Ambas funciones tienen discontinuidades en el punto 0.

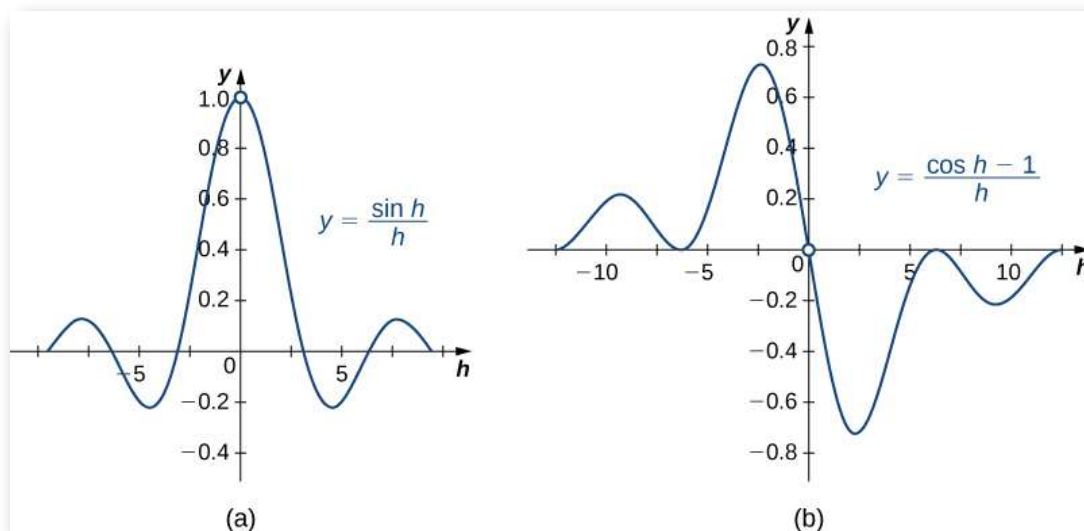


Figura 3.26 Estas gráficas muestran dos límites importantes necesarios para establecer las fórmulas derivadas de las funciones seno y coseno.

También recordamos la siguiente identidad trigonométrica para el seno de la suma de dos ángulos:

$$\text{sen}(x + h) = \text{sen}x \cdot \cosh + \cos x \cdot \text{sen}h$$

Ahora que hemos reunido todas las ecuaciones e identidades necesarias, procedemos con la demostración.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \text{sen}x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + h) - \text{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x \cosh + \cos x \text{sen}h - \text{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}x \cosh - \text{sen}(x)}{h} + \frac{\cos x \text{sen}h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\text{sen}x \frac{\cosh - 1}{h} + \cos x \frac{\text{sen}h}{h} \right) \\ &= \text{sen}x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x \end{aligned}$$

La [Figura 3.27](#) muestra la relación entre la gráfica de $f(x) = \text{sen}x$ y su derivada $f'(x) = \cos x$. Observa que en los puntos donde $f(x) = \text{sen}x$ tiene una tangente horizontal, su derivada $f'(x) = \cos x$ toma el valor cero.

También vemos que donde $f(x) = \text{sen}x$ aumenta, $f'(x) = \cos x > 0$ y donde $f(x) = \text{sen}x$ es decreciente, $f'(x) = \cos x < 0$. Se representan las funciones $f(x) = \text{sen}x$ y $f'(x) = \cos x$. Es evidente que cuando $f(x)$ tiene un máximo o un mínimo, $f'(x) = 0$.

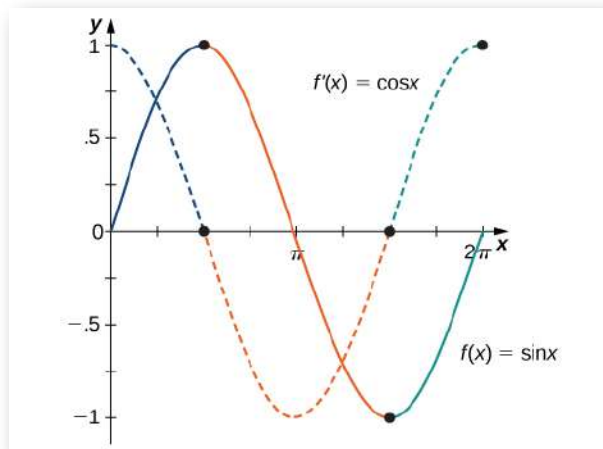
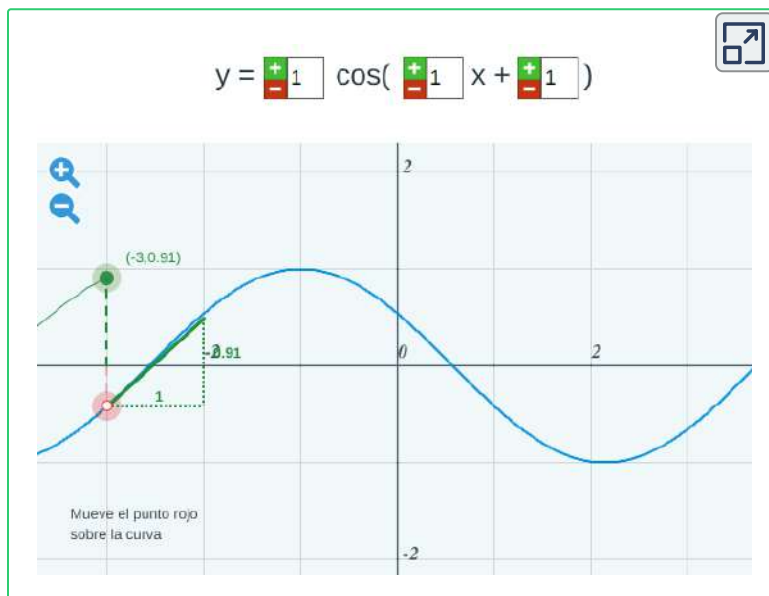


Figura 3.27 Donde $f(x)$ tiene un máximo o un mínimo, $f'(x) = 0$ es decir, $f'(x) = 0$ donde $f(x)$ tiene una tangente horizontal. Estos puntos aparecen representados en la gráfica.



En la siguiente escena interactiva incorporamos un applet que permite analizar la gráfica de la función coseno como derivada de la función seno.





Ejemplo

3.39 Derivar una función que contiene $\text{sen}(x)$

Encuentra la derivada de $f(x) = 5x^3 \text{sen}(x)$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.25

Encuentra la derivada de $f(x) = \text{sen}(x)\cos(x)$.



Ejemplo

3.40 Hallar la derivada de una función que contiene $\cos x$

Encuentra la derivada de $g(x) = \frac{\cos x}{4x^2}$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.26

Encuentra la derivada de $f(x) = \frac{x}{\cos x}$.



Ejemplo

3.41 Una aplicación a la velocidad

Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas de tal manera que su posición en el tiempo t está dada por $s(t) = 2\sin(t) - t$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. ¿En qué momentos está en reposo la partícula?



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.27

Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas. Su posición en el tiempo t está dada por $s(t) = \sqrt{3}t + 2\cos t$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. ¿En qué momentos está en reposo la partícula?

3.6.2 Derivadas de otras funciones trigonométricas

Dado que las cuatro funciones trigonométricas restantes pueden expresarse como cocientes que involucran seno, coseno o ambos, podemos usar la regla del cociente para encontrar sus derivadas.



Ejemplo

3.42 La derivada de la función tangente

Encuentra la derivada de $f(x) = \tan x$.

**Pregunta
de control****Cuestión 3.28**

Encuentra la derivada de $f(x) = \cot x$.

Las derivadas de las funciones trigonométricas restantes pueden obtenerse utilizando técnicas similares. Proporcionamos estas fórmulas en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.9. Derivadas de $\operatorname{tg} x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$

Las derivadas de las funciones trigonométricas restantes son las siguientes:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x \quad (3.16)$$



Ejemplo

3.43 Encontrar la ecuación de una recta tangente

Encuentra la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = \cot x$ en $x = \pi/4$.



Solución



Ejemplo

3.44 Hallar la derivada de funciones trigonométricas

Encuentra la derivada de $f(x) = \csc x + x \tan x$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.29

Encuentra la derivada de $f(x) = 2 \tan x - 3 \cot x$.



Pregunta de control

Cuestión 3.30

Encuentra la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \tan x$ en $x = \frac{\pi}{6}$.

3.6.3 Derivadas de orden superior

Las derivadas de orden superior de $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ siguen un patrón repetido. Siguiendo el patrón, podemos encontrar cualquier derivada de orden superior de ambas funciones.



Ejemplo

3.45 Encontrar derivadas de orden superior de $y = \text{sen}(x)$.

Encuentra las primeras cuatro derivadas de $y = \text{sen}x$.



Solución

Análisis

Una vez que reconocemos el patrón de derivadas, podemos encontrar cualquier derivada de orden superior determinando el paso en el patrón al que corresponde. Por ejemplo, la derivada de orden cualquier múltiplo de 4 de la función $\text{sen}x$ es igual a $\text{sen}x$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d^4}{dx^4}(\text{sen}x) &= \frac{d^8}{dx^8}(\text{sen}x) = \frac{d^{12}}{dx^{12}}(\text{sen}x) \\ &= \dots = \frac{d^{4n}}{dx^{4n}}(\text{sen}x) = \text{sen}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^5}{dx^5}(\text{sen}x) &= \frac{d^9}{dx^9}(\text{sen}x) = \frac{d^{13}}{dx^{13}}(\text{sen}x) \\ &= \dots = \frac{d^{4n+1}}{dx^{4n+1}}(\text{sen}x) = \text{cos } x\end{aligned}$$



Pregunta
de control

Cuestión 3.31

Para $y = \cos x$, encuentra $\frac{d^4 y}{dx^4}$.



Ejemplo

3.46 Patrón para derivadas de orden superior de $y = \sin(x)$

Encuentra $\frac{d^{74}}{dx^{74}} (\sin x)$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.32

Para $y = \sin x$, encuentra $\frac{d^{59}}{dx^{59}} (\sin x)$.



Ejemplo

3.47 Una aplicación a la aceleración

Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas de tal manera que su posición en el tiempo t viene dada por $s(t) = 2 - \sin(t)$. Encuentra $v(\pi/4)$ y $a(\pi/4)$. Compara estos valores y decide si la partícula se está acelerando o desacelerando.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.33

Un bloque unido a un resorte se mueve verticalmente. Su posición en el tiempo t viene dada por $s(t) = 2\sin t$. Encuentra $v(5\pi/6)$ y $a(5\pi/6)$. Compare estos valores y decide si el bloque se acelera o se ralentiza.



3.6.4 Ejercicios



Para los siguientes ejercicios, encuentra $\frac{dy}{dx}$ para las funciones consideradas.

175. $y = x^2 - \sec x + 1$ ([Solución](#))

176. $y = 3\csc x + \frac{5}{x}$

177. $y = x^2 \cot x$ ([Solución](#))

178. $y = x - x^3 \sin(x)$

179. $y = \frac{\sec x}{x}$ ([Solución](#))

180. $y = \sin(x) \tan(x)$

181. $y = (x + \cos(x))(1 - \sin(x))$ ([Solución](#))

182. $y = \frac{\tan(x)}{1 - \sec(x)}$

$$183. \quad y = \frac{1 - \cot(x)}{1 + \cot(x)} \text{ (Solución)}$$

$$184. \quad y = \cos(x)(1 + \csc(x))$$



Para los siguientes ejercicios, encuentra la ecuación de la recta tangente a cada una de las funciones dadas en los valores indicados de x . Luego usa una calculadora para graficar tanto la función como la recta tangente para asegurarse que la ecuación de la recta tangente sea correcta.

$$185. \quad [T] \quad f(x) = -\operatorname{sen}(x), x = 0. \text{ (Solución)}$$

$$186. \quad [T] \quad f(x) = -\csc(x), x = \frac{\pi}{2}.$$

$$187. \quad [T] \quad f(x) = 1 + \cos(x), x = \frac{3\pi}{2}. \text{ (Solución)}$$

$$188. \quad [T] \quad f(x) = \sec(x), x = \frac{\pi}{4}.$$

$$189. \quad [T] \quad f(x) = x^2 - \operatorname{tg}(x), x = 0. \text{ (Solución)}$$

$$190. \quad [T] \quad f(x) = \cot(x), x = \frac{\pi}{4}.$$



Para los siguientes ejercicios, encuentra $\frac{d^2 y}{dx^2}$ considerando las funciones dadas.

$$191. \quad [T] \quad y = x \operatorname{sen}(x) - \cos(x). \text{ (Solución)}$$

$$192. \quad [T] \quad y = \operatorname{sen}(x) \cos(x).$$

$$193. \quad [T] \quad y = x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x). \text{ (Solución)}$$

194. [T] $y = \frac{1}{x} + tg(x)$.

