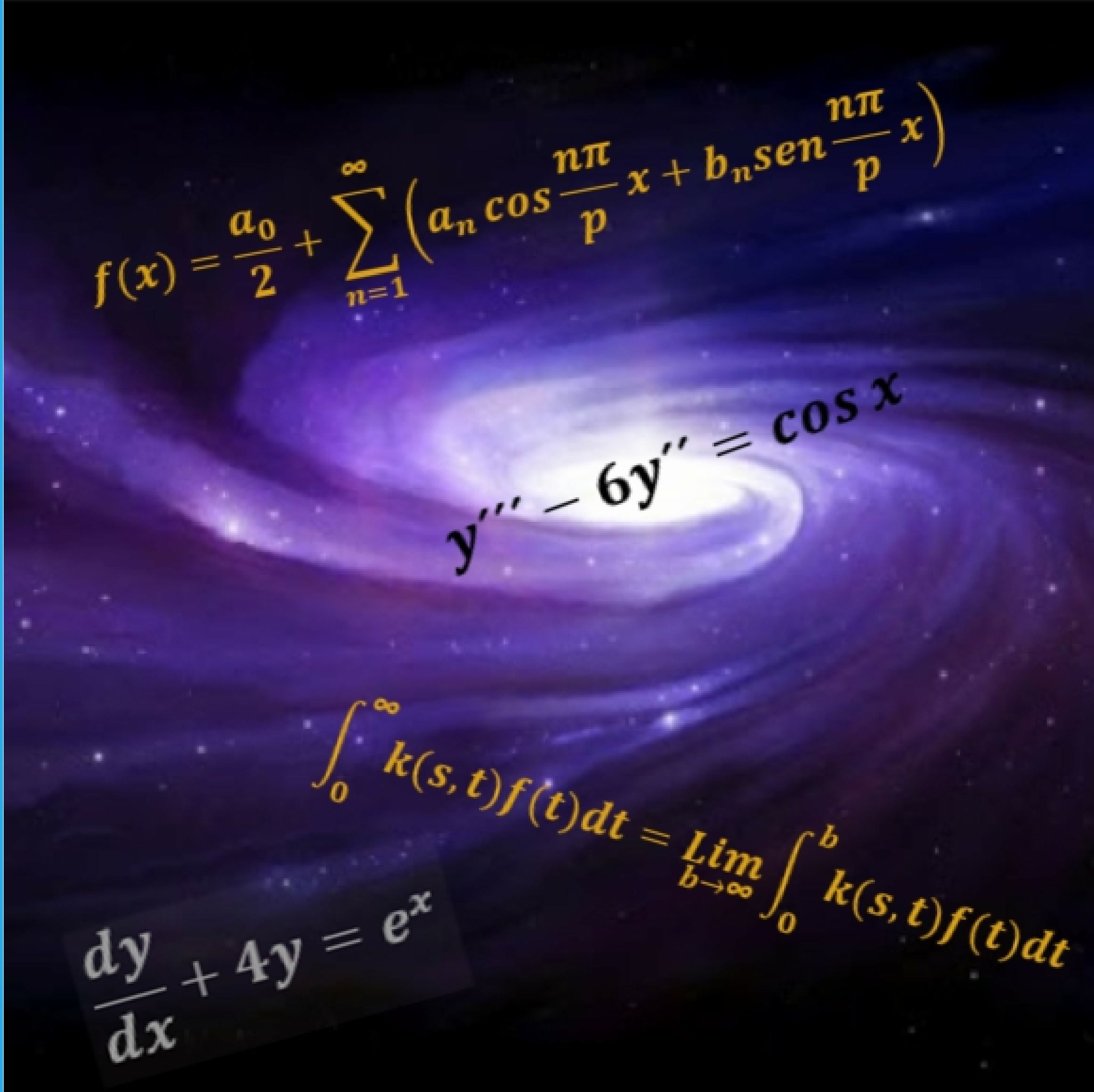


Ecuaciones Diferenciales

Libro interactivo

Jaime Humberto Ramírez Ríos

RED educativa digital Descartes

Ecuaciones Diferenciales

Jaime Humberto Ramírez Ríos
Institución Universitaria Pascual Bravo

Fondo Editorial RED Descartes

Córdoba (España)
2022

Título de la obra:
Ecuaciones Diferenciales

Autor:
Jaime Humberto Ramírez Ríos

Código JavaScript para el libro: Joel Espinosa Longi, IMATE, UNAM.
Recursos interactivos: DescartesJS
Fuentes: Lato y UbuntuMono

Red Educativa Digital Descartes
Córdoba (España)
descartes@proyectodescartes.org
https://proyectodescartes.org

Proyecto iCartesiLibri
https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/index.htm

ISBN: 978-84-18834-32-5

Tabla de contenido

Prefacio

El libro interactivo de “Ecuaciones diferenciales” se pensó para que el estudiante tenga una herramienta práctica en el estudio de las ecuaciones sin perder el rigor que ésta conlleva, el libro contiene teoría, ejemplos resueltos paso a paso y ejercicios propuestos con su respectiva respuesta, pero también, tiene escenas interactivas donde el lector puede cambiar los enunciados y visualizar las diferentes gráficas e interactuar con ellas, también cuenta con escenas para que el estudiante repase conceptos de asignaturas previas como matemáticas operativas, cálculo diferencial, cálculo integral y álgebra lineal. Recuerde que para tener un buen desempeño en esta asignatura se debe manejar muy bien los conceptos previos adquiridos en las asignaturas mencionadas anteriormente.

El texto incluye 40 escenas interactivas, diseñadas en DescartesJS y GeoGebra, para que los estudiantes y el lector puedan tener un acercamiento más práctico con las ecuaciones, también se incluyen 26 vídeos de YouTube creados por el mismo autor del libro para facilitar el desarrollo y mejor entendimiento de los diferentes contenidos.

El libro tiene cinco capítulos, introducción a las ecuaciones diferenciales, ecuaciones diferenciales de primer orden, ecuaciones diferenciales de orden superior, transformada de Laplace y series de Fourier. Con esto se puede comenzar aprendiendo a clasificar las ecuaciones para luego resolverlas de acuerdo a las características de cada una de ellas.

Para evitar, al máximo, la dependencia con la conectividad en la red, las expresiones matemáticas se han construido recurriendo al API de $\KaTeX$.

Capítulo I

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

1.1 Ecuaciones Diferenciales y modelos matemáticos

Las diferentes leyes que rigen el universo están descritas en lenguaje matemático. Cuando se deben describir fenómenos estáticos, el álgebra es suficiente para resolverlos, pero la mayoría de dichos fenómenos naturales involucran cambios que dependen del tiempo, es decir, implican una razón de cambio. Cuando un proceso describe el comportamiento de algunos fenómenos de la vida real en términos matemáticos recibe el nombre de **modelo matemático** y se utiliza para comprender las variables que lo conforman

Luego de plantear un modelo, es necesario resolverlo y confrontar la solución para saber si es razonable con los datos experimentales o con los hechos conocidos. Las hipótesis que se plantean implican una razón de cambio de una o más variables independientes con respecto a una o más variables dependientes, dicho modelo matemático implica una ecuación diferencial (ED)

Las ED tienen una importancia fundamental en las matemáticas debido a que son aplicables a casi todas las ramas del saber, como: geometría, física, química y biología. Éstas permiten identificar y aplicar técnicas y conceptos matemáticos que admiten obtener e interpretar la solución de una situación problema en la que intervienen relaciones entre tasas o razones de cambio de variables definidas en diversos contextos.

Algunas aplicaciones son: movimiento rectilíneo y caída libre, deformación de resortes y vigas, mezclas de soluciones salinas, circuitos en serie, desintegración radiactiva, fechado de fósiles con carbono 14, crecimiento y decrecimiento poblacional, propagación de virus y enfermedades, cambio en las temperaturas y reacciones químicas entre otros.

1.2 Definición de ecuación Diferencial

Definición de ecuación diferencial: una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial.

Hay dos formas de expresar ecuaciones diferenciales, las dos se van a utilizar en este libro.

a) $\frac{dy}{dx} + 4y = 1$

b) $y''' - 5y'' + 4y = 0$

NOTACIÓN:

Notación de Leibniz: Utiliza los símbolos $dy \wedge dx$ para representar incrementos infinitamente pequeños. Se representa como sigue:

$$\frac{dy}{dx}, \ \frac{d^{\,2}y}{dx^2}, \ \frac{d^{\,3}y}{dx^3} \ldots \ \frac{d^{\,n}y}{dx^n}$$

Notación de Primas: La notación prima se usa para denotar el número de la derivada siendo esta usada hasta tres prima ($'''$), de ahí en adelante se utiliza notación numérica: la cuarta derivada se denota $y^{(4)}$. La n-ésima derivada se escribe como $y^{(n)}$. Se representa como sigue:

$$y', \ y'' \ y''' \ y^{(4)} \ldots \ y^{(n)}$$

la notación de Leibniz llamada así en honor del filósofo y matemático alemán del siglo XVII **Gottfried Wilhelm Leibniz**, utiliza los símbolos dx y dy para representar incrementos infinitamente pequeños de $x \quad \wedge \quad y$ respectivamente, al igual que $\Delta x \quad \wedge \quad \Delta y$ representan incrementos finitos $x \quad \wedge \quad y$.