195. [T] $y = 2csc(x)$. ([Solución](#))

196. [T] $y = sec^2(x)$.

197. Encuentra todos los valores de x en la gráfica de $f(x) = -3\sin(x)\cos(x)$ donde la recta tangente es horizontal. ([Solución](#))

198. Encuentra todos los valores de x en la gráfica de $f(x) = x - 2\cos x$ para $0 < x < 2\pi$ donde la recta tangente tiene pendiente 2.

199. Sea $f(x) = \cot(x)$. Determina los puntos en la gráfica de f para $0 < x < 2\pi$ donde la(s) recta(s) tangente es(son) paralelas a la recta $y = -2x$. ([Solución](#))

200. [T] Una masa en un resorte rebota hacia arriba y hacia abajo en un movimiento armónico simple, modelado por la función $s(t) = -6\cos t$ donde s se mide en pulgadas y t se mide en segundos. Encuentra la tasa a la que el resorte oscila en $t = 5$ s.

201. Supongamos que la posición de un péndulo oscilante en movimiento armónico simple viene dada por $s(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ donde a y b son constantes, t mide el tiempo en segundos y s mide la posición en centímetros. Si la posición es 0 cm y la velocidad es 3 cm/s cuando $t = 0$, encuentra los valores de a y b . ([Solución](#))

202. Después de que un buzo salte de un trampolín, el borde del trampolín oscila con la posición dada por $s(t) = -5\cos(t)$ cm en t segundos después del salto.

- Dibuja un período de la función de posición para $t \geq 0$.
- Encuentra la función de velocidad.
- Dibuja un período de la función de velocidad para $t \geq 0$.
- Determina los momentos en que la velocidad es 0 durante un período.
- Encuentra la función de aceleración.
- Dibuja un período de la función de aceleración para $t \geq 0$.

203. El número de hamburguesas vendidas en un restaurante de comida rápida en Pasadena, California, viene dado por $y = 10 + 5\sin x$ donde y es el número de hamburguesas vendidas y x representa el número de horas después de que el restaurante abriera a las 11 am hasta las 11 pm que es la hora de cierre. Encuentra y' y determina los intervalos en los que aumenta la cantidad de hamburguesas que se venden. ([Solución](#))

204. [T] La cantidad de lluvia por mes en Phoenix, Arizona, se puede aproximar por $y(t) = 0.5 + 0.3\cos t$, donde t son los meses transcurridos desde enero. Encuentra y' y usa una calculadora para determinar los intervalos en los que la cantidad de lluvia que cae está disminuyendo.



Para los siguientes ejercicios, usa la regla del cociente para derivar las ecuaciones dadas.

205. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2(x)$ ([Solución](#))

206. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec(x)\tan(x)$

207. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc(x)\cot(x)$ ([Solución](#))

208. Usa la definición de derivada y la identidad $\cos(x+h) = \cos x \cdot \cosh - \sen x \cdot \sen h$ para demostrar que $\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sen x$.



Para los siguientes ejercicios, encuentra la derivada de orden superior solicitada para las funciones dadas.

209. $\frac{d^3 y}{dx^3}$ de $y = 3\cos x$ ([Solución](#))

210. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ de $y = 3\sin x + x^2 \cos x$

211. $\frac{d^4 y}{dx^4}$ de $y = 5\cos x$ ([Solución](#))

212. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ de $y = \sec x + \cot x$

213. $\frac{d^3 y}{dx^3}$ de $y = x^{10} - \sec x$ ([Solución](#))

3.7 La regla de la cadena

Objetivos de aprendizaje

1. Enunciar la regla de la cadena para la composición de dos funciones.
2. Aplicar la regla de la cadena junto con la regla de la potencia.
3. Aplicar la regla de la cadena y las reglas del producto y cociente correctamente en combinación cuando ambas sean necesarias.
4. Reconocer la regla de la cadena para una composición de tres o más funciones.
5. Describir la prueba de la regla de la cadena.

Hemos visto las técnicas para derivar funciones básicas (x^n , $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$, etc.) así como las reglas para derivar las sumas, diferencias, productos, cocientes y producto por constantes de estas funciones. Sin embargo, estas técnicas no nos permiten derivar funciones compuestas, como $h(x) = \text{sen}(x^3)$ o $k(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$. En esta sección, estudiamos la regla para encontrar la derivada de la composición de dos o más funciones.

3.7.1 La regla de la cadena

Cuando tenemos una función que es una composición de dos o más funciones, podríamos usar todas las técnicas que ya hemos aprendido para derivarla. Sin embargo, considerar estas técnicas para dividir una función en partes más simples que podamos derivar puede resultar engorroso. En cambio, resulta más fácil utilizar **la regla de la cadena**, que establece que la derivada de una función compuesta es la derivada de la función externa evaluada en la función interna multiplicada por la derivada de la función interna.

Para poner esta regla en contexto, echemos un vistazo a un ejemplo: $h(x) = \text{sen}(x^3)$. Podemos pensar en la derivada de esta función con respecto a x como la tasa de cambio de $\text{sen}(x^3)$ en relación con la variación de x . En consecuencia, queremos saber cómo cambia $\text{sen}(x^3)$ a medida que cambia x . Podemos pensar en esta situación como una reacción en cadena: a medida que x cambia, x^3 cambia, lo que conduce a un cambio en $\text{sen}(x^3)$. Esta reacción en cadena nos da pistas sobre lo que implica el cálculo de la derivada de $\text{sen}(x^3)$. En primer lugar, un cambio en x que obliga a un cambio en x^3 sugiere que de alguna manera está involucrada la derivada de x^3 . Además, el cambio en x^3 que obliga a un cambio en $\text{sen}(x^3)$ sugiere que la derivada de $\text{sen}(u)$ con respecto a u , donde $u = x^3$, también es parte de la derivada final.

Podemos echar un vistazo más formal a la derivada de $h(x) = \text{sen}(x^3)$ estableciendo el límite que nos daría la derivada en un valor específico a en el dominio de $h(x) = \text{sen}(x^3)$.

$$h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}(x^3) - \text{sen}(a^3)}{x - a}$$

Esta expresión no parece particularmente útil; sin embargo, podemos modificarla multiplicando y dividiendo por la expresión $x^3 - a^3$ para obtener

$$h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}(x^3) - \text{sen}(a^3)}{x^3 - a^3} \cdot \frac{x^3 - a^3}{x - a}$$

De la definición de la derivada, podemos ver que el segundo factor es la derivada de x^3 en $x = a$. Es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{d}{dx}(x^3)_{x=a} = 3a^2$$

Sin embargo, podría ser un poco más difícil reconocer que el primer término también es una derivada. Podemos ver esto haciendo $u = x^3$ y observando que cuando $x \rightarrow a$, $u \rightarrow a^3$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}(x^3) - \text{sen}(a^3)}{x^3 - a^3} &= \lim_{u \rightarrow a^3} \frac{\text{sen}(u) - \text{sen}(a^3)}{u - a^3} \\ &= \frac{d}{du}(\text{sen} u)_{u=a^3} = \cos(a^3) \end{aligned}$$

Por tanto, $h'(a) = \cos(a^3) \cdot 3a^2$.

En otras palabras, si $h(x) = \text{sen}(x^3)$, entonces $h'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$. Por lo tanto, si pensamos en $h(x) = \text{sen}(x^3)$ como la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(x) = \text{sen}x$ y $g(x) = x^3$, entonces la derivada de $h(x) = \text{sen}(x^3)$ es el producto de la derivada de $g(x) = x^3$ y la derivada de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ evaluada en la función $g(x) = x^3$. En este punto, anticipamos que para $h(x) = \text{sen}(g(x))$, es muy probable que $h'(x) = \cos(g(x))g'(x)$. Como determinamos anteriormente, este es el caso de $h(x) = \text{sen}(x^3)$

Ahora que hemos visto un ejemplo de derivada, planteamos el caso general y luego lo aplicaremos a otras funciones compuestas. Se proporciona una prueba informal al final de la sección.

Regla: la regla de la cadena

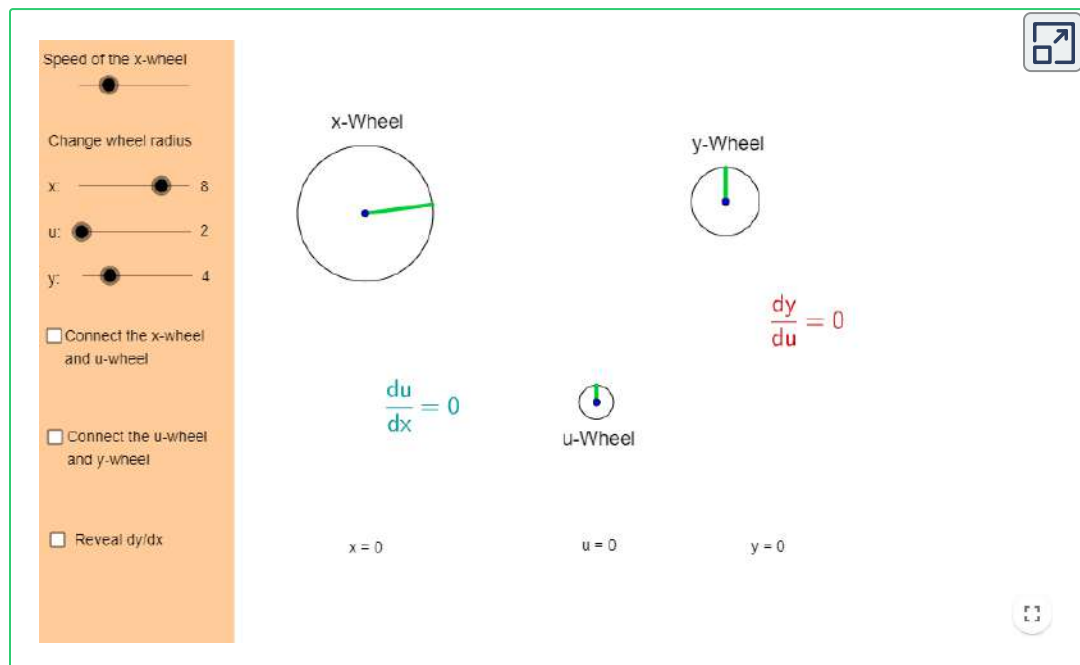
Sean f y g funciones. Para todo x en el dominio de g de forma que g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, la derivada de la función compuesta $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ viene dada por

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad (3.17)$$

Puedes ver una interpretación de la regla de la cadena en este <http://webspace.ship.edu/msrenault/> que incluye la escena que se muestra en la página siguiente.



En la siguiente escena interactiva se muestra un ejemplo de la regla de la cadena.



En el applet vemos una rueda x , una rueda u y una rueda y . Podemos cambiar la velocidad de la rueda x , y se pueden conectar las ruedas con correas y cambiar sus radios. Usaremos este modelo para explorar la regla de la cadena y tratar de obtener una comprensión intuitiva de la fórmula que nos da la derivada de la función compuesta.

Estrategia de resolución de problemas: Aplicación de la regla de la cadena

1. Para derivar $h(x) = f(g(x))$, comience identificando $f(x)$ y $g(x)$.
2. Encuentra $f'(x)$ y evalúelo en $g(x)$ para obtener $f'(g(x))$.
3. Encuentra $g'(x)$.
4. Escribe $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Nota: Al aplicar la regla de la cadena a la composición de dos o más funciones, tenga en cuenta que trabajamos desde la función exterior hacia adentro. También es útil recordar que la derivada de la composición de dos funciones se puede considerar como tener dos partes; la derivada de la composición de tres funciones tiene tres partes; y así. Además, recuerda que nunca evaluamos una derivada en una derivada.

Las reglas de la cadena y de la potencia combinadas

Ahora podemos aplicar la regla de la cadena a funciones compuestas, pero debemos tener en cuenta que a menudo necesitamos usarla combinada con con otras reglas. Por ejemplo, para encontrar las derivadas de funciones de la forma $h(x) = (g(x))^n$, necesitamos usar la regla de la cadena combinada con la regla de la potencia.

Para hacerlo, podemos pensar en $h(x) = (g(x))^n$ como $f(g(x))$ donde $f(x) = x^n$. Entonces $f'(x) = nx^{n-1}$. Por lo tanto, $f'(g(x)) = n(g(x))^{n-1}$. Esto nos lleva a la derivada de una función potencial usando la regla de la cadena,

$$h'(x) = n(g(x))^{n-1}g'(x)$$

Regla de la potencia para la composición de funciones

Para todos los valores de x para los que está definida la derivada, si $h(x) = (g(x))^n$ entonces

$$h'(x) = n(g(x))^{n-1}g'(x) \quad (3.18)$$



Ejemplo

3.48 Reglas de la cadena y de la potencia

Encuentra la derivada de $h(x) = \frac{1}{(3x^2+1)^2}$.