Leibniz comenzó a usar el carácter $\int$ basándose en el carácter de la palabra latina summa, que escribió como una "s" alargada. Este uso apareció por primera vez públicamente en su artículo "De Geometría", publicado en **Acta Eruditorum** de junio de 1686

La **prima** es un signo gráfico que se usa en matemáticas, artes, ciencias y unidades de medida. En trigonometría, la prima sencilla indica la precisión de minutos y la doble los segundos al referirse a medidas angulares, cuando se aplica la nomenclatura sexagesimal. Por ejemplo: $12^0 18^{'} 5^{''}$ denota 12 grados, 18 minutos y 5 segundos.

En el caso de las funciones matemáticas la prima sencilla indica la primera derivada de la función, la doble prima indica consecuentemente la segunda derivada y así sucesivamente, de doble prima en adelante son derivadas de orden superior.

En este libro vamos a utilizar las dos notaciones, pero es importante resaltar que aunque la notación de primas es más práctica y rápida de escribir, la notación de Leibniz tiene una ventaja sobre la notación de primas y es que muestra claramente ambas variables, la dependiente y la independiente.

1.3 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales

Se clasifican de acuerdo a tres propiedades.

1.3.1 Según el tipo:

Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO): es la ecuación que contiene derivadas respecto a una sola variable independiente. (Son las que se estudiarán en este libro).

$$\frac{dy}{dx} + y = senx$$

$$y''' + 5y' - 3y = 0$$

"x" Variable independiente.

"y" Variable dependiente

Ecuación Diferencial Parcial (EDP): es la que contiene las derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

"x" $\wedge$ "y" Variables independientes.

"u" $\wedge$ "v" Variables dependientes

Nota: Como todas las ecuaciones diferenciales que vamos a trabajar en este libro son ordinarias las vamos a llamar ED

1.3.2 Según el orden:

El orden de una ED es el de la derivada de mayor orden que hay en la ecuación.

$\dfrac{d^{2}y}{dx^2} + 5y = senx$ ED de segundo orden

$y''' + 5y'' - 3y' + y = 0$ ED de tercer orden

$\dfrac{d^{4}y}{dx^4} + \dfrac{d^{2}y}{dx^2} + y = e^x$ ED de cuarto orden

$y' + 2y = tanx$ ED de primer orden

1.3.3 Según la linealidad:

Se dice que una ED de n-ésimo orden es **lineal** si F es lineal en la variable dependiente, esto significa que una ED es lineal si tiene la forma

$$a_n(x)\frac{d^{n}y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Las características especiales son:

- la variable dependiente ∧ todas sus derivadas son de primer grado.

- Los coeficientes de $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \wedge$ las funciones dependen a los más de la variable independiente.

$xy'' - 4y' = x^2$ ED lineal de segundo orden

La ecuación es lineal porque la variable que tiene exponente es la variable independiente.

$x^3y''' + xy' - y = \ln|y|$ ED no lineal de tercer orden

La ecuación no es lineal porque la función logaritmo depende de la variable dependiente

$\frac{d^4y}{dx^4} + 17\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 16y = 0$ ED no lineal de cuarto orden

La ecuación no es lineal porque la segunda derivada está elevada a un exponente

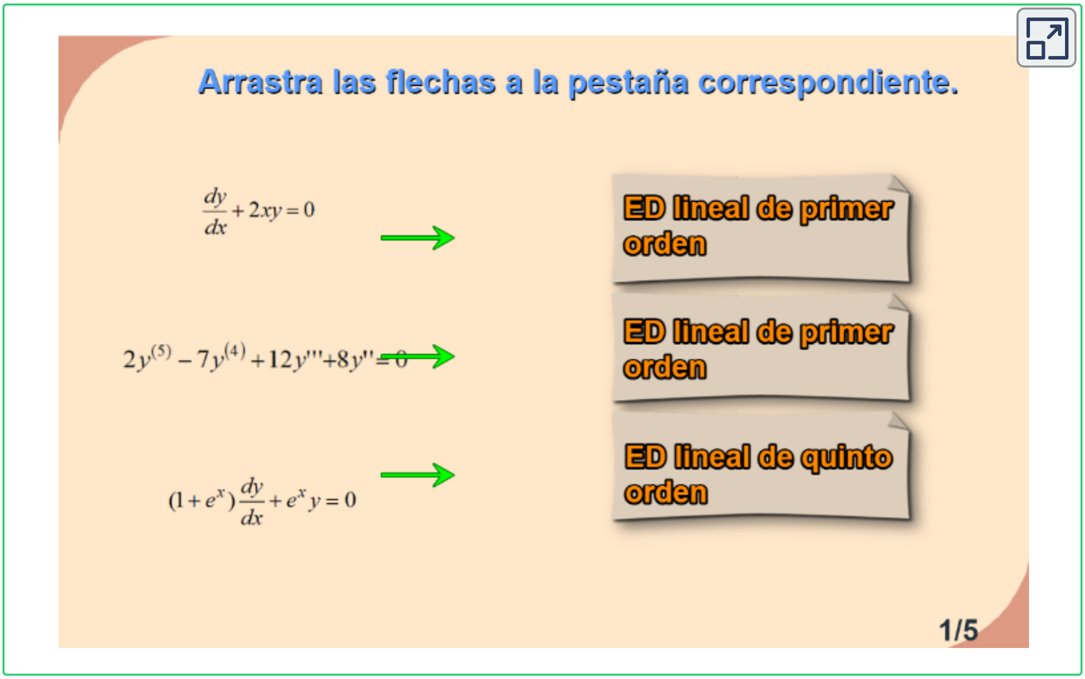
$y' = y - y^2$ ED no lineal de primer orden

La ecuación no es lineal porque la variable dependiente está elevada a un exponente

En general es más fácil identificar cuándo una ED es no lineal, que cuándo es lineal.

Practiquemos

En la siguiente escena interactiva, adaptada de Plantillas con descartes_JS, debes arrastrar la flecha desde la ED lado izquierdo hasta el texto del lado derecho para identificar el orden y la linealidad de cada ecuación diferencial. Es importante aprender a identificar las ED según el orden y la linealidad, para aplicar el método adecuado de solución que veremos más adelante.



1.4 Solución de una ecuación Diferencial

Definición: Cualquier función f definida en un intervalo I $\wedge$ que tiene al menos n derivadas continuas en f, las cuales cuando se sustituyen en una ED ordinaria de n-ésimo orden reducen la ecuación a una identidad, se dice que es una solución de la ecuación en el intervalo.

Intervalo de definición: La solución de una ecuación diferencial debe estar definida en un intervalo. Dicho intervalo se conoce como intervalo de definición, intervalo de existencia o dominio de la solución.

1.4.1 Tipos de soluciones

Solución trivial: Es la solución de una ED que es idéntica a cero en un intervalo I

$$y = 0$$

Puede ocurrir que una ecuación de orden superior tenga una o varias soluciones triviales, lo que no puede ocurrir es que todas las soluciones sean triviales

Solución explícita: Es la solución en la que la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente $\wedge$ las constantes.

La función $y = 4 + \dfrac{1}{2}e^{-5x}$ es **solución explícita** de la ED

$$\frac{dy}{dx} + 5y = 20$$

En el ejemplo (1) de la página 21 se verificará que $y = 4 + \dfrac{1}{2}e^{-5x}$ es solución de la ED $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 20$

Solución implícita: Se dice que una función $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ED en un intervalo I, suponiendo que existe al menos una función f que satisface la relación así como la ED en I

La función $x^2 + y^2 = 4$ es **solución implícita** de la ED $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ en el intervalo $-2 < x < 2$

Ejemplo 1. Verificación de una solución

Verifique que la función $y = 4 + ce^{-5x}$ es una solución de la ED $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 20$

Solución

Como la ecuación es de primer orden, se debe derivar una vez la función.

$$\frac{dy}{dx} = -5ce^{-5x}$$

Reemplazando la función $\wedge$ la derivada en la ED se tiene

$$-5ce^{-5x} + 5(4 + ce^{-5x}) = 20$$

Aplicando propiedad distributiva

$$-5ce^{-5x} + 20 + 5ce^{-5x} = 20$$

Agrupando términos semejantes queda $20 = 20$

Al demostrar que el lado derecho de la ecuación es igual al lado izquierdo, se verifica que la función

$y = 4 + ce^{-5x}$ es **solución** de la ED $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 20$

Ejemplo 2. Verificación de una solución

Verifique que la función $y = xe^{-3x}$ es una solución de la ED
$y'' + 6y' + 9y = 0$

Solución

Como la ecuación es de segundo orden, se debe derivar dos veces la función, tenga en cuenta que se debe derivar como un producto.

$$y = xe^{-3x}$$

$$y' = -3xe^{-3x} + e^{-3x}$$

$$y'' = 9xe^{-3x} - 3e^{-3x} - 3e^{-3x}$$

Agrupando términos semejantes

$$y'' = 9xe^{-3x} - 6e^{-3x}$$

Ahora reemplazamos la función y las dos derivadas en la ED

$$9xe^{-3x} - 6e^{-3x} + 6(-3xe^{-3x} + e^{-3x}) + 9(xe^{-3x}) = 0$$

Aplicando propiedad distributiva

$$9xe^{-3x} - 6e^{-3x} - 18xe^{-3x} + 6e^{-3x} + 9xe^{-3x} = 0$$

Agrupando términos semejantes

$0 = 0$

Al demostrar que el lado derecho de la ecuación es igual al lado izquierdo, se verifica que la función

$y = xe^{-3x}$ es **solución** de la ED $\quad y'' + 6y' + 9y = 0$

Ejemplo 3. Comprobación de una solución

Verificar si la función $y = xsen(\ln|x|)$ es **solución explícita** de la ED $\quad x^2y'' + xy' + 2y = 0$

Solución

Como la ecuación es de segundo orden, se debe derivar dos veces la función, tenga en cuenta que se debe derivar como un producto.

$$y = xsen(\ln|x|)$$

$$y' = xcos(\ln|x|)\frac{1}{x} + sen(\ln|x|)(1)$$

$$y' = cos(\ln|x|) + sen(\ln|x|)$$

$$y'' = -sen(\ln|x|)\frac{1}{x} + cos(\ln|x|)\frac{1}{x}$$

Ahora se reemplaza la función y sus derivadas en la ED de segundo orden.

$$x^2(-sen(\ln|x|)\frac{1}{x}+cos(\ln|x|)\frac{1}{x})+x(cos(\ln|x|)+sen(\ln|x|))+2(xsen(\ln|x|))=0$$

Propiedad distributiva

$$-xsen(\ln|x|)+xcos(\ln|x|)+xcos(\ln|x|)+xsen(\ln|x|)+2xsen(\ln|x|)=0$$

Agrupando términos semejantes se obtiene

$$2xcos(\ln|x|)+2xsen(\ln|x|)=0$$

Como no se cumple la identidad, se puede afirmar que

$y=xsen(\ln|x|)$ **No es la solución** de la ED
$x^2y''+xy'+2y=0$

Ejemplo 4. Comprobación de una solución implícita.

Demuestre que la relación $x^2+y^2=4$ es **solución implícita** de la ED $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ en el intervalo $(-2,2)$

Solución

Se deriva dos veces la función

$2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ despejando se obtiene $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

Además, resolviendo $x^2 + y^2 = 4$ para y en términos de x se obtiene.

$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

las dos funciones $y = \sqrt{4 - x^2}$ $\wedge$ $y = -\sqrt{4 - x^2}$ satisfacen la relación $x^2 + y^2 = 4$ $\wedge$ son las soluciones explícitas definidas en el intervalo $(-2, 2)$

Las dos funciones, tanto la positiva como la negativa, satisfacen la relación $\wedge$ son la solución implícita, definidas en el intervalo abierto $(-2, 2)$

Ejemplo 5. Comprobación de una solución implícita.

Demuestre que la función $x^2y - tanx + y^2 = 0$ es

solución implícita de la ED $(2xy - sec^2x)dx + (x^2 + 2y)dy = 0$

Solución

Primero debemos organizar la ED, dividiéndola toda por dx

$$(2xy - sec^2x) + (x^2 + 2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Ahora despejamos el $\frac{dy}{dx}$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sec^2x - 2xy}{x^2 + 2y}$$

Ahora vamos a derivar la función $x^2y - tanx + y^2 = 0$ aplicando derivación implícita.

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - sec^2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Agrupando los términos con $\frac{dy}{dx}$ al lado izquierdo y los otros términos al lado derecho, obtenemos

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2xy + sec^2x$$

Sacando factor común $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + 2y) = -2xy + sec^2x$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sec^2x - 2xy}{x^2 + 2y}$$

Como los dos resultados son iguales, podemos decir que la función $x^2y - tanx + y^2 = 0$ es **solución implícita** de la ED

$$(2xy - sec^2x)dx + (x^2 + 2y)dy = 0$$

1.4.2 Familias de soluciones

Familias de soluciones: una ED puede tener una cantidad α de soluciones que corresponden a las elecciones ilimitadas de parámetros. Todas estas familias se llaman familias paramétricas de soluciones. El parámetro está directamente relacionado con el orden de la ED.

Si la ED es de primer orden, la solución es **uniparamétrica.** Hay un parámetro c que puede tomar diferentes valores.

Si la ED es de segundo orden, la solución es **biparamétrica.** Hay dos parámetros $c_1 \wedge c_2$ que pueden tomar diferentes valores.

Si la ED es de tercer orden, la solución es **triparamétrica.** Hay tres parámetros $c_1, c_2 \wedge c_3$ que pueden tomar diferentes valores.

Si la ED es de orden n, la solución es **n-paramétrica.** Hay n parámetros $c_1, c_2, c_3 \ldots, c_n$ que pueden tomar diferentes valores.

Solución general: Es la función que satisface a la ED $\wedge$ que contiene una o más constantes arbitrarias dependiendo del orden de la ecuación diferencial y que fueron obtenidas de las sucesivas integraciones.

La función $y = c_1 xcos(\ln|x|) + c_2 xsen(\ln|x|)$

Es una **solución general** de la ED

$x^2y'' - xy' + 2y = 0$

La función $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$

Es una **solución general** de la ED

$y'' - 4y' + 4y = 0$

Solución particular: Es la función que satisface a la ED $\wedge$ cuyas constantes arbitrarias toman un valor específico.

La función $y = \frac{2}{5}xcos(\ln|x|) - \frac{1}{3}xsen(\ln|x|)$

Es una **solución particular** de la ED

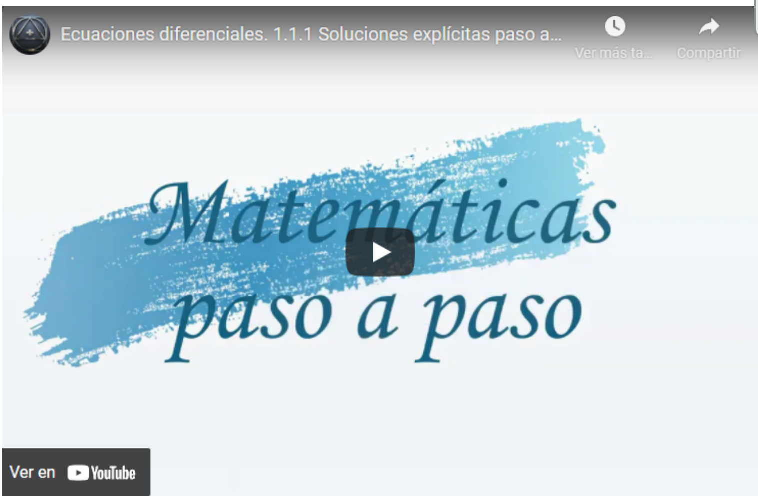
$x^2y'' - xy' + 2y = 0$

La función $y = \frac{3}{5}e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x}$

Es una **solución particular** de la ED

$y'' - 4y' + 4y = 0$

En el siguiente video, realizado por [Jaime H. Ramírez Rios](), podrás observar un ejemplo de comprobación de una solución explícita.



En el siguiente video, realizado por [Jaime H. Ramírez Rios](), podrás observar un ejemplo de comprobación de una solución explícita.

1.4.3 Curva solución

Curva solución: La gráfica de la solución de una ED se llama curva solución. Puesto que la función es derivable y continua en el intervalo de definición I. Es probable que la gráfica de la ED sea diferente a la gráfica de la solución, por lo cual el dominio de cada una no necesariamente debe ser igual.

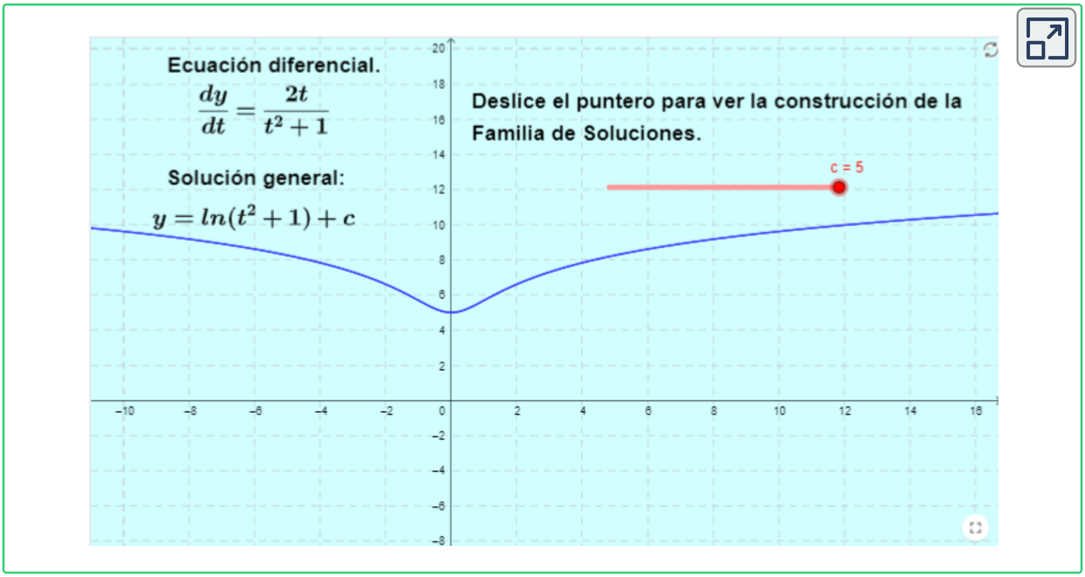
Geométricamente, la solución general representa una familia de curvas. La solución general es una familia de gráficas que van cambiando dependiendo del valor del parámetro c, la solución particular es una de las curvas de la familia.