Solución



**Pregunta
de control**

Cuestión 3.34

Encuentra la derivada de $h(x) = (2x^3 + 2x - 1)^4$.



Ejemplo

3.49 Reglas de la cadena y la potencia con una función trigonométrica

Encuentra la derivada de $h(x) = \text{sen}^3 x$.



Solución



Ejemplo

3.50 Encontrar la ecuación de una recta tangente

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $h(x) = \frac{1}{(3x-5)^2}$ en $x = 2$

.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.35

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (x^2 - 2)^3$ en $x = -2$.

3.7.2 Combinando la regla de la cadena con otras reglas

Ahora que podemos combinar la regla de la cadena y la regla de la potencia, examinamos cómo combinar la regla de la cadena con las otras reglas que hemos aprendido. En particular, podemos usarlo con las fórmulas para las derivadas de funciones trigonométricas o con la regla del producto.



Ejemplo

3.51 Regla de la cadena en una función coseno general

Encuentra la derivada de $h(x) = \cos(g(x))$.



Solución

En el siguiente ejemplo aplicamos la regla que acabamos de obtener en el ejemplo anterior.



Ejemplo

3.52 Usar la regla de la cadena en una función coseno

Encuentra la derivada de $h(x) = \cos(5x^2)$.



Solución



Ejemplo

3.53 Usar la regla de la cadena en otra función trigonométrica

Encuentra la derivada de $h(x) = \sec(4x^5 + 2x)$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.36

Encuentra la derivada de $h(x) = \sen(7x + 2)$.

En este punto, proporcionamos una lista de fórmulas derivadas que se pueden obtener aplicando la regla de la cadena junto con las fórmulas para derivadas de funciones trigonométricas. Sus derivadas son similares a las utilizadas en el ejemplo 3.51 y el ejemplo 3.53. Por conveniencia, las fórmulas también se dan en la notación de Leibniz, que algunos estudiantes encuentran más fácil de recordar. (Discutimos la regla de la cadena usando la notación de Leibniz al final de esta sección.)

No es absolutamente necesario memorizarlas como fórmulas separadas ya que todas son aplicaciones de la regla de la cadena a fórmulas aprendidas previamente.

TEOREMA 3.10. Usar la regla de la cadena con funciones trigonométricas

Para todos los valores de x para los que se define la derivada,

- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(g(x))) = \cos(g(x))g'(x)$
 $\frac{d}{dx}\operatorname{senu} = \cos u \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\cos(g(x))) = -\operatorname{sen}(g(x))g'(x)$
 $\frac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{senu} \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}(g(x))) = \sec^2(g(x))g'(x)$
 $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\cot(g(x))) = -\operatorname{csc}^2(g(x))g'(x)$
 $\frac{d}{dx}\cot u = -\operatorname{csc}^2 u \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\sec(g(x))) = \sec(g(x))\tan(g(x))g'(x)$
 $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \operatorname{tgu} \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{csc}(g(x))) = -\operatorname{csc}(g(x))\cot(g(x))g'(x)$
 $\frac{d}{dx}\operatorname{csc} u = -\operatorname{csc} u \cot u \frac{du}{dx}$



Ejemplo

3.54 Combinando la regla de la cadena con la regla del producto

Encuentra la derivada de $h(x) = (2x + 1)^5(3x - 2)^7$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.37

Encuentra la derivada de $h(x) = \frac{x}{(2x+3)^3}$.

3.7.3 Componiendo tres o más funciones

Ahora podemos combinar la regla de la cadena con otras reglas para derivar funciones, cuando estemos derivando la composición de tres o más funciones, necesitaremos aplicar la regla de la cadena más de una vez. Si miramos esta situación en términos generales, podemos generar una fórmula, pero no necesitamos recordarla, ya que simplemente podemos aplicar la regla de la cadena varias veces.

En primer lugar debemos detectar las funciones f , g y h de forma que

$$k(x) = h(f(g(x)))$$

Posteriormente, se aplica la regla de la cadena una vez, obteniendo

$$k'(x) = \frac{d}{dx}(h(f(g(x)))) = h'(f(g(x))) \cdot \frac{d}{dx}f(g(x))$$

Aplicando la regla de la cadena nuevamente, obtenemos

$$k'(x) = h'(f(g(x)))f'(g(x))g'(x)$$

Regla de cadena para una composición de tres funciones

Para todos los valores de x para los cuales la función es derivable, si $k(x) = h(f(g(x)))$,

se cumple

$$k'(x) = h'(f(g(x)))f'(g(x))g'(x).$$

Observa que la derivada de la composición de tres funciones tiene tres factores. De manera similar, la derivada de la composición de cuatro funciones tiene cuatro factores, y así sucesivamente. Además, recuerda, siempre podemos trabajar de afuera hacia adentro, tomando una derivada a la vez.



Ejemplo

3.55 Derivar una función compuesta de tres funciones

Encuentra la derivada de $k(x) = \cos^4(7x^2 + 1)$.



Solución



**Pregunta
de control**

Cuestión 3.38

Encuentra la derivada de $h(x) = \sin^6(x^3)$.



Ejemplo

3.56 Usando la regla de la cadena en un problema de velocidad

Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas. Su posición en el tiempo t está dada por $s(t) = \text{sen}(2t) + \cos(3t)$. ¿Cuál es la velocidad de la partícula en el tiempo $t = \pi/6$?



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.39

Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas. Su posición en el tiempo t viene dada por $s(t) = \text{sen}(4t)$. Encuentra su aceleración en el tiempo t .

Prueba

En este punto, presentamos una prueba muy informal de la regla de la cadena. En aras de la simplicidad, ignoramos ciertos problemas: por ejemplo, asumimos que $g(x) \neq g(a)$ para $x \neq a$ en algún intervalo abierto que contenga al punto a . Comenzamos aplicando la definición límite de la derivada a la función $h(x)$ para obtener $h'(a)$:

$$h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}$$

Reescribiendo, obtenemos

$$h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Aunque está claro que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

no es obvio que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = f'(g(a))$$

Para ver que esto es cierto, primero recuerda que dado que g es derivable en a , g también es continua en a . Así,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

Luego, considerando la sustitución $y = g(x)$ y $b = g(a)$ y usando el cambio de variables en el límite se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b) = f'(g(a))$$

Finalmente,

$$h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(g(a)) g'(a)$$



Ejemplo

3.57 Usando la regla de la cadena con valores funcionales

Sea $h(x) = f(g(x))$. Si $g(1) = 4$, $g'(1) = 3$ y $f'(4) = 7$, calcula $h'(1)$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.40

Dado $h(x) = f(g(x))$. Si $g(2) = -3$, $g'(2) = 4$ y $f'(-3) = 7$, encuentra $h'(2)$.

3.7.4 La regla de la cadena usando la notación de Leibniz

Al igual que con otras derivadas que hemos visto, podemos expresar la regla de la cadena utilizando la notación de Leibniz. Esta notación para la regla de la cadena se usa mucho en aplicaciones físicas.

Para $h(x) = f(g(x))$, sea $u = g(x)$ e $y = h(x) = f(u)$. Así,

$$h'(x) = \frac{dy}{dx}, f'(g(x)) = f'(u) = \frac{dy}{du} \quad y \quad g'(x) = \frac{du}{dx}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{dy}{dx} = h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Regla de cadena usando la notación de Leibniz

Si y es una función de u , y u es una función de x , entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$



Ejemplo

3.58 Calcular la derivada usando la notación de Leibniz, Ejemplo 1

Encuentra la derivada de $y = \left(\frac{x}{3x+2}\right)^5$.



Solución



Ejemplo

3.59 Calcular la derivada usando la notación de Leibniz, Ejemplo 2

Encuentra la derivada de $y = tg(4x^2 - 3x + 1)$



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.41

Usa la notación de Leibniz para encontrar la derivada de $y = \cos(x^3)$. Asegúrate de que la respuesta final se exprese enteramente en términos de la variable x .



3.7.5 Ejercicios



Para los siguientes ejercicios, dado $y = f(u)$ y $u = g(x)$, encuentra $\frac{dy}{dx}$ utilizando la notación de Leibniz para la regla de la cadena $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$

214. $y = 3u - 6, u = 2x^2$

215. $y = 6u^3, u = 7x - 4$ ([Solución](#))

216. $y = \text{sen}(u), u = x - 1$

217. $y = \cos(u), u = \frac{-x}{8}$ ([Solución](#))

218. $y = \text{tg}(u), u = 9x + 2$

219. $y = \sqrt{4u + 3}, u = x^2 - 6x$ ([Solución](#))



Para cada un de los siguientes ejercicios

- descompón cada función en la forma $y = f(u)$ y $u = g(x)$ y
- encuentra $\frac{dy}{dx}$ como una función de x

220. $y = (3x - 2)^6$

221. $y = (3x^2 + 1)^3$ ([Solución](#))

222. $y = \operatorname{sen}^5(x)$

223. $y = \left(\frac{x}{7} + \frac{7}{x}\right)^7$ ([Solución](#))

224. $y = \tan(\sec(x))$

225. $y = \csc(\pi x + 1)$ ([Solución](#))

227. $y = -6\operatorname{sen}^{-3}x$ ([Solución](#))



Para los siguientes ejercicios, encuentra $\frac{dy}{dx}$.

228. $y = (3x^2 + 3x - 1)^4$

229. $y = (5 - 2x)^{-2}$ ([Solución](#))

230. $y = \cos^3(\pi x)$

231. $y = (2x^3 - x^2 + 6x + 1)^3$ ([Solución](#))

232. $y = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$

233. $y = (\operatorname{tg}x + \operatorname{sen}x)^{-3}$ ([Solución](#))

234. $y = x^2 \cos^4(x)$

235. $y = \operatorname{sen}(\cos(7x))$ ([Solución](#))

236. $y = \sqrt{6 + \sec(\pi x^2)}$

237. $y = \cot^3(4x + 1)$ ([Solución](#))

238. Sea $y = [f(x)]^3$ y supongamos que $f'(1) = 4$ y $\frac{dy}{dx} = 10$ donde $x = 1$. Encuentra $f(1)$.

239. Sea $y = (f(x) + x^2)^4$ y supongamos que $f(-1) = -4$ y $\frac{dy}{dx} = 3$ donde $x = -1$. Encontrar $f'(-1)$. ([Solución](#))

240. Sea $y = (f(u) + 3x)^2$ y $u = x^3 - 2x$. Si $f(1) = 6$ y $\frac{dy}{dx} = 18$ donde $x = 2$. Encontrar $f'(4)$.

241. [T] Encuentra la ecuación de la recta tangente a $y = -\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ en el origen. Utiliza una calculadora gráfica para representar juntas la función y la recta tangente. ([Solución](#))

242. [T] Encuentra la ecuación de la recta tangente a $y = \left(3x + \frac{1}{x}\right)$ en el punto $(1, 16)$. Utiliza una calculadora gráfica para representar juntas la función y la recta tangente.

243. Encuentra la coordenada x en la que la tangente a $y = \left(x - \frac{6}{x}\right)^8$ es horizontal. ([Solución](#))

244. [T] Encuentra la ecuación de la recta tangente que es normal a $g(\theta) = \operatorname{sen}^2(\pi\theta)$ en el punto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Utiliza una calculadora para representar en una misma gráfica la función y la recta normal.



Para las siguientes ejercicios, utiliza la información de la tabla y encuentra $h'(a)$ en el valor dado para a .

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
0	2	5	0	2
1	1	-2	3	0
2	4	4	1	-1
3	3	-5	2	3

245. $h(x) = f(g(x)), a = 0$

246. $h(x) = g(f(x)), a = 0$

247. $h(x) = (x^4 + g(x))^{-2}, a = 1$ ([Solución](#))

248. $h(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{-2}, a = 3$

249. $h(x) = f(x + f(x))^{-2}, a = 1$ ([Solución](#))

250. $h(x) = f(1 + g(x))^3, a = 2$

251. $h(x) = g(2 + f(x^2)), a = 1$ ([Solución](#))

252. $h(x) = f(f(\sin(x))), a = 0$

253. [T] La función de posición de un tren de carga viene dado por $s(t) = 100(t + 1)^{-2}$, con s en metros y t en segundos. En el instante $t = 6 \text{ seg.}$, encuentra

- la velocidad del tren

- b. la aceleración del tren
- c. utilizando a) y b), ¿el tren está acelerando o desacelerando?

(Solución)

254. [T] Una masa que cuelga de un resorte vertical está en movimiento armónico simple dado por la siguiente función de posición: $s(t) = -3\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, donde t se mide en segundos y s está en pulgadas.

- determinar la posición del muelle en $t = 1.5$ seg.
- encontrar la velocidad del muelle en $t = 1.5$ seg.

255. El coste total para producir x cajas de las galletas Thin Mint Girl Scout son C dólares, donde $C = 0.0001x^3 - 0.02x^2 + 3x + 300$. En t semanas la producción se estima en $x = 1600 + 100t$ cajas.

- Encuentra el coste marginal $C'(x)$.
- Utiliza la notación de Leibniz para la regla de la cadena, corriente continua $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$, para encontrar la tasa del cambio del coste con respecto al tiempo t .
- Utiliza b. y determina cuánto de rápido aumentan los costes para $t = 2$ semanas. Incluye unidades con la respuesta.

(Solución)

256. [T] La fórmula para el área de un círculo es $A = \pi r^2$, donde r es el radio del círculo. Supongamos que un círculo está expandiéndose, lo que significa que tanto el área A como el radio r (en pulgadas) se están expandiendo.

- Supongamos que $r = 2 - \frac{100}{(t+7)^2}$ donde t es el tiempo en segundos. Utiliza la regla de la cadena $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$ para encontrar la razón a la que se está expandiendo el área.
- Utilizando a. encuentra la razón a la que el área se expande para $t = 4$ seg.

257. [T] La fórmula para el volumen de una esfera es $S = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r (en pies) es el radio de la esfera. Suponga que una bola de nieve esférica se derrite al sol.

- Supongamos que $r = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{12}$ donde t es el tiempo en minutos. Utiliza la regla de la cadena $\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$ para encontrar la velocidad a la que se derrite la bola de nieve.
- Utiliza el apartado a) para encontrar la velocidad a la que el volumen cambia en $t = 1$ min.

(Solución)

258. [T] La temperatura diaria en grados Fahrenheit de Phoenix en el verano se puede modelar por la función $T(x) = 94 - 10\cos\left[\frac{\pi}{12}(x - 2)\right]$, donde x es el número de horas a partir de la medianoche. Encuentra la velocidad a la que la temperatura está cambiando a las 4 p.m.

259. [T] La profundidad (en pies) del agua en un dique cambia con la subida y bajada de las mareas. La profundidad está modelada por la función $D(t) = 5\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{6}\right)$ donde t es el número de horas después de la medianoche. Encuentra la tasa a la que la profundidad está cambiando a las 6 a.m. **(Solución)**

3.8 Derivadas de funciones inversas

Objetivos de aprendizaje

1. Calcular la derivada de una función inversa.
2. Reconocer las derivadas de las funciones trigonométricas inversas estándar.

En esta sección exploramos la relación entre la derivada de una función y la derivada de su inversa. Para funciones cuyas derivadas ya conocemos, podemos usar esta relación para encontrar derivadas de sus funciones inversas sin tener que usar la definición de límite de la derivada. En particular, lo aplicaremos a las funciones trigonométricas. Esta fórmula también se puede usar para extender la regla de la potencia a exponentes racionales.

3.8.1 Derivada de la función inversa

Comenzamos considerando una función y su inversa. Si $f(x)$ es invertible y derivable, parece razonable que la inversa de $f(x)$ también sea derivable. La [Figura 3.28](#) muestra la relación entre una función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$. Observa el punto $(a, f^{-1}(a))$ en la gráfica de $f^{-1}(x)$ que tiene una recta tangente con una pendiente de $(f^{-1})'(a) = \frac{p}{q}$. Este punto corresponde a un punto $(f^{-1}(a), a)$ en la gráfica de $f(x)$ que tiene una recta tangente con una pendiente de $f'(f^{-1}(a)) = \frac{q}{p}$.

Por lo tanto, si $f^{-1}(x)$ es derivable en a , entonces se tiene que

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}.$$

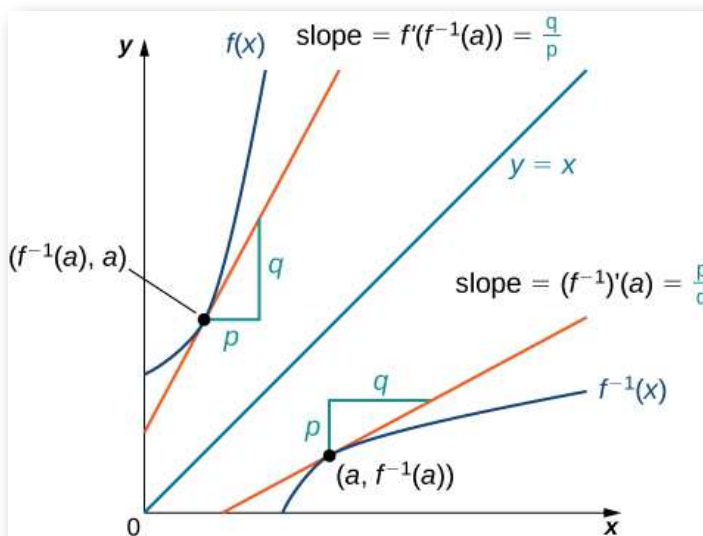
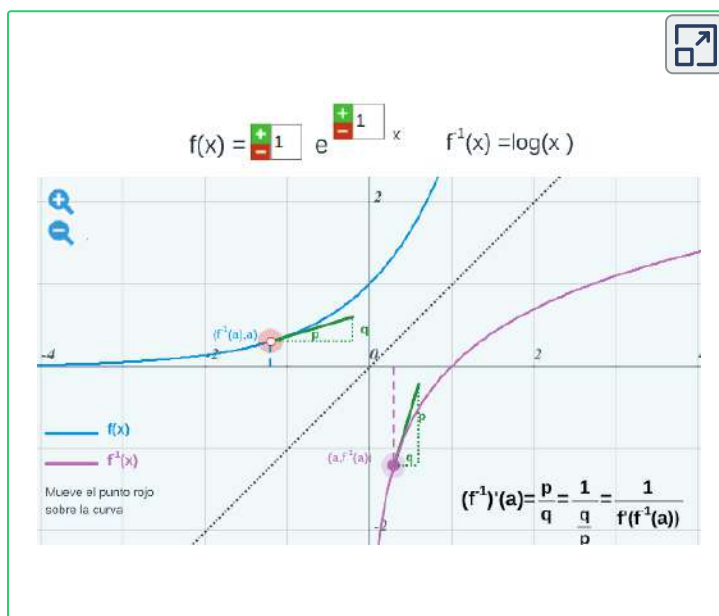


Figura 3.28 Las rectas tangentes de una función y su inversa están relacionadas; también lo son las derivadas de estas funciones.



En la siguiente escena interactiva incorporamos un applet que permite relacionar la derivada de una función y su inversa.



Estas funciones son simétricas con respecto a la recta $y = x$. La recta tangente de la función $f(x)$ en el punto $(f^{-1}(a), a)$ y la recta tangente de la función $f^{-1}(x)$ en $(a, f^{-1}(a))$ también son simétricas sobre la recta $y = x$. Específicamente, si la pendiente de uno fuera p/q , entonces la pendiente del otro sería q/p . Por último, sus derivadas también son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

También podemos obtener la fórmula para la derivada de la inversa recordando primero que $x = f(f^{-1}(x))$. Luego, al derivar ambos lados de esta ecuación (usando la regla de la cadena a la derecha), obtenemos

$$1 = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x).$$

Despejando $(f^{-1})'(x)$, obtenemos

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (3.19)$$

Resumimos este resultado en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.11. Teorema de la función inversa

Sea $f(x)$ una función que es invertible y derivable. Sea $y = f^{-1}(x)$ la función inversa de $f(x)$. Para todo x que satisfaga $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Alternativamente, si $y = g(x)$ es la inversa de $f(x)$, entonces

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$



Ejemplo

3.60 Aplicación del teorema de la función inversa

Usa el teorema de la función inversa para encontrar la derivada de $g(x) = \frac{x+2}{x}$. Compara la derivada resultante con la obtenida al derivar la función directamente.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.42

Usa el teorema de la función inversa para encontrar la derivada de $g(x) = \frac{1}{x+2}$. Compara el resultado obtenido al derivar $g(x)$ directamente.



Pregunta de control

Cuestión 3.43

Encuentra la derivada de $g(x) = \sqrt[5]{x}$ aplicando el teorema de la función inversa.



Ejemplo

3.61 Aplicación del teorema de la función inversa

Usa el teorema de la función inversa para encontrar la derivada de $g(x) = \sqrt[3]{x}$.



Solución

En el ejemplo anterior, vemos que podemos usar el teorema de la función inversa para extender la regla de la potencia a exponentes de la forma $\frac{1}{n}$, donde n es un número entero positivo. Esta extensión finalmente nos permitirá derivar x^q , donde q es cualquier número racional.

TEOREMA 3.12. Extendiendo la regla de la potencia a exponentes racionales

La regla de la potencia se puede extender a exponentes racionales. Es decir, si n es un número entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^{1/n}) = \frac{1}{n}x^{(1/n)-1}. \quad (3.20)$$

Además, si n es un número entero positivo y m es un número entero arbitrario, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^{m/n}) = \frac{m}{n}x^{(m/n)-1}. \quad (3.21)$$

Prueba

La función $g(x) = x^{1/n}$ es la inversa de la función $f(x) = x^n$. Dado que $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$, comenzamos por encontrar $f'(x)$. Así,

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad y \quad f'(g(x)) = n(x^{1/n})^{n-1} = nx^{(n-1)/n}.$$

Finalmente,

$$g'(x) = \frac{1}{n}x^{(n-1)/n} = \frac{1}{n}x^{(1-n)/n} = \frac{1}{n}x^{(1/n)-1}.$$

Para derivar $x^{m/n}$ debemos reescribirlo como $(x^{1/n})^m$ y aplicar la regla de la cadena. Así,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^{m/n}) &= \frac{d}{dx}((x^{1/n})^m) = \\ &= m(x^{1/n})^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{(1/n)-1} = \frac{m}{n}x^{(m/n)-1}. \end{aligned}$$



Ejemplo

3.62 Aplicación de la regla del poder a un poder racional

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^{2/3}$ en $x = 8$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.44

Encuentra la derivada de $s(t) = \sqrt{2t + 1}$.

3.8.2 Derivada de las funciones trigonométricas inversas

Ahora dirigimos nuestra atención a encontrar derivadas de funciones trigonométricas inversas. Estas derivadas resultarán de aplicación en el estudio de la integración en la parte II de este libro. Las derivadas de funciones trigonométricas inversas son bastante sorprendentes porque sus derivadas son en realidad funciones algebraicas. Anteriormente, las derivadas de funciones algebraicas han demostrado ser funciones algebraicas y las derivadas de funciones trigonométricas han demostrado ser funciones trigonométricas. Aquí, por primera vez, vemos que la derivada de una función no necesita ser del mismo tipo que la función original.



Ejemplo

3.63 Derivada de la función inversa del seno

Usa el teorema de la función inversa para encontrar la derivada de $g(x) = \text{sen}^{-1}x$.



Solución



Ejemplo

3.64 Aplicación de la regla de la cadena a la función inversa del seno

Aplica la regla de la cadena a la fórmula obtenida en el Ejemplo 3.61 para encontrar la derivada de $h(x) = \text{sen}^{-1}(g(x))$ y usa este resultado para encontrar la derivada de $h(x) = \text{sen}^{-1}(2x^3)$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.45

Usa el teorema de la función inversa para encontrar la derivada de $g(x) = \text{tg}^{-1}x$.

Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas restantes también se pueden encontrar utilizando el teorema de la función inversa. Estas fórmulas se proporcionan en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.13. Derivadas de funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx} \text{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dx} \cot^{-1} x = \frac{-1}{1+x^2} \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dx} \csc^{-1} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad (3.27)$$



Ejemplo

3.65 Aplicar fórmulas de derivación a una función de tangente inversa

Encuentra la derivada de $f(x) = tg^{-1}(x^2)$.



Solución



Ejemplo

3.66 Aplicando fórmulas de derivación a una función inversa del seno

Encuentra la derivada de $h(x) = x^2 \sin^{-1} x$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.46

Encuentra la derivada de $h(x) = \cos^{-1}(3x - 1)$.



Ejemplo

3.67 Aplicar la función inversa de la tangente

La posición de una partícula en el tiempo t viene dada por $s(t) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)$ para $t = 12$. Encuentra la velocidad de la partícula en el tiempo $t = 1$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.47

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sin^{-1}x$ en $x = 0$.