Geométricamente se puede hallar la solución de una ED $y' = f(x, y)$ dada. En cada punto (x, y) del plano xy, el valor de $f(x, y)$ determina una pendiente $m = f(x, y)$, esto significa que la solución de una ED es simplemente una función derivable cuya gráfica $y = y(x)$ tiene su "pendiente correcta" en cada punto $(x, y(x))$.

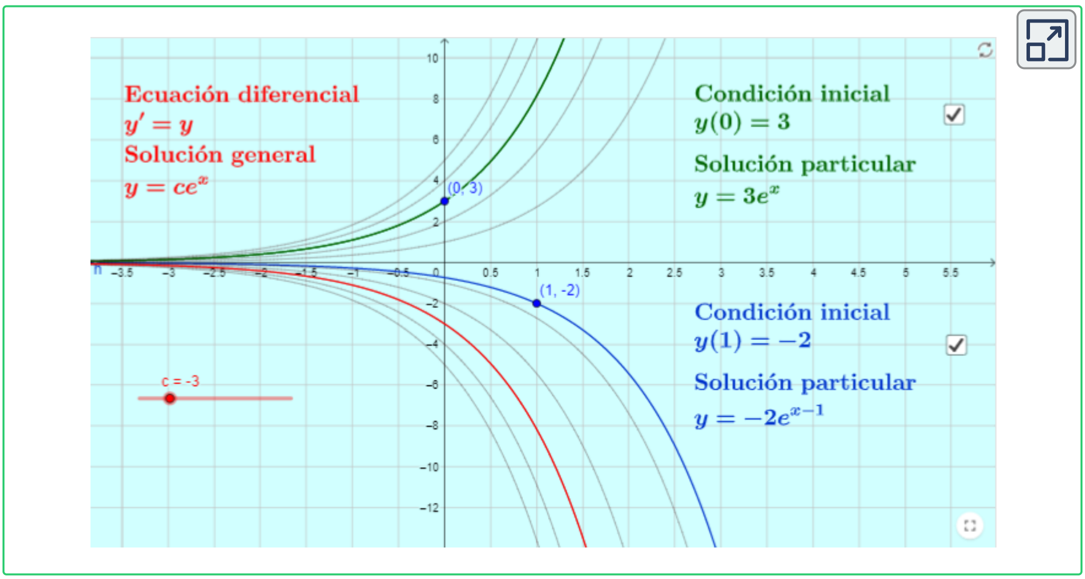
Una **curva solución** de la ED $y' = f(x, y)$ es claramente una curva en el plano xy cuya línea tangente en cada punto (x, y) tiene pendiente $m = f(x, y)$

En la siguiente escena interactiva podrás interactuar con la solución $y = \ln\left|t^2 + 1\right| + c$ de la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t}{t^2 + 1}$.

En la siguiente escena interactiva, diseñada por Jorge L. Herrera, podrás ver cómo cambia la gráfica de una ED al cambiar el valor del parámetro c.



En la siguiente escena interactiva, diseñada por [Adrián Rocha Ichante](), podrás ver cómo cambia la gráfica de la ED al cambiar el valor del parámetro c. La solución es una familia de soluciones.



1.5 Problemas de valor inicial

A menudo es interesante resolver una ecuación diferencial de primer orden de la forma $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, sujeta a la condición inicial $y(x_0) = y_0$

Ejemplo 1. PVI de primer orden

$y = ce^x$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ED de primer orden $y' = y$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Determine una solución del problema de valor inicial PVI de primer orden que consiste en esta ecuación diferencial $\wedge$ la condición inícial $y(0) = 5$

Solución

$y = ce^x$	Se reemplaza la condición inicial $y(0) = 5$. Recuerde que la condición inicial es $y(x_0) = y_0$, es decir, $y = 5$ cuando $x = 0$
$5 = ce^0$	El valor del parámetro es:
$c = 5$	reemplazando en la solución general, obtenemos la solución particular.

$$y = 5e^x$$

Ejemplo 2. PVI de segundo orden

$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ es una familia biparamétrica de soluciones de la ED de segundo orden $y'' - y' - 2y = 0$

Determinar $c_1 \wedge c_2$ de modo que se cumplan las condiciones iníciales $y(0) = 2 \wedge y'(0) = -3$

Solución

$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ es la solución general de la ED $y'' - y' - 2y = 0$

Para hallar los valores de $c_1 \wedge c_2$ y expresar la solución particular se debe reemplazar la condición $y(0) = 2$ en la solución de la siguiente forma:

$2 = c_1e^0 + c_2e^0$. Recuerde que $e^0 = 1$, entonces queda una ecuación con dos incógnitas $2 = c_1 + c_2$ y la llamamos ecuación (1)

Para resolver esta ecuación se necesita tener otra ecuación con dos incógnitas, entonces se deriva la solución y se reemplaza la condición $y'(0) = -3$ de la siguiente forma:

Derivando la solución obtenemos $y' = -c_1e^{-x} + 2c_2e^{2x}$

Reemplazando la condición inicial $-3 = -c_1e^0 + 2c_2e^0$ se llega a la ecuación $-3 = -c_1 + 2c_2$ y la llamamos ecuación (2)

Con las ecuaciones $(1) \wedge (2)$ se puede formar un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -c_1 + 2c_2 = -3 \end{cases}$$

Este sistema se puede resolver por igualación, sustitución o eliminación.

Teniendo en cuenta las dos ecuaciones resultantes, lo vamos a resolver por eliminación

$$\begin{array}{r} \cancel{c_1} + \ c_2 = 2 \\ \cancel{-c_1} + 2c_2 = -3 \\ \hline 3c_2 = -1 \end{array}$$

Obtenemos $c_2 = -\dfrac{1}{3}$

Reemplazando en la ecuación $2 = c_1 + c_2$ llegamos a

$$2 = c_1 - \frac{1}{3}$$

Despejando c_1 se obtiene

$$c_1 = \frac{7}{3}$$

Entonces la solución particular es

$$y = \frac{7}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x}$$

Ejemplo 3. Intervalo de definición de una solución

$y = \dfrac{1}{x^2 + c}$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial de Primer orden $y' + 2xy^2 = 0$. Determine una solución del PVI $y(1) = 4$ de primer orden que consiste en esta ecuación diferencial y las condiciones iníciales dadas. Dé el intervalo en el cual está definida la solución.

Solución

$y = \dfrac{1}{x^2 + c}$ es la solución general de la ED $y' + 2xy^2 = 0$

Para hallar el valor de c se debe reemplazar la condición $y(1) = 4$ en la solución de la siguiente forma:

$4 = \dfrac{1}{1^2 + c}$. Despejando obtenemos. $4 + 4c = 1$

Despejando el parámetro c obtenemos $c = -\dfrac{3}{4}$

La solución particular es $y = \dfrac{1}{x^2 - \dfrac{3}{4}}$ el dominio es $\mathbb{R} - \left\{\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

El intervalo de definición está dado por.

$$\left(-\infty\frac{-\sqrt{3}}{12}\right)U\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\infty\right)$$

1.5.1 Campos direccionales

A partir del capítulo 2 se hará un análisis de los diferentes métodos para resolver ED, para lo cual, es necesario identificar primero el tipo de ecuación para saber cuál o cuáles métodos aplicar, pero antes de proceder a dicho análisis, nos detendremos en la interpretación geométrica de las ED y sus soluciones.

Desde el punto de vista geométrico hay un método para obtener soluciones aproximadas de la ED $y' = f(x,)$ a través de cada grupo representativo de puntos (x, y) en el plano se obtiene un segmento lineal con pendiente $m = f(x, y)$, todos los segmentos lineales constituyen un **campo de pendientes** o un **campo direccional**

La terna (x, y, y') determina la dirección de una recta que pasa por el punto (x, y). El conjunto de los segmentos de estas rectas es la representación geométrica del campo direccional

Una **Isóclina** es el conjunto de los puntos del plano en donde las rectas tangentes a las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial tienen la misma pendiente. Estos puntos son aquellos que satisfacen $y' = f(x, y) = c$

En las siguientes tres escenas interactivas podres ver el comportamiento de los campos direccionales y las Isóclinas de diferentes ED.

En la primera escena interactiva podras ver el comportamiento del campo de direcciones de una ED de primer orden $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ y la gráfica solución para diferentes valores del parámetro (radio de circunferencia).

En la segunda escena interactiva podras ver el comportamiento del campo de direcciones, densidad y longitud de una ED de primer orden $\frac{dy}{dx} = x$, pero puedes cambiar la ED ingresando otra función diferente, además, puedes visualizar soluciones particulares para diferentes valores del parámetro.