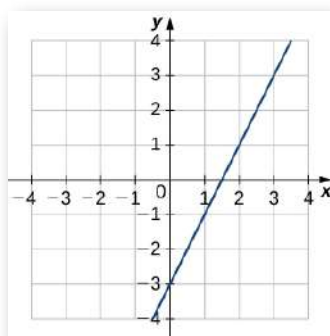
3.8.3 Ejercicios



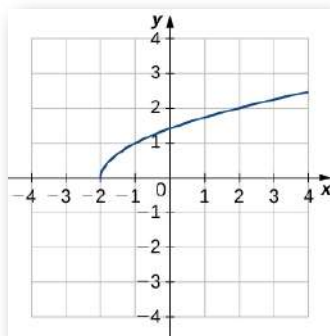
Para los siguientes ejercicios, utilizando la gráfica de $y = f(x)$

- dibuja la gráfica de $y = f^{-1}(x)$, y
- utiliza el apartado a. para estimar $(f^{-1})'(1)$

260.

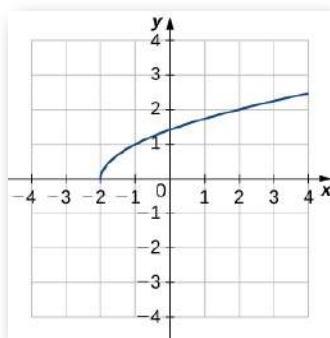


261.

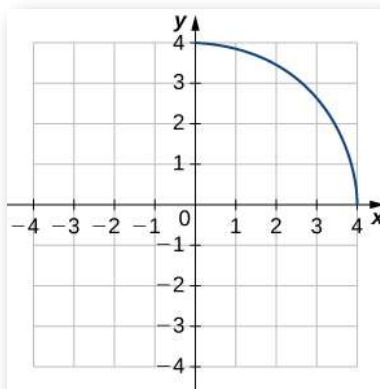


(Solución)

262.



263.



(**Solución**)



Para los siguientes ejercicios, usa las funciones $y = f(x)$ para encontrar

- $\frac{df}{dx}$ en $x = a$ y
- $x = f^{-1}(y)$.
- Utiliza la parte b. para encontrar $\frac{df^{-1}}{dy}$ en $y = f(a)$.

264. $f(x) = 6x - 1, x = -2$

265. $f(x) = 2x^3 - 3, x = 1$ (**Solución**)

266. $f(x) = 9 - x^2, 0 \leq x \leq 3, x = 2$

267. $f(x) = \text{sen}x, x = 0$ (**Solución**)



Para cada una de las siguientes funciones, encuentra $(f^{-1})'(a)$.

$$268. f(x) = x^2 + 3x + 2, x \geq \frac{-3}{2}, a = 2$$

$$269. f(x) = x^3 + 2x + 3, a = 0 \text{ (Solución)}$$

$$270. f(x) = x + \sqrt{x}, a = 2$$

$$271. f(x) = x - \frac{2}{x}, x < 0, a = 1 \text{ (Solución)}$$

$$272. f(x) = x + \operatorname{sen} x, a = 0$$

$$273. f(x) = \tan x + 3x^2, a = 0 \text{ (Solución)}$$



Para cada una de las funciones dadas $y = f(x)$,

- encuentra la pendiente de la recta tangente a su función inversa f^{-1} en el punto indicado P ,
- encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto indicado.

$$274. f(x) = \frac{4}{1+x^2}, P(2, 1)$$

$$275. f(x) = \sqrt{x-4}, P(2, 8) \text{ (Solución)}$$

$$276. f(x) = (x^3 + 1)^4, P(16, 1)$$

$$277. f(x) = -x^3 - x + 2, P(-8, 2) \text{ (Solución)}$$

$$278. f(x) = x^5 + 3x^3 - 4x - 8, P(-8, 1)$$



Para los siguientes ejercicios, encuentra $\frac{dy}{dx}$ para la función dada.

279. $y = \sin^{-1}(x^2)$ ([Solución](#))

280. $y = \cos^{-1}(\sqrt{x})$

281. $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ ([Solución](#))

282. $y = \sqrt{\csc^{-1}x}$

283. $y = (1 + \tan^{-1}x)^3$ ([Solución](#))

284. $y = \cos^{-1}(2x) \cdot \sin^{-1}(2x)$

285. $y = \frac{1}{\tan^{-1}(x)}$ ([Solución](#))

286. $y = \sec^{-1}(-x)$

287. $y = \cot^{-1}\sqrt{4 - x^2}$ ([Solución](#))

288. $y = x \cdot \csc^{-1}x$



Para los siguientes ejercicios, usa los valores dados para encontrar $(f^{-1})'(a)$.

289. $f(\pi) = 0, f'(\pi) = -1, a = 0$ ([Solución](#))

290. $f(6) = 2, f'(6) = 13, a = 2$

291. $f\left(\frac{1}{3}\right) = -8, f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2, a = -8$ ([Solución](#))

292. $f(\sqrt{3}) = 12, f'(\sqrt{3}) = \frac{2}{3}, a = \frac{1}{2}$

293. $f(1) = -3, f'(1) = 10, a = -3$ (Solución)

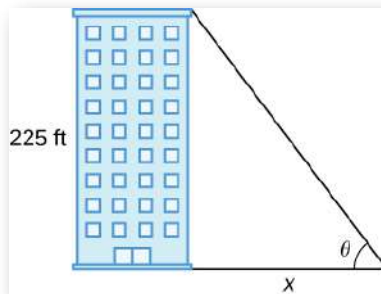
294. $f(1) = 0, f'(1) = -2, a = 0$

295. [T] La posición de un disco de hockey en movimiento después de t segundos es $s(t) = \tan^{-1} t - 1t$ donde s está en metros.

- Encuentra la velocidad del disco de hockey en cualquier momento t .
- Encuentra la aceleración del disco en cualquier momento t .
- Evalúa a. y b. para $t = 2, 4$ y 6 segundos.
- ¿Qué conclusión se puede sacar de los resultados obtenidos en c.?

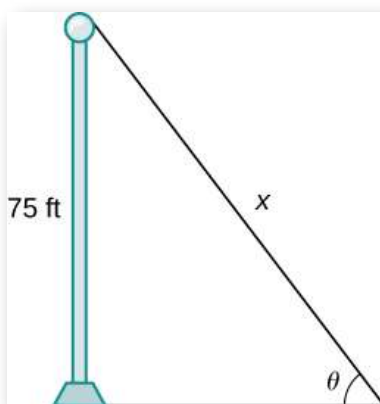
(Solución)

296. [T] Un edificio de 225 pies de altura proyecta una sombra de varias longitudes x a medida que pasa el día. Un ángulo de elevación θ está formado por líneas desde la parte superior e inferior del edificio hasta la punta de la sombra, como se ve en la siguiente figura.



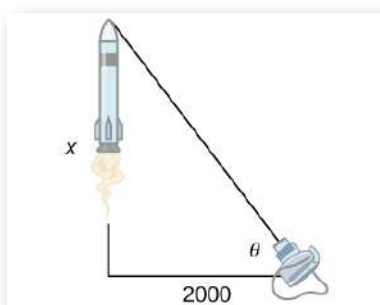
Encuentra la tasa de cambio del ángulo de elevación $\frac{d\theta}{dx}$ cuando $x = 272$ pies.

297. [T] Un poste mide 75 pies de alto. Se forma un ángulo θ cuando se conectan cables de varias longitudes de x pies desde el suelo hasta la parte superior del poste, como se muestra en la siguiente figura.



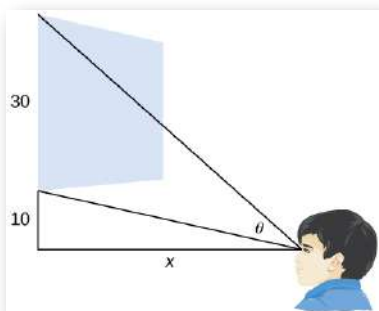
Encuentra la tasa de cambio del ángulo $\frac{d\theta}{dx}$ cuando se conecta un cable de 90 pies de longitud. (**Solución**)

298. [T] Una cámara de televisión a nivel del suelo está a 2000 pies de distancia de la plataforma de lanzamiento de un cohete espacial que está configurado para despegar verticalmente, como se ve en la siguiente figura.



El ángulo de elevación de la cámara se puede encontrar mediante $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{x}{2000} \right)$, donde x es la altura del cohete. Encuentra la tasa de cambio del ángulo de elevación después del lanzamiento cuando la cámara y el cohete están separados por 5000 pies.

299. [T] Un cine local con una pantalla de 30 pies de altura que está a 10 pies por encima del nivel de los ojos de una persona cuando está sentada tiene un ángulo de visión θ (en radianes) dado por $\theta = \cot^{-1} \frac{x}{40} - \cot^{-1} \frac{x}{10}$, donde x es la distancia en pies de la pantalla de cine a la que está sentada la persona, como se muestra en la siguiente figura.



- Encuentra $\frac{d\theta}{dx}$.
- Evalúa $\frac{d\theta}{dx}$ para $x = 5, 10, 15$ y 20 .
- Interpreta los resultados obtenidos en b.
- Evalúa $\frac{d\theta}{dx}$ para $x = 25, 30, 35$ y 40 .
- Interpreta los resultados obtenidos en d. ¿A qué distancia x debería pararse la persona para maximizar su ángulo de visión?

(**Solución**)

3.9 Derivación implícita

Objetivos de aprendizaje

1. Encontrar la derivada de una función complicada usando derivación implícita.

2. Utilizar la derivación implícita para determinar la ecuación de una recta tangente.

Ya hemos estudiado cómo encontrar ecuaciones de rectas tangentes a funciones y la tasa de cambio de una función en un punto específico. En todos estos casos teníamos la ecuación explícita para la función y derivábamos estas funciones explícitamente. Supongamos, en cambio, que queremos determinar la ecuación de una recta tangente a una curva arbitraria o la tasa de cambio de una curva arbitraria en un punto. En esta sección, resolvemos estos problemas encontrando las derivadas de funciones que definen y implícitamente en términos de x .

3.9.1 Derivación implícita

En la mayoría de las discusiones sobre matemáticas, si la variable dependiente y es una función de la variable independiente x , expresamos y en términos de x . Si este es el caso, decimos que y es una función explícita de x . Por ejemplo, cuando escribimos la ecuación $y = x^2 + 1$, estamos definiendo y explícitamente en términos de x . Por otro lado, si la relación entre la función y y la variable x se expresa mediante una ecuación en la que y no se expresa completamente en términos de x , decimos que la ecuación define y **implícitamente en términos de x** . Por ejemplo, la ecuación $y - x^2 = 1$ define la función $y = x^2 + 1$ implícitamente.

La derivación implícita nos permite encontrar pendientes de tangentes a curvas que claramente no son funciones (fallan la prueba de la línea vertical). Estamos usando la idea de que porciones de y son funciones que satisfacen la ecuación dada, pero que y no es realmente una función de x .

En general, una ecuación define una función implícitamente si la función satisface esa ecuación. Una ecuación puede definir implícitamente muchas funciones diferentes. Por ejemplo, las funciones

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$y = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 < x < 0 \\ -\sqrt{25 - x^2} & \text{si } 0 < x < 5 \end{cases}$$

que se ilustran en la [Figura 3.30](#), son solo tres de las muchas funciones definidas implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 25$.

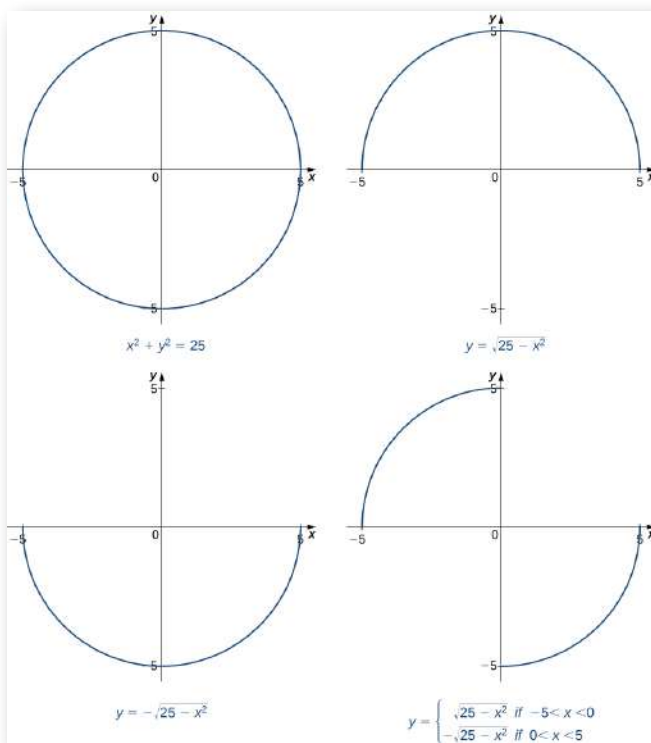


Figura 3.30 La ecuación $x^2 + y^2 = 25$ define muchas funciones implícitamente.

La circunferencia con radio 5 y centro en el origen está representado completamente en una imagen. A su derecha, solo se representa su gráfica en los cuadrantes I y II. En la parte inferior izquierda, se representa su gráfica en los cuadrantes III y IV y, a su derecha aparece su gráfica en los cuadrantes II y IV.

Si queremos encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, 4)$, podríamos evaluar la derivada de la función $y = \sqrt{25 - x^2}$ en $x = 3$. Por otro lado, si queremos la pendiente de la recta tangente en el punto $(3, -4)$, podríamos usar la derivada de $y = -\sqrt{25 - x^2}$. Sin embargo, no siempre es fácil despejar y en una función definida implícitamente por una ecuación. Afortunadamente, la técnica de derivación implícita nos permite encontrar la derivada de una función definida implícitamente sin tener que despejar la función explícitamente. El proceso de encontrar $\frac{dy}{dx}$ usando la derivación implícita se describe en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas: Derivación implícita

Para realizar una derivación implícita en una ecuación que define una función y implícitamente en términos de una variable x , utiliza los siguientes pasos:

1. Calcula la derivada de ambos lados de la ecuación. Ten en cuenta que y es una función de x . En consecuencia, mientras que $\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \text{cos } x$, $\frac{d}{dx}(\text{sen } y) = \text{cos } y \frac{dy}{dx}$ porque debemos usar la regla de la cadena para derivar $\text{sen } y$ con respecto a x .

2. Vuelve a escribir la ecuación de modo que todos los términos que contengan $\frac{dy}{dx}$ estén a la izquierda y todos los términos que no lo contengan estén a la derecha.
3. Factoriza $\frac{dy}{dx}$ a la izquierda.
4. Despeja $\frac{dy}{dx}$ dividiendo ambos lados de la ecuación por una expresión algebraica apropiada.



Ejemplo

3.68 Usar la derivación implícita

Suponiendo que y se define implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, encuentra $\frac{dy}{dx}$.

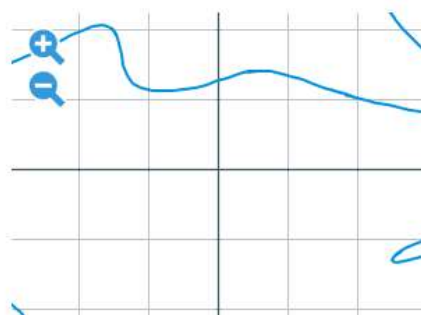


Solución



En la siguiente escena interactiva incorporamos un applet que permite obtener la derivada de varias funciones definidas de forma implícita utilizando la estrategia dada anteriormente.

② Encuentra $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación $y^3 - xy^2 + \cos xy = 2$



Ejemplo

3.69 Usa la derivación implícita y la regla del producto

Suponiendo que y se define implícitamente por la ecuación $x^3 \operatorname{sen} y + y = 4x + 3$, encuentra $\frac{dy}{dx}$.

Solución



Ejemplo

3.70 Usando la derivación implícita para encontrar una segunda derivada

Encuentra $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $x^2 + y^2 = 25$.

Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.48

Encuentra $\frac{dy}{dx}$ para y definida implícitamente por la ecuación $4x^5 + tg(y) = y^2 + 5x$.

3.9.2 Encontrar las rectas tangentes implícitamente

Ahora que hemos visto la técnica de la derivación implícita, podemos aplicarla al problema de encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a curvas descritas implícitamente.



Ejemplo

3.71 Encontrando la recta tangente a una circunferencia

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$.



Solución



Ejemplo

3.72 Hallar la ecuación de la recta tangente a una curva

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva $y^3 + x^3 - 3xy = 0$ en el punto $(32, 32)$ ([Figura 3.32](#)). Esta curva se conoce como **folio (u hoja) de Descartes**. Se muestra un folio, que es una línea que crea un bucle que se cruza sobre sí mismo, en este caso, $(0, 0)$. Se muestra su recta tangente en $(3/2, 3/2)$.



Solución



Ejemplo

3.73 Aplicar la derivación implícita

En un videojuego simple, un cohete viaja en una órbita elíptica cuya trayectoria se describe mediante la ecuación $4x^2 + 25y^2 = 100$.

El cohete puede disparar misiles a lo largo de líneas tangentes a su trayectoria. El objetivo del juego es destruir un asteroide entrante que viaja a lo largo del eje X positivo hacia $(0, 0)$. Si el cohete dispara un misil cuando está ubicado en $(3, 85)$, ¿dónde se cruzará con el eje X ?

 Solución

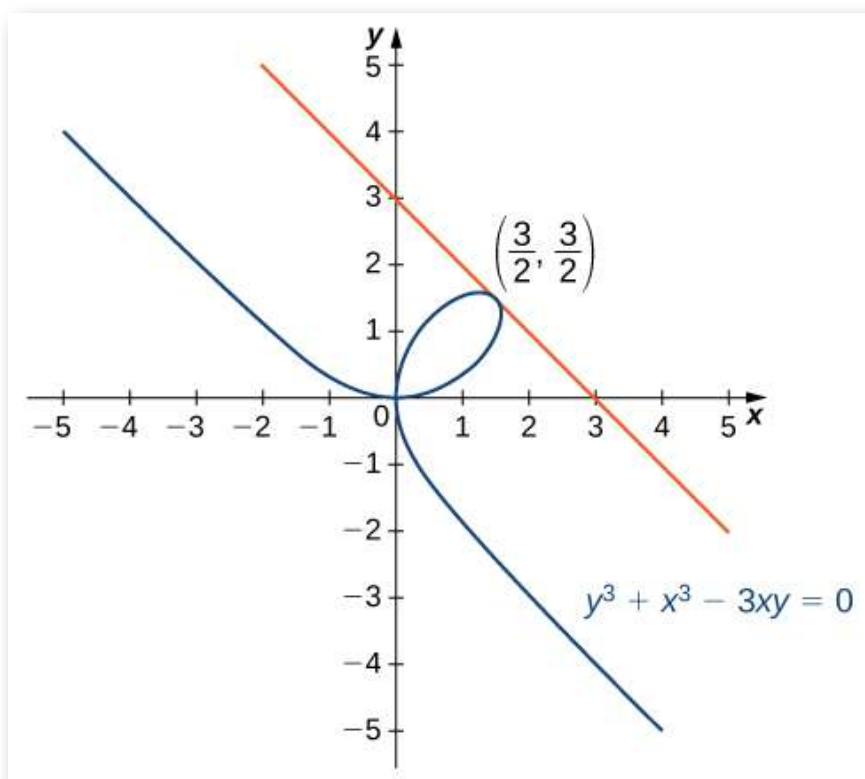


Figura 3.32 Encontrar la recta tangente al folio de Descartes en $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.



En la siguiente escena interactiva incorporamos un applet que permite obtener la derivada del folio de Descartes en distintos puntos.

Ecuación del folio de Descartes

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

Derivando implícitamente, obtenemos:

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 6y + 6x \frac{dy}{dx}$$

Al despejar la derivada, nos queda:

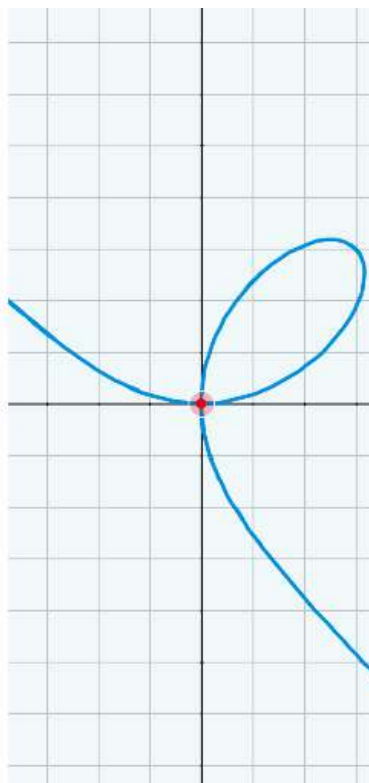
$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x}$$

En el punto (0,0) la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto (excepto en el origen ¿por qué?):

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = ?$$

En este punto se presentan dos rectas tangentes.

¡Mueve el punto y observa!





Pregunta
de control

Cuestión 3.49

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$ en el punto $(5, 3)$.



3.9.3 Ejercicios



Para los siguientes ejercicios, usa la derivación implícita y encuentra $\frac{dy}{dx}$.

300. $x^2 - y^2 = 4$

301. $6x^2 + 3y^2 = 12$ ([Solución](#))

302. $x^2y = y - 7$

303. $3x^3 + 9xy^2 = 5x^3$ ([Solución](#))

304. $xy - \cos(xy) = 1$

305. $y\sqrt{x+4} = xy + 8$ ([Solución](#))

306. $-xy - 2 = \frac{x}{7}$

307. $y \sin(xy) = y^2 + 2$ ([Solución](#))

308. $(xy)^2 + 3x = y^2$

309. $x^3y + xy^3 = -8$



Para los siguientes ejercicios, encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función implícita dada en el punto indicado. Usa una calculadora o software de computadora para representar gráficamente la función y la recta tangente. ([Solución](#))

310. [T] $x^4y - xy^3 = -2, (-1, -1)$

311. [T] $x^2y^2 + 5xy = 14, (2, 1)$ ([Solución](#))

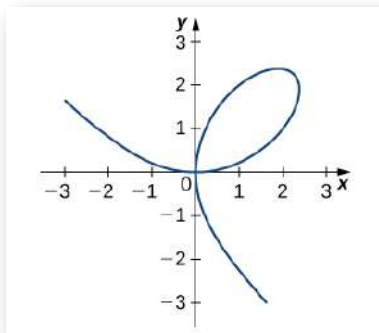
312. [T] $\tan(xy) = y, (\frac{\pi}{4}, 1)$

313. [T] $xy^2 + \sin\left(\frac{\pi}{y}\right) - 2x^2 = 10, (2, -3)$ ([Solución](#))

314. [T] $\frac{x}{y} + 5x - 7 = -\frac{3}{4}y, (1, 2)$

315. [T] $xy + \sin(x) = 1, (\frac{\pi}{2}, 0)$ ([Solución](#))

316. [T] La gráfica de un folio de Descartes de ecuación $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ se da en la siguiente gráfica.



- Encuentra la ecuación de la recta tangente en el punto $(2, 1)$. Representa la gráfica del foio junto con la recta tangente.
- Encuentra la ecuación de la recta normal a la recta tangente en a. en el punto $(2, 1)$.

317. Para la ecuación $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$,

- Encuentra la ecuación de la recta normal a la tangente en el punto $(1, 1)$.
- ¿En qué otro punto la línea normal obtenida en el apartado a. interseca a la gráfica de la ecuación?

([Solución](#))

318. Encuentra todos los puntos en la gráfica de $y^3 - 27y = x^2 - 90$ en los que la recta tangente es vertical.

319. Para la ecuación $x^2 + xy + y^2 = 7$,

- Encuentra la intersección con el eje x.
- Encuentra la pendiente de la(s) recta(s) tangente(s) en la intersección con el eje x.
- ¿Qué significan los valores obtenidos en el apartado b. acerca de la(s) recta(s) tangente?

([Solución](#))

320. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{6}$ en el punto $(0, 12)$.

321. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación $\tan^{-1}(x + y) = x^2 + \frac{\pi}{4}$ en el punto $(0, 1)$. ([Solución](#))

322. Encuentra y' y y'' para $x^2 + 6xy - 2y^2 = 3$.

323. [T] El número de teléfonos móviles producidos al gastar x dólares en mano de obra y se invierte un capital y dólares por un fabricante puede modelarse mediante la ecuación $60x^{3/4}y^{1/4} = 3240$.

- Encuentra $\frac{dy}{dx}$ y evalúa en el punto $(81, 16)$.
- Interpreta el resultado del apartado a.

(Solución)

324. [T] El número de automóviles producidos al gastar x dólares en mano de obra y se invierte un capital y dólares por un fabricante puede modelarse mediante la ecuación $30x^{1/3}y^{2/3} = 360$. (Tanto x como y se miden en miles de dólares).

- Encuentra $\frac{dy}{dx}$ y evalúa en el punto $(27, 8)$.
- Interpreta el resultado del apartado a.

325. El volumen de un cono circular recto de radio x y altura y viene dado por $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$. Suponga que el volumen del cono es $85\pi \text{ cm}^3$. Encuentra $\frac{dy}{dx}$ cuando $x = 4$ e $y = 16$. (Solución)



Para los siguientes ejercicios, consideremos una caja rectangular cerrada con una base cuadrada de lado x y altura y .