En la tercera escena interactiva podrás interactuar con las Isóclinas que están formadas por la solución de la ED

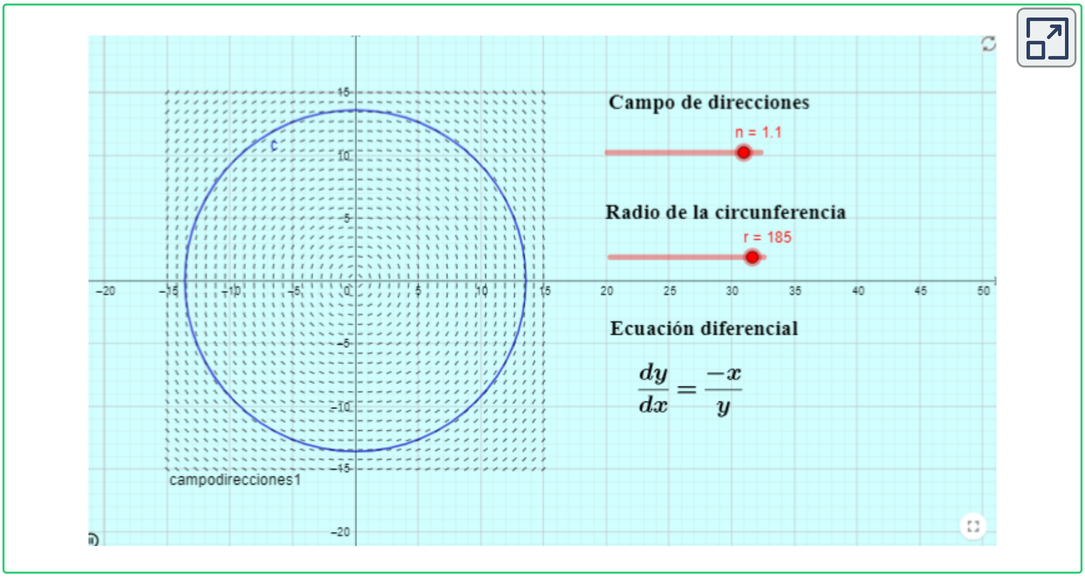
$y' = x + y - 1.$

Al mover el deslizador, podrás ver las pendientes de las rectas tangentes de acuerdo con la recta

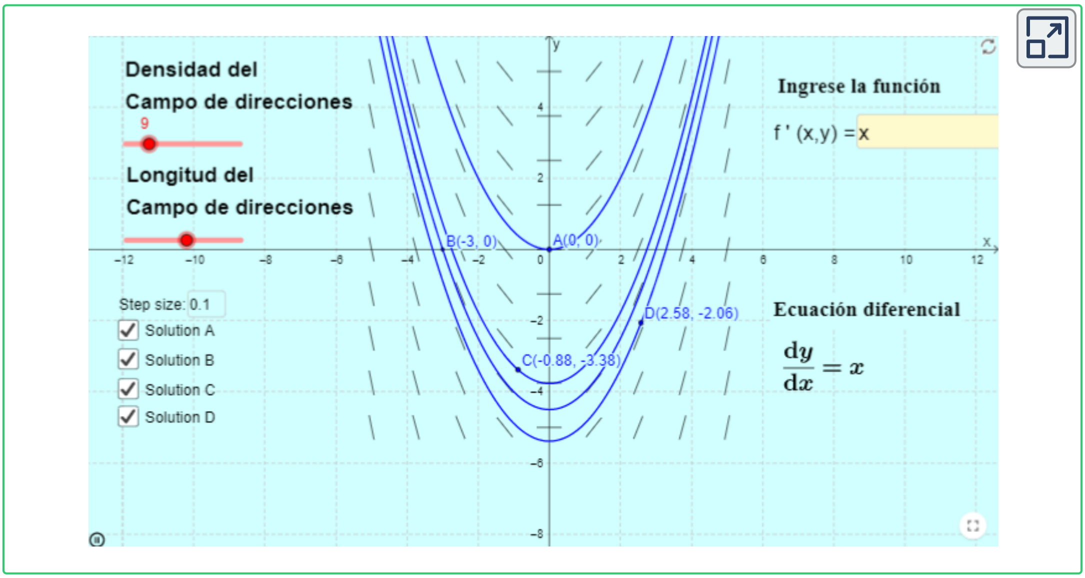
$k = x + y + 1.$

Las flechas indican cómo va cambiando el campo de direcciones de la ED

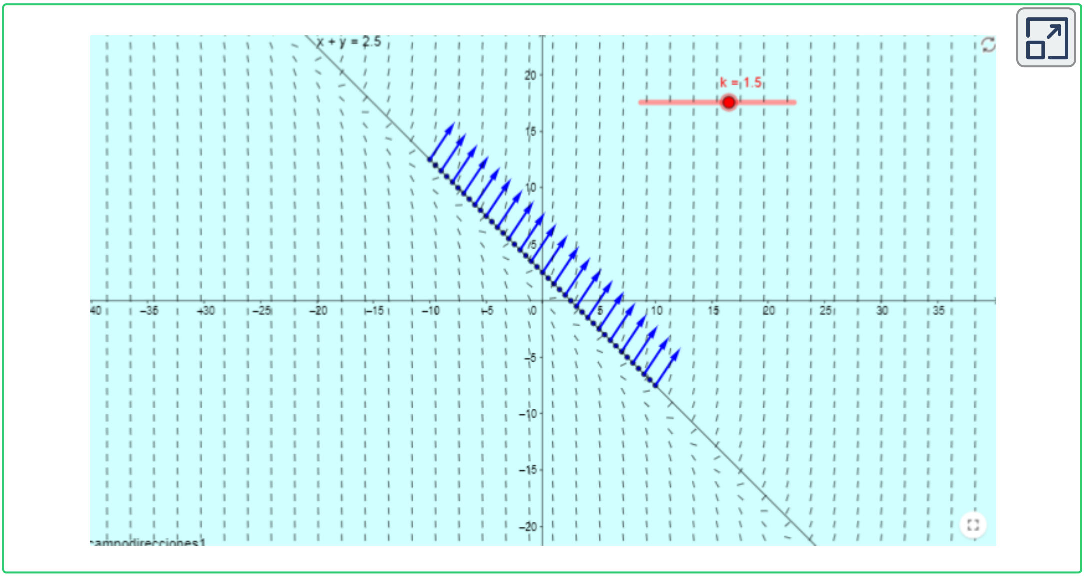
En la siguiente escena interactiva, diseñada por Jorge Olivares Funes, podrás ver el campo direccional de una ED y cómo cambia el radio de la circunferencia.



En la siguiente escena interactiva, diseñada por [Soed Torres](), podrás ver el campo direccional de una ED.



En la siguiente escena interactiva, diseñada por Diego Sandoval, podrás ver las Isóclinas de una ED y cómo cambian a medida que se cambia el valor del parámetro.



1.5.2 Existencia y unicidad

Cuando se considera un problema de valor inicial (PVI) se deben considerar dos preguntas:

¿Existe la solución del problema? Si la respuesta es afirmativa se debe preguntar **¿La solución es única?**

Dada una ED $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

Donde $f(x,y)$ está definida en una región rectangular R que contiene al punto (x_0, y_0)

Si $f(x, y)$ satisface las condiciones:

1. $f(x, y)$ es continua en R,
2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en R

Entonces existe un intervalo I con centro en $x_0 \wedge$ existe una y sólo una función $y = g(x)$ definida en el intervalo I que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$

En otras palabras, las condiciones para la existencia de la solución son:

- Continuidad de $f(x, y)$ en R,
- Acotamiento de $f(x, y)$ por R,

Y las condiciones para la unicidad son:

- Continuidad de $f(x, y) \ \wedge \ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ en R,
- Acotamiento de $f(x, y) \ \wedge \ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ por R,

Estas condiciones son suficientes pero no necesarias, porque puede existir una solución que satisface $y(x_0) = y_0$, pero que no cumple la condición **1**, o la condición **2**, o ninguna de las dos.

A continuación vamos a ver un ejemplo y luego a definir la existencia y unicidad de soluciones.

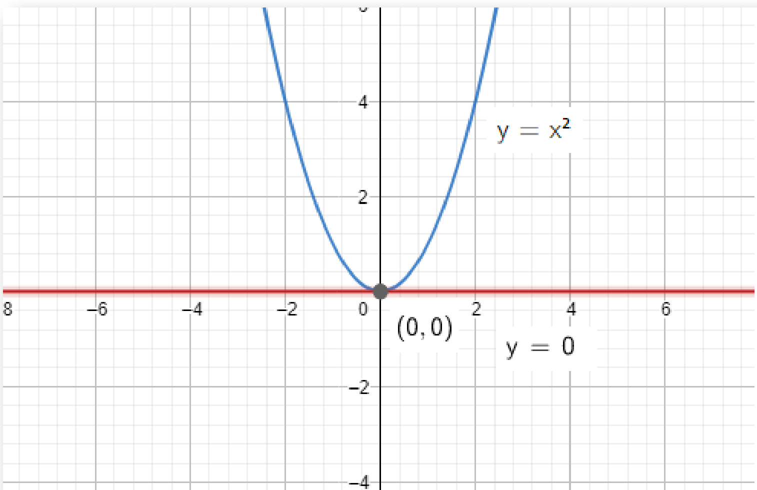
Ejemplo 1. Existencia y unicidad

Cada una de las funciones $y = 0 \ \wedge \ y = x^2$ satisface la ED $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \ \ \wedge$ la condición inicial $y(0) = 0$

Solución

El PVI $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0$ tiene al menos dos soluciones. como se muestra en la figura 1.

El estudiante puede verificar que las dos funciones son solución de la ED, además, las gráficas de las dos soluciones pasan por el mismo punto $(0, 0)$



Gráfica 1 Dos soluciones del mismo PVI.