326. Encuentra una ecuación para el área de la superficie de la caja rectangular, $S(x, y)$.

327. Si el área de la superficie de la caja rectangular es 78 pies cuadrados, encuentra $\frac{dy}{dx}$ cuando $x = 3$ pies e $y = 5$ pies. (Solución)



Para los siguientes ejercicios, usa la derivación implícita para determinar y' . ¿La respuesta coincide con las fórmulas que hemos determinado previamente?

328. $x = \operatorname{sen} y$

329. $x = \cos y$ (Solución)

330. $x = \tan y$

3.10 Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

Objetivos de aprendizaje

1. Encontrar la derivada de funciones exponenciales.
2. Encontrar la derivada de funciones logarítmicas.
3. Usar la derivación logarítmica para determinar la derivada de una función.

Hasta ahora, hemos aprendido a derivar una variedad de funciones, incluidas funciones trigonométricas, inversas e implícitas. En esta sección, exploramos las derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas. Como discutimos en el primer capítulo, las funciones exponenciales juegan un papel importante en muchas aplicaciones como, por ejemplo, en el modelado del crecimiento de la población y la desintegración de materiales radiactivos.

Las funciones logarítmicas pueden ayudar a cambiar la escala de grandes cantidades y son particularmente útiles para reescribir expresiones complicadas.

3.10.1 Derivada de la función exponencial

Al igual que para las derivadas de otras funciones, podemos encontrar las derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas usando fórmulas. A medida que desarrollamos estas fórmulas, necesitamos hacer ciertas suposiciones básicas. Las pruebas que sostienen estos supuestos están más allá del alcance de este libro.

En primer lugar, partimos del supuesto de que la función $B(x) = b^x$, con $b > 0$, está definida para cada número real y es continua. Los valores de las funciones exponenciales para todos los números racionales se define comenzando con la definición de b^n , donde n es un número entero positivo, como el producto de b multiplicado por sí mismo n veces. Más tarde, definimos $b^0 = 1$, $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$, para un número entero positivo n , y $b^{s/t} = \sqrt[t]{b^s}$ para números enteros positivos s y t .

Estas definiciones no incluyen cómo obtener el valor de b^r donde r es un número real arbitrario. Suponiendo la continuidad de $B(x) = b^x$, con $b > 0$, podemos interpretar b^r como $\lim_{x \rightarrow r} b^x$ donde los valores de x los tomamos como racionales. Por ejemplo, podemos ver 4^π como el número que satisface

$$4^3 < 4^\pi < 4^4, \quad 4^{3.1} < 4^\pi < 4^{3.2}, \quad 4^{3.14} < 4^\pi < 4^{3.15}$$

$$4^{3.1414} < 4^\pi < 4^{3.142}, \quad 4^{3.1415} < 4^\pi < 4^{3.1416} \dots$$

Como vemos en la siguiente tabla, $4^\pi \approx 77.88$.

x	4^x	x	4^x
4^3	64	$4^{3.141593}$	77.88027104862
$4^{3.1}$	73.5166947198	$4^{3.1416}$	77.8810268071
$4^{3.14}$	77.7084726013	$4^{3.142}$	78.7932424541
$4^{3.141}$	77.8162741237	$4^{3.15}$	78.7932424541
$4^{3.1415}$	77.8702309526\$	$4^{3.3}$	84.4485062895
$4^{3.14159}$	77.8799471543	4^4	256

Tabla 3.6. Aproximación del valor de 4^x

También asumimos que para $B(x) = b^x$, $b > 0$, el valor de la derivada $B'(0)$ existe. En esta sección, mostramos que al hacer esta suposición adicional, es posible probar que la función $B(x)$ es derivable en todos los puntos.

Finalmente supongamos también que hay un valor único de $b > 0$ para el cual $B'(0) = 1$. Definimos este valor único como e , como hicimos en el apartado **Introducción a funciones y gráficos**.

La [Figura 3.33](#) proporciona las gráficas de las funciones $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 2.7^x$ y $y = 2.8^x$. Una estimación visual de las pendientes de las rectas tangentes a estas funciones en 0 proporciona evidencia que el valor de e se encuentra entre 2.7 y 2.8. La función $E(x) = e^x$ se llama **función exponencial natural**. Su inversa, $L(x) = \log_e x = \ln x$ se llama **función logarítmica natural**.

Se muestran las gráficas de 3^x , 2.8^x , 2.7^x y 2^x . En el cuadrante I, su orden de menor a mayor es 2^x , 2.7^x , 2.8^x y 3^x . En el cuadrante II, este orden se invierte. Todos cruzan el eje y en $(0, 1)$.

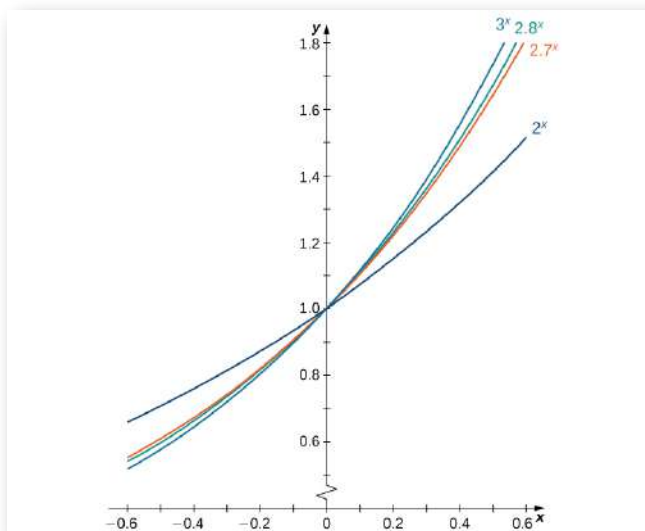


Figura 3.33 La gráfica de $E(x) = e^x$ está entre $y = 2^x$ y $y = 3^x$.

Para una mejor estimación de e , podemos construir una tabla de estimaciones de $B'(0)$ para funciones de la forma $B(x) = b^x$. Antes de hacer esto, recuerde que

$$B'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - b^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} \approx \frac{b^x - 1}{x}$$

para valores de x muy cercanos a cero. Para nuestras estimaciones, elegimos $x = 0.00001$ y $x = -0.00001$ para obtener la estimación

$$\frac{b^{-0.00001} - 1}{-0.00001} < B'(0) < \frac{b^{0.00001} - 1}{0.00001}$$

Consulta la siguiente tabla.

b	$\frac{b^{-0.000001}-1}{-0.000001} < B'(0) < \frac{b^{0.000001}-1}{0.000001}$	b	$\frac{b^{-0.000001}-1}{-0.000001} < B'(0) < \frac{b^{0.000001}-1}{0.000001}$
2	$0,693145 < B'(0) < 0,69315$	2.7183	$1,000002 < B'(0) < 1,000012$
2.7	$0,993247 < B'(0) < 0,993257$	2.719	$1.000259 < B'(0) < 1.000269$
2.71	$0,996944 < B'(0) < 0,996954$	2,72	$1.000627 < B'(0) < 1.000637$
2.718	$0,999891 < B'(0) < 0,999901$	2,8	$1.029614 < B'(0) < 1.029625$
2.7182	$0,999965 < B'(0) < 0,999975$	3	$1.098606 < B'(0) < 1.098618$

Tabla 3.7. Estimación del valor de e

La evidencia de la tabla sugiere que $2.7182 < e < 2.7183$.

La gráfica de $E(x) = e^x$ junto con la recta $y = x + 1$ se muestran en la [Figura 3.34](#). Esta recta es tangente a la gráfica de $E(x) = e^x$ en $x = 0$.

Ahora que hemos establecido nuestras suposiciones básicas, comenzamos nuestra investigación explorando la derivada de $B(x) = b^x$, $b > 0$. Recuerda que asumimos que existe $B'(0)$. Al aplicar la definición de límite a la derivada, concluimos que

$$B'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^{0+h} - b^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

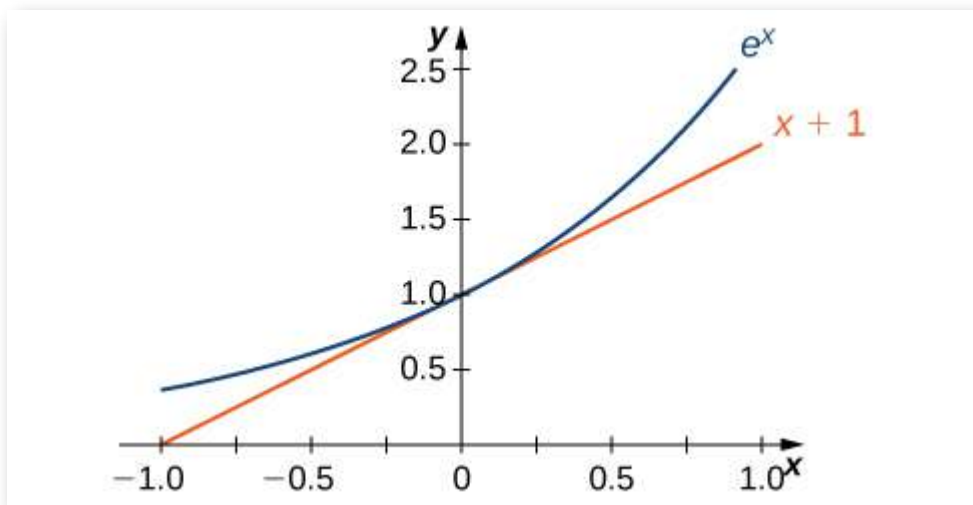


Figura 3.34 La recta tangente a $E(x) = e^x$ en $x = 0$ tiene pendiente 1.

Considerando $B'(x)$, obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
 B'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h} && \text{Aplicamos la definici3n de derivada} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^x b^h - b^x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^x (b^h - 1)}{h} \\
 &= b^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} \\
 &= b^x B'(0)
 \end{aligned}$$

Vemos que sobre la base del supuesto de que $B(x) = b^x$ es derivable en 0, $B(x)$ no solo es derivable en todas sus puntos, sino que su derivada es

$$B'(x) = b^x B'(0). \quad (3.29)$$

Para $E(x) = e^x$, $E'(0) = 1$. Entonces, tenemos $E'(x) = e^x$. El valor de $B'(0)$ para una función arbitraria de la forma $B(x) = b^x$, $b > 0$, se obtendrá más adelante.

TEOREMA 3.14. Derivada de la función exponencial natural

Sea $E(x) = e^x$ la función exponencial natural. Luego $E'(x) = e^x$.

En general,

$$\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = e^{g(x)} g'(x).$$



Ejemplo

3.74 Derivada de una función exponencial

Encuentra la derivada de $f(x) = e^{tg(2x)}$.



Solución



Ejemplo

3.75 Combinando reglas de derivación

Encuentra la derivada de $y = \frac{e^{x^2}}{x}$.



Solución



Pregunta de control

Cuestión 3.50

Encuentra la derivada de $h(x) = xe^{2x}$.



Ejemplo

3.76 Aplicar la función exponencial natural

Una colonia de mosquitos tiene una población inicial de 1000. Después de t días, la población viene dada por $A(t) = 1000e^{0.3t}$. Demuestra que la razón entre la tasa de cambio de la población, $A'(t)$, y la población, $A(t)$ es constante.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.51

Si $A(t) = 1000e^{0.3t}$ describe la población de mosquitos después de t días, como en el ejemplo anterior, ¿cuál es la tasa de cambio de $A(t)$ después de 4 días?

3.10.2 Derivada de la función logarítmica

Ahora que tenemos la derivada de la función exponencial natural, podemos usar la derivación implícita para encontrar la derivada de su inversa, la función logarítmica natural.

TEOREMA 3.15. La derivada de la función logarítmica natural

Si $x > 0$ y $y = \ln x$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}. \quad (3.30)$$

De manera más general, sea $g(x)$ una función derivable. Para todos los valores de x para los cuales $g'(x) > 0$, la derivada de $h(x) = \ln(g(x))$ viene dada por

$$h'(x) = \frac{1}{g(x)} g'(x). \quad (3.31)$$

Prueba

Si $x > 0$ e $y = \ln x$, entonces $e^y = x$. Derivando ambos lados de esta ecuación da como resultado la ecuación

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1.$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}.$$

Finalmente, sustituimos $x = e^y$ para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

También podemos obtener este resultado aplicando el teorema de la función inversa, como vamos a ver a continuación. Como $y = g(x) = \ln x$ es la inversa de $f(x) = e^x$, aplicando el teorema de la función inversa tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Usando este resultado y aplicando la regla de la cadena a $h(x) = \ln(g(x))$ se obtiene

$$h'(x) = \frac{1}{g(x)} g'(x).$$

La gráfica de $y = \ln x$ y su derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ se muestran en la [Figura 3.35](#).