Existencia y unicidad de soluciones: Suponga que tanto la función $f(x,y) \wedge$ su derivada $D_y \quad \wedge \quad (x,y)$ son continuas en algún rectángulo R en el plano xy que contiene el punto (a,b) en su interior. Entonces, para algún intervalo abierto I conteniendo el punto a, el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Tiene una y sólo una solución que está definida en el intervalo I

Ejemplo 2. Existencia y unicidad

Verificar si la función $y = -\dfrac{x}{1+cx}$ cumple la CI. $\quad y(0) = 1$

Solución

Reemplazando las condiciones iniciales $y = 1$ cuando $x = 0$ en la función, obtenemos

$1 = -\dfrac{0}{1+c(0)}$ nos queda la ecuación $1 = 0$ lo cual es un absurdo.

Esto quiere decir que es imposible que dicha solución cumpla las condiciones iniciales

Ejemplo 3. Existencia y unicidad

Demuestre que la ED $\frac{dy}{dx}+y=0$ tiene solución única para la CI. $y(1)=3$

Solución

Vamos a demostrar que la ED tiene solución única sin resolverla, para esto debemos despejar la ED.

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

La función $f(x,y)=-y$ es un polinomio, por lo cual es continua en todo el plano $\mathbb{R}^2$

Ahora se deriva parcialmente la función respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-1$$

Es una función constante, por lo cual es continua en todo el plano $\mathbb{R}^2$

Ambas funciones son continuas en cualquier rectángulo que contenga el punto $(1,3)$, como se cumplen las condiciones **1** $\wedge$ **2** en un intervalo con centro en x_0 entonces el PVI tiene solución única

Ejemplo 4. Existencia y unicidad

Determine una región del plano xy para el que la ED $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$ tiene solución única, cuyas gráficas pasen por un punto (x_0, y_0) en la región

Solución

$$f(x, y) = \sqrt{xy}$$

Una raíz par no puede ser negativa, pero como está en el numerador puede ser 0

La función es continúa para $x \geq 0 \wedge y \geq 0$ o para $x \leq 0 \wedge y \leq 0$

Ahora se deriva parcialmente la función respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}$$

Una raíz par no puede ser negativa, pero como y está en el denominador no puede ser 0

La función es continúa para $x > 0 \ \wedge \ y > 0$ o para $x < 0 \wedge y < 0$

La función es continúa en la intercepción de los dos rectángulos es decir para $x > 0 \wedge y > 0$ o para $x < 0 \wedge y < 0$

1.6 Repasando trigonometría y derivadas

Como acabas de ver en los contenidos vistos hasta ahora es muy importante que manejes bien los conceptos de trigonometría básica y de derivadas, por eso vamos a repasar un poco dichos contenidos, si ya los manejas bien, pasa directamente a la página 53 para practicar lo visto hasta el momento.

A continuación encontrarás una tabla con las identidades trigonométricas básicas y pitagóricas para que uses al resolver ejercicios que contengan funciones trigonométricas.

Identidades trigonométricas básicas			
$tanx = \frac{senx}{cosx}$	$cotx = \frac{cosx}{senx}$	$secx = \frac{1}{cosx}$	$cscx = \frac{1}{senx}$
$sen^2x + cos^2x = 1$	**Despejando**	$sen^2x = 1 - cos^2x$	$cos^2x = 1 - sen^2x$
$1 + tan^2x = sex^2x$	**Despejando**	$tan^2x = sex^2x - 1$	$1 = sex^2x - tan^2x$
$1 + cot^2x = csc^2x$	**Despejando**	$cot^2x = csc^2x - 1$	$1 = csc^2x - cot^2x$
Ángulo medio	$sen^2x = \frac{1 - cos2x}{2}$	$cos^2x = \frac{1 + cos2x}{2}$	$tan^2x = \frac{1 - cos2x}{1 + cos2x}$
Ángulo doble	$sen2x = 2senxcosx$	$cos2x = cos^2x - sen^2x$	$tan2x = \frac{2tanx}{1 - tan^2x}$
Ángulo opuesto	$sen(-x) = -senx$	$cos(-x) = cosx$	$tan(-x) = -tanx$
Ángulo opuesto	$csc(-x) = -cscx$	$sec(-x) = secx$	$cot(-x) = -cotx$

Tabla 1. Identidades trigonométricas

Ahora vamos a repasar derivadas. Recuerda que una derivada se puede resolver utilizando el concepto de límite, pero como ya viste la asignatura cálculo diferencial y aprendiste a derivar utilizando el concepto de límite y nuestro interés es sólo derivar de forma correcta, vamos a utilizar la siguiente tabla que contiene las derivadas básicas, la regla de la suma y de la diferencia, la regla del producto y la regla del cociente, además las derivadas de las funciones hiperbólicas las cuales vamos a utilizar cuando resolvamos ED de orden superior.

Tabla de derivadas			
$\frac{d}{dx}[c] = 0$	$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}[senx] = cosx$	$\frac{d}{dx}[secx] = secxtanx$
$\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$	$\frac{d}{dx}[cosx] = -senx$	$\frac{d}{dx}[cscx] = -cscxcotx$
$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$	$\frac{d}{dx}[tanx] = sec^2x$	$\frac{d}{dx}[cotx] = -csc^2x$	$\frac{d}{dx}[sen^{-1}x] = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\frac{d}{dx}[ln\|x\|] = \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x\ln\|a\|$	$\frac{d}{dx}[tan^{-1}x] = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}[cos^{-1}x] = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$
Derivada de una suma	$\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$	**Derivada de un producto**	$\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$
Derivada de un cociente	$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$	$\frac{d}{dx}[tanhx] = -sech^2x$	$\frac{d}{dx}[cschx] = -cschxcothx$
$\frac{d}{dx}[senhx] = coshx$	$\frac{d}{dx}[coshx] = senhx$	$\frac{d}{dx}[cothx] = -csch^2x$	$\frac{d}{dx}[sechx] = -sechxtanhx$

Tabla 2. Derivadas

En la siguiente escena interactiva, resuelve los ejercicios propuestos que corresponden a la derivada de la suma y la diferencia de funciones.

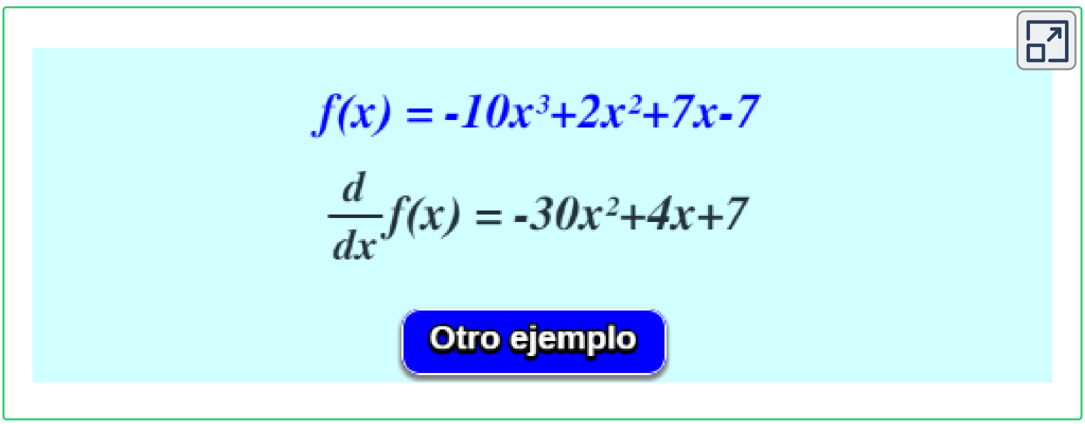
Para comenzar debes recordar las siguientes propiedades

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = u' \pm v'$$

$$\frac{d}{dx}(x)^n = nx^{n-1}$$

Debes resolver en tu cuaderno o libreta de apuntes cada ejercicio y después verificar que tu solución corresponda con la de cada ejemplo, luego da click en el botón otro ejemplo para resolver más ejercicios hasta que consideres que ya recuerdas bien el concepto de derivada.