La función $\ln x$ aumenta en $(0, +\infty)$. Su derivada es decreciente pero mayor que 0 en $(0, +\infty)$.

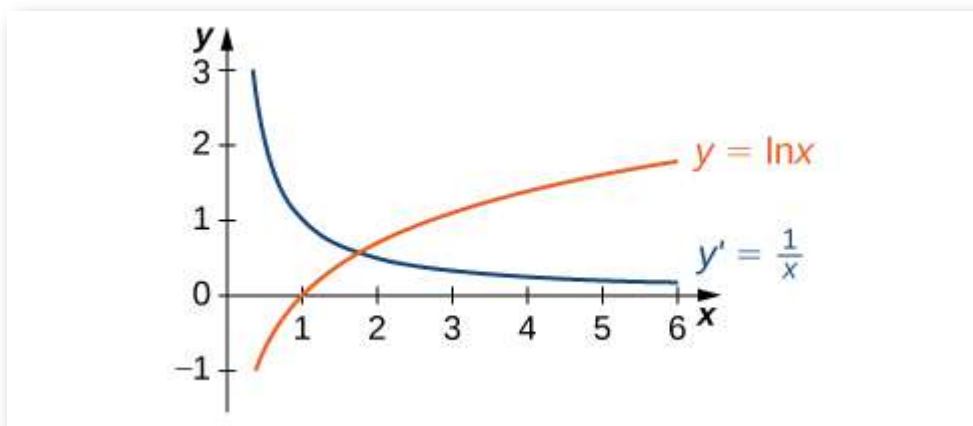


Figura 3.35 La función $y = \ln x$ aumenta en $(0, +\infty)$. Su derivada $y' = 1/x$ es mayor que cero en $(0, +\infty)$.



Ejemplo

3.77 Tomando una derivada de un logaritmo natural

Encuentra la derivada de $f(x) = \ln(x^3 + 3x - 4)$.



Solución



Ejemplo

Usar propiedades de logaritmos en una derivada

Encuentra la derivada de $f(x) = \ln \left(\frac{x^2 \operatorname{sen} x}{2x+1} \right)$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.52

Derivar: $f(x) = \ln(3x + 2)^5$.

Ahora que podemos derivar la función logarítmica natural, podemos usar este resultado para encontrar las derivadas de $\log_b x$ y $y = b^x$ para $b > 0, b \neq 1$.

TEOREMA 3.16. Derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales generales

Sea $b > 0, b \neq 1$, y sea $g(x)$ una función derivable.

- Si, $y = \log_b x$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln b}. \quad (3.32)$$

- Más general, si $h(x) = \log_b(g(x))$, entonces para todos los valores de x para los cuales $g(x) > 0$,

$$h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x) \ln b}. \quad (3.33)$$

- Si $y = b^x$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = b^x \ln b \quad (3.34)$$

Más general, si $h(x) = b^{g(x)}$, entonces

$$h'(x) = b^{g(x)} g'(x) \ln b \quad (3.35)$$

Prueba

Si $y = \log_b x$, entonces $b^y = x$. De ello se deduce que $\ln(b^y) = \ln x$. Entonces $y \ln b = \ln x$. Despejando y , tenemos $y = \frac{\ln x}{\ln b}$. Derivando y teniendo en cuenta que $\ln b$ es una constante, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln b}.$$

La derivada de la ecuación 3.33 se obtiene de la regla de la cadena.

Si $y = b^x$, entonces $\ln y = x \ln b$. Usando la derivación implícita, y teniendo en cuenta que $\ln b$ es constante, se deduce que $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln b$. Despejando $\frac{dy}{dx}$ y sustituyendo $y = b^x$, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = y \ln b = b^x \ln b.$$

La derivada más general (Ecuación 3.35) se sigue de la regla de la cadena.



Ejemplo

3.79 Aplicando fórmulas derivadas

Encuentra la derivada de $h(x) = \frac{3^x}{3x+2}$.



Solución



Ejemplo

3.80 Pendiente de una recta tangente

Encuentra la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \log_2(3x + 1)$ en $x = 1$.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.53

Encuentra la pendiente de la recta tangente a $y = 3^x$ en $x = 2$.

3.10.3 Derivación logarítmica

En este punto, podemos tomar derivadas de funciones de la forma $y = (g(x))^n$ para ciertos valores de n , así como funciones de la forma $y = b^{g(x)}$, donde $b > 0$ y $b \neq 1$. Desafortunadamente, todavía no conocemos las derivadas de funciones como $y = x^x$ o $y = x^\pi$.

Estas funciones requieren una técnica llamada derivación logarítmica, que nos permite derivar cualquier función de la forma $h(x) = g(x)^{f(x)}$.. También se puede usar para convertir un problema de derivación muy complejo en uno más simple, como encontrar la derivada de $y = \frac{x\sqrt{2x+1}}{e^x \cdot \sin^3 x}$. Describimos esta técnica en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas: Derivación logarítmica

1. Para derivar $y = h(x)$ usando la derivación logarítmica, se toma el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación para obtener $\ln y = \ln(h(x))$.
2. Se utilizan las propiedades de los logaritmos para expandir $\ln(h(x))$ tanto como sea posible.
3. Se deriva ambos lados de la ecuación. A la izquierda tendremos $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$.
4. Se multiplica ambos lados de la ecuación por y para despejar $\frac{dy}{dx}$.
5. Reemplaza y por $h(x)$.



Ejemplo

3.81 Usar derivación logarítmica

Encuentra la derivada de $y = (2x^4 + 1)^{tgx}$.



Solución



Ejemplo

3.82 Usar derivación logarítmica

Encuentra la derivada de $y = \frac{x\sqrt{2x+1}}{e^x \sin^3 x}$.



Solución



Ejemplo

3.83 Ampliando la regla del poder

Encuentra la derivada de $y = x^r$ donde r es un número real arbitrario.



Solución



Pregunta
de control

Cuestión 3.54

Usa la derivación logarítmica para encontrar la derivada de $y = x^x$.



Pregunta
de control

Cuestión 3.55

Encuentra la derivada de $y = (tgx)^x$.



3.10.4 Ejercicios



Para los siguientes ejercicios encuentra $f'(x)$

331. $f(x) = x^2 e^x$ ([Solución](#))

332. $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

333. $f(x) = e^{x^3 \ln x}$ ([Solución](#))

334. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 2x}$

335. $f(x) = \frac{e^x x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ([Solución](#))

336. $f(x) = \frac{10^x}{\ln 10}$

337. $f(x) = 2^{4x} + 4x^2$ ([Solución](#))

338. $f(x) = 3^{\sin 3x}$

339. $f(x) = x^\pi \pi^x$ ([Solución](#))

340. $f(x) = \ln(4x^3 + x)$

341. $f(x) = \ln \sqrt{5x - 7}$ ([Solución](#))

342. $f(x) = x^2 \ln 9x$

343. $f(x) = \log(\sec x)$ ([Solución](#))

$$344. f(x) = \log_7(6x^4 + 3)^5$$

$$345. f(x) = 2^x \cdot \log_3 7^{x^2-4} \text{ (Solución)}$$



En los siguientes ejercicios utiliza la derivación logarítmica para encontrar $\frac{dy}{dx}$.

$$346. y = x^{\sqrt{x}}$$

$$347. y = (\sin 2x)^{4x} \text{ (Solución)}$$

$$348. y = (\ln x)^{\ln x}$$

$$349. y = x^{\log_2 x} \text{ (Solución)}$$

$$350. y = (x^2 - 1)^{\ln x}$$

$$351. y = x^{\cot x} \text{ (Solución)}$$

$$352. y = \frac{x+11}{\sqrt[3]{x^2-4}}$$

$$353. y = x^{-1/2}(x^2 + 3)^{2/3}(3x - 4)^4 \text{ (Solución)}$$

354. [T] Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 4xe^{(x^2-1)}$ en el punto donde $x = -1$. Representa en una misma gráfica la función y la recta tangente.

355. [T] Encuentra la ecuación de la recta que es normal a la gráfica de $f(x) = x \cdot 5^x$ en el punto en el que $x = 1$. Representa en una misma gráfica la función y la recta normal. (Solución)

356. [T] Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $x^3 - x \ln y + y^3 = 2x + 5$ en el punto donde $x = 2$. (Sugerencia: utiliza la derivación implícita para encontrar $\frac{dy}{dx}$). Grafique tanto la curva como la tangente.

357. Consideremos la función $y = x^{1/x}$ para $x > 0$.

- Determina los puntos en la gráfica donde la recta tangente es horizontal.
- Determina los puntos en la gráfica donde $y' > 0$ y aquellos donde $y' < 0$.

(Solución)

358. La fórmula $I(t) = \frac{\sin t}{e^t}$ es la fórmula para una corriente alterna. Completa la siguiente tabla con los valores adecuados.

t	$\frac{\sin t}{e^t}$
0	(i)
$\frac{\pi}{2}$	(ii)
π	(iii)
$\frac{3\pi}{2}$	(iv)
2π	(v)
$\frac{5\pi}{2}$	(vi)
3π	(ii)

Utilizando solo los valores de la tabla, determina dónde es horizontal la recta tangente a la gráfica de $I(t)$.

359. [T] La población de Toledo, Ohio, en 2000 era de aproximadamente 500.000. Supongamos que la población está aumentando a una tasa del 5% anual.

- Escribe la función exponencial que relaciona la población total como una función de t .
- Utilizar el apartado a. para determinar la tasa a la que la población está aumentando en t años.
- Utiliza el apartado b. para determinar la tasa de crecimiento de la población en 10 años.

(Solución)

360. [T] Un isótopo del elemento erbio tiene una vida media de aproximadamente 12 horas. Inicialmente hay presentes 9 gramos del isótopo.

- a. Escribe la función exponencial que relacione la cantidad de sustancia restante en función de t , medida en horas.
- b. Utiliza el apartado a. para determinar la velocidad a la que la sustancia se descompone en t horas.
- c. Utiliza b. para determinar la tasa de descomposición en $t = 4$ horas.

361. [T] El número de casos de gripe en la ciudad de Nueva York desde principios de 1960 hasta principios de 1961 está modelado por la función $N(t) = 5.3e^{0.093t^2 - 0.87t}$, ($0 \leq t \leq 4$), donde $N(t)$ da el número de casos (en miles) y t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente al comienzo de 1960.

- Evalúa $N(0)$ y $N(4)$. Describe brevemente lo que indican estos valores sobre la enfermedad en la ciudad de Nueva York.
- Evalúa $N'(0)$ y $N'(3)$. Describe brevemente lo que indican estos valores sobre la enfermedad en la ciudad de Nueva York.

(Solución)

362. [T] La tasa relativa de cambio de una función derivable $y = f(x)$ está dada por $\frac{100 \cdot f'(x)}{f(x)} \%$. Un modelo para el crecimiento de la población es una función de crecimiento de Gompertz, dada por $P(x) = ae^{-b \cdot e^{-cx}}$ donde a, b y c son constantes.

- Encuentra la fórmula de la tasa relativa de cambio para la función genérica de Gompertz.
- Utiliza el apartado a. para encontrar la tasa relativa de cambio de una población en $x = 20$ meses cuando $a = 204$, $b = 0.0198$ y $c = 0.15$.
- Interpreta brevemente cuál es el resultado obtenido en b.



Para los siguientes ejercicios, usa la población de la ciudad de New York desde 1790 a 1860, que se muestra en la siguiente tabla.

Años desde 1790	Poblacion
0	22,131
10	60,515
20	96,373
30	123,706
40	202,300
50	312,710
60	515,547
70	813,669

Tabla 3.8 Población de la ciudad de Nueva York sobre Fuente: <http://en.wikipedia.org/wiki/>.

363. [T] Utilizando un programa de computadora o una calculadora, calcule un curva de crecimiento a los datos de la forma $p = ab^t$.
([Solución](#))

364. [T] Usando el mejor ajuste exponencial para los datos, escribe una tabla que contenga las derivadas evaluadas en cada año.

365. [T] Utilizando el mejor ajuste exponencial para los datos, escribe una tabla que contenga las segundas derivadas evaluadas en cada año. ([Solución](#))

366. [T] A partir de las tablas de la primera y segunda derivada y el mejor ajuste, responde a las siguientes preguntas:

- ¿Será el modelo preciso para predecir el futuro de la población de la ciudad de Nueva York? ¿Por qué o por qué no?
- Estima la población en 2010. la predicción obtenida en a. ¿fue correcta?