En la siguiente escena interactiva, Que se encuentra en la página 112 del libro [Cálculo diferencial interactivo](), podrás repasar derivadas de polinomios

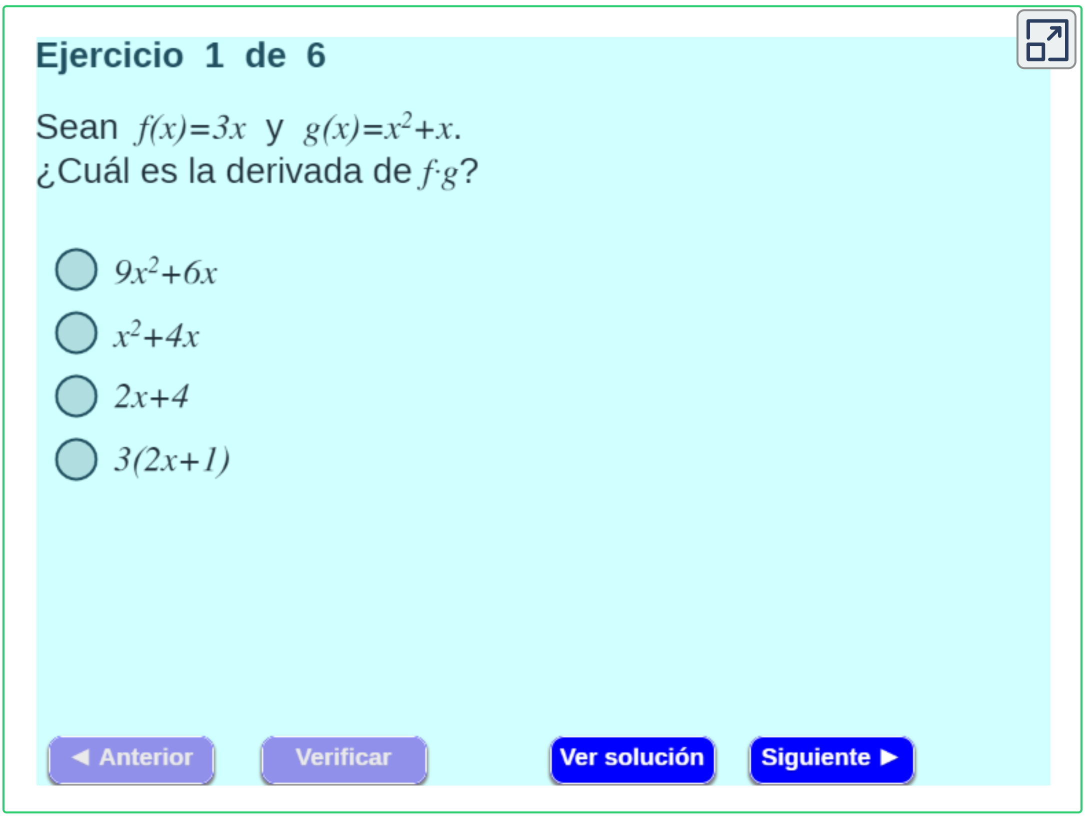


En la siguiente escena interactiva, resuelve los ejercicios propuestos que corresponden a la derivada de un producto.

Selecciona la opción apropiada y dale verificar. Si deseas ver el paso a paso, pulsa el botón **Ver solución**. Luego selecciona siguiente para ver otro ejercicio

Recuerda que es muy importante derivar los productos de forma adecuada para verificar soluciones de ecuaciones diferenciales tanto de primer orden, como las de orden superior que se verán en el próximo capítulo.

En la siguiente escena interactiva, que se encuentra en la página 120 del libro [Cálculo diferencial interactivo](), podrás repasar derivadas de un producto



En la siguiente escena interactiva, resuelve los ejercicios propuestos que corresponden a la derivada de un cociente, verifica que tu solución corresponda con la de cada ejercicio, luego selecciona siguiente para ver otro ejemplo.

Cuando se deriva un cociente es muy importante tener en cuenta el orden de la derivada. La fórmula de la derivada del producto y del cociente las encuentras en la tabla de la página 45

En la siguiente escena interactiva, que se encuentra en la página 119 del libro [Cálculo diferencial interactivo], podrás repasar derivadas de un cociente

Ejemplo 1 de 5

Calcular la derivada de $f(x)=\frac{1}{x^3}$

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\frac{1}{x^3}$$

$$=\frac{(\frac{d}{dx}1)x^3-(\frac{d}{dx}x^3)\cdot 1}{(x^3)^2}$$

$$=\frac{0\cdot x^3-3x^2\cdot 1}{x^6}=\frac{-3x^2}{x^6}=-\frac{3}{x^3}$$

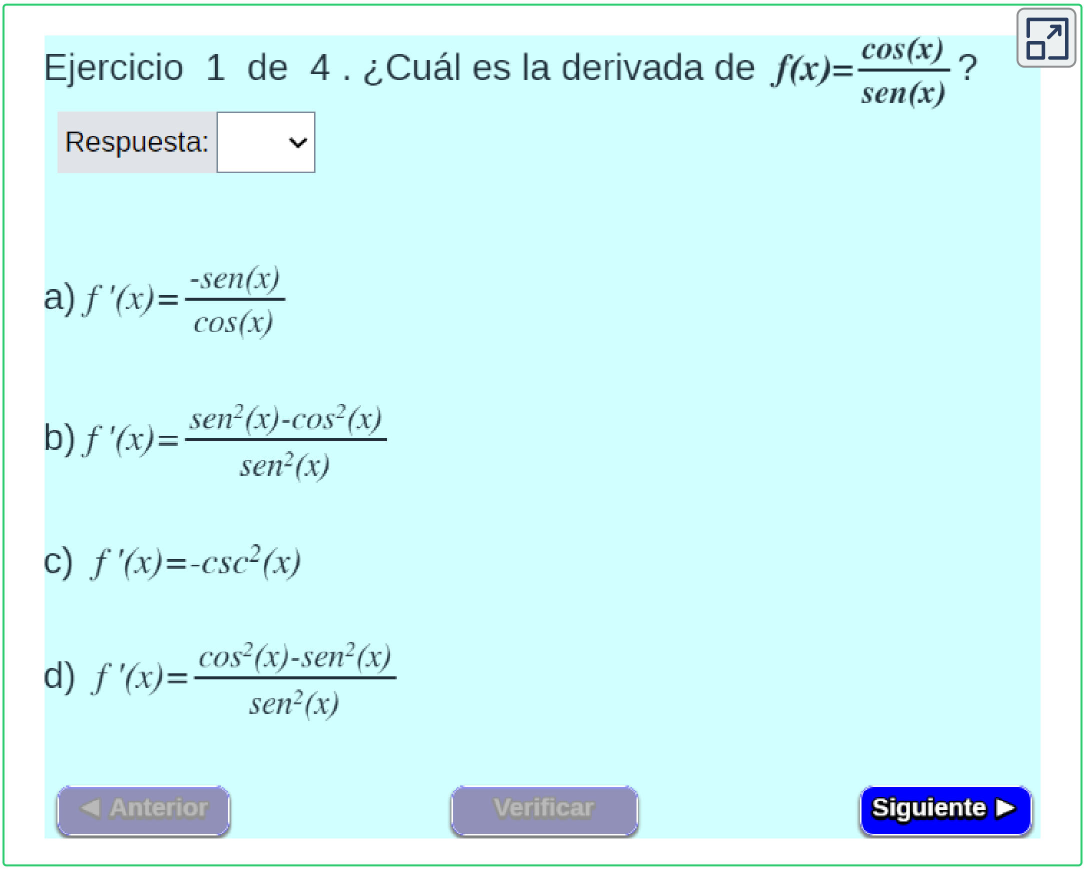
◄ Anterior

Siguiente ►

En la siguiente escena interactiva, resuelve cada ejercicio y selecciona la respuesta correcta, dale verificar para comprobar si es correcta, luego selecciona siguiente para ver otro ejercicio.

Podrás comprobar tu destreza para derivar un cociente en el cual hay polinomios, funciones trigonométricas, logaritmos y exponenciales.

En la siguiente escena interactiva, que se encuentra en la página 124 del libro [Cálculo diferencial interactivo], podrás repasar derivadas de un cociente

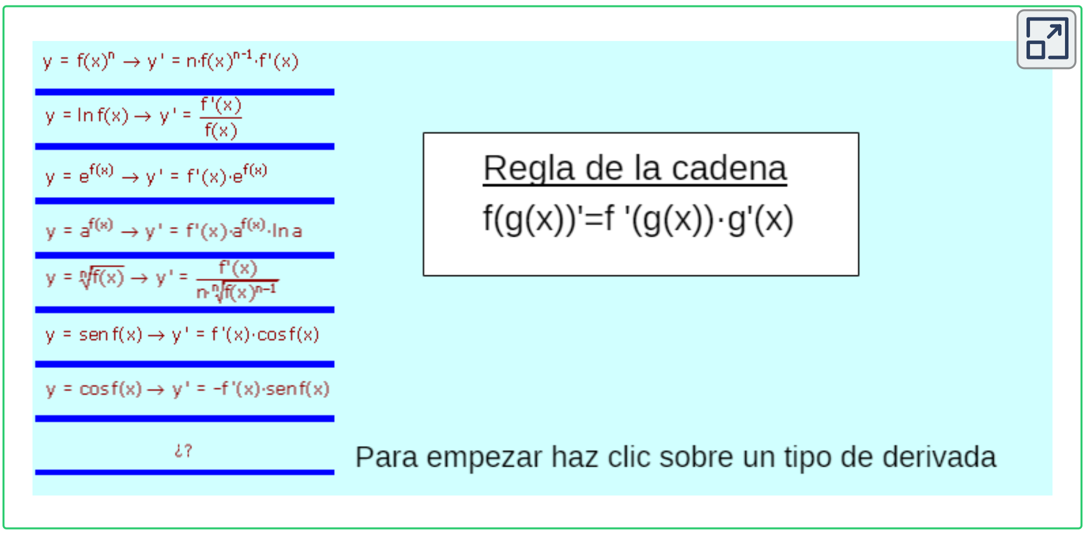


Los siguientes ejercicios fueron diseñados por Miguel Ángel Cabezón Ochoa. En esta escena interactiva puedes realizar ejercicios aplicando regla de la cadena con diferentes funciones. Selecciona el tipo de derivada a practicar, haciendo clic en una de las opciones de la columna izquierda. La última opción muestra diferentes funciones de forma aleatoria.

Tienes a disposición una gran cantidad de ejercicios. Te sugerimos realizarlos en tu cuaderno o libreta de apuntes, cuando hayas terminado puedes verificarlos con la solución del interactivo.

Así que mucho ánimo y ponte a practicar.

En la siguiente escena interactiva, que se encuentra en la página 132 del libro Cálculo diferencial interactivo, podrás repasar derivadas utilizando regla de la cadena



Practiquemos

En la siguiente escena interactiva, adaptada de [Plantillas con descartes_JS](), encontrarás una sopa de letras con 10 palabras relacionadas a las definiciones que acabas de estudiar en las páginas anteriores sobre clasificación de las ecuaciones diferenciales, tipos de soluciones y problemas de valor inicial entre otros. Recuerda que es muy importante comprender bien los conceptos teóricos para resolver de forma adecuada los ejercicios.

1.6.1 Ejercicios y respuestas del capítulo 1

Ejercicios de repaso Capítulo 1

En los ejercicios 1 a 20, Compruebe si la función indicada es una solución o no de la E.D. dada.

1. $y = e^{\frac{x}{2}}$ de $2y' + y = 0$

2. $y = e^{3x} + 10e^{2x}$ de $\dfrac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}$

3. $y = x \ln|x|$ de $y' - \dfrac{1}{x}y = 1$

4. $y = 5tan5x$ de $y' = 25 + y^2$

5. $y = \dfrac{senx}{3x}$ de $xy' + y = cosx$

6. $y = \dfrac{-3}{3x+2}$ de $y' = 3y^2$

7. $y - \dfrac{1}{cosx} = 0$ de $y' - ytanx = 0$

Respuestas

Capítulo 2

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

2.1 Ecuaciones de variables separables

Definición: se dice que una E.D. de primer orden de la forma $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$ es separable o que tiene variables separables.

Método de solución La solución de la ED es de la forma

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c$$

Nota: No es necesario emplear dos constantes de integración al resolver la ED, porque si escribimos $\int h(y)dy + c_1 = \int g(x)dx + c_2$ la diferencia entre $c_2 - c_1$ da como resultado una constante c

Ejemplo 1: Solución de una ED separable

Resolver la ED $\quad xsenxe^{-y}dx - ydy = 0$

Solución

$x\ senx\ e^{-y}dx - y\ dy = 0 \quad$ Primero debemos tener un diferencial a cada lado de la ecuación

$x\ senx\ e^{-y} dx = y\ dy$ Ahora separamos variables

$x\ senx\ dx = \dfrac{y}{e^{-y}} dy$ Pasamos Euler al numerador aplicando propiedades de potenciación

$x\ senx\ dx$ = $y\ e^{y}\ dy$ Los diferenciales indican que se debe integrar

$\int x\ senx\ dx$ = $\int y\ e^{y}\ dy$ Ahora se integra cada lado aplicando integración por partes

$\int x\ senx\ dx$

$u = x \qquad dv = senxdx$

$du = dx \qquad v = -cosx$

$\int x\ senx\ dx = -x\ cosx + senx + c$

$\int y\ e^{y}\ dy$

$u = y \qquad dv = e^{y} dy$

$du = dy \qquad v = e^{y}$

$\int y\ e^{y}\ dy = y\ e^{-y} - e^{-y}$ Uniendo los resultados de las dos integrales obtenemos la solución de la ED

$-x\ cosx + senx + c$ = $y\ e^{-y} - e^{-y}$

Factorizando obtenemos la solución implícita

$$e^{-y}\,(y-1) = -x\;cosx + senx + c$$

Ejemplo 2: Separando variables

Resolver la ED $\quad xtanxdx - ycosxdy = 0$

Solución

$$xtanxdx - ycosxdy = 0$$

Separamos variables

$$\frac{xtanx}{cosx}dx = ydy$$

La integral no es por sustitución, entonces se debe aplicar identidades para integrar por sustitución.

Recuerde que $tanx = \dfrac{senx}{cosx}$

$$x\frac{senx}{cos^2x}dx = ydy$$

Los diferenciales indican que se debe integrar

$$\int x\frac{senx}{cos^2x}dx = \int ydy$$

La integral del lado izquierdo es por partes, primero integramos el dv

$$\int \frac{senx}{cos^2x}dx \qquad u = cosx \qquad du = -senxdx$$

$$-\int \frac{du}{u^2} = -\int u^{-2}du = \frac{1}{u} = \frac{1}{cosx} = secx$$

$$\int x\frac{senx}{cos^2x}dx \qquad u = x \qquad dv = \frac{senx}{cos^2x}$$

$$du = dx \qquad v = secx$$

$$\int x\frac{senx}{cos^2x} = xsecx - \int secxdx$$

Organizando la integral

$xsecx - \int secx = \int ydy$

Integrando a ambos lados obtenemos la solución general

Nota La integral de secante está en la tabla de la página 70

$$xsecx - \ln|secx + tanx| + c = \frac{y^2}{2}$$

Despejando la y obtenemos la solución explícita

$$y = \sqrt{2x\sec x - 2\ln|\sec x + \tan x| + c}$$

Recuerde que $2c = c$

Ejemplo 3: Quitando logaritmos

Resolver la ED $\quad x\dfrac{dy}{dx} = 4y$

Solución

Antes de resolver la ED es importante anotar que cuando sea posible se deben quitar los logaritmos

$$x\frac{dy}{dx} = 4y$$

Subimos el diferencial

$$xdy = 4ydx$$

Separamos variables

$$\frac{dy}{y} = 4\frac{dx}{x}$$

Los diferenciales indican que se debe integrar

$$\int \frac{dy}{y} = 4\int \frac{dx}{x}$$

Integrando obtenemos

$$\ln|y| = 4\ln|x| + c$$

Aplicamos la propiedad de logaritmos $c\ln|A| = \ln|A|^c$

$$\ln|y| = \ln|x|^4 + c$$

Recuerde que $e^{\ln|x|} = x$

$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|^4 + c}$

Aplicando propiedades de potenciación

$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|^4} \cdot e^{c}$

Teniendo en la cuenta que $a^m.a^m = a^{m+n} \;\wedge\; e^c = c$

Obtenemos la solución explícita

$$y = cx^4$$

Ejemplo 4: Problema de valor inicial

Resolver el PVI $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ Sujeto a la condición $y(4) = 3$

Solución

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

Recuerde que para integrar no pueden haber diferenciales en el denominador.

$y\ dy = -x\ dx$

Los diferenciales indican que se debe integrar

$\int y\ dy = -\int x\ dx$

Integrando obtenemos

$\dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2} + c$ despejando la constante

$\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} = c$ Simplificando

$y^2 \ + x^2 = c$ Reemplazando condiciones iniciales

$3^2 \ + 4^2 = c$ El valor de la c

$c = 25$ La solución particular es

Nota: Al multiplicar 2 por una constante c el resultado es c

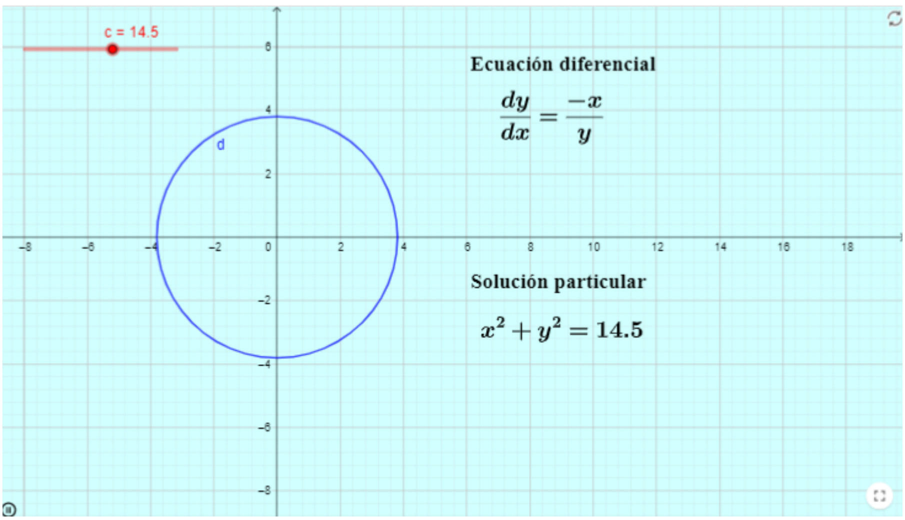
$$y^2 \ + x^2 = 25$$

En el ejemplo anterior solucionamos una ecuación diferencial por variables separables y en la solución general reemplazamos las condiciones iniciales para hallar el valor de la c y obtener una solución particular. noten que el valor del parámetro "c" varía de acuerdo a las condiciones iniciales

La ecuación del ejemplo 4 la vamos a graficar en la siguiente escena interactiva teniendo en la cuenta el PVI y podrás observar cómo cambia la gráfica al cambiar el valor del parámetro. La c varía desde 0.1 hasta 25

Las ED al igual que las ecuaciones algebraicas se pueden graficar en el plano cartesiano, algunas ED son muy sencillas de graficar, pero hay otras muy complejas.

En la siguiente escena interactiva, diseñada por [Jorge Olivares Funes](), podrás ver cómo cambia la gráfica del ejemplo 4 al cambiar el valor del parámetro. Al resolver la ED el parámetro se convierte en el radio de la circunferencia.



Ejemplo 5: Problema de valor inicial

Resolver la ED $$\frac{dy}{dx} = -2y$$

Sujeta a la condición $y(0) = -5$

Solución

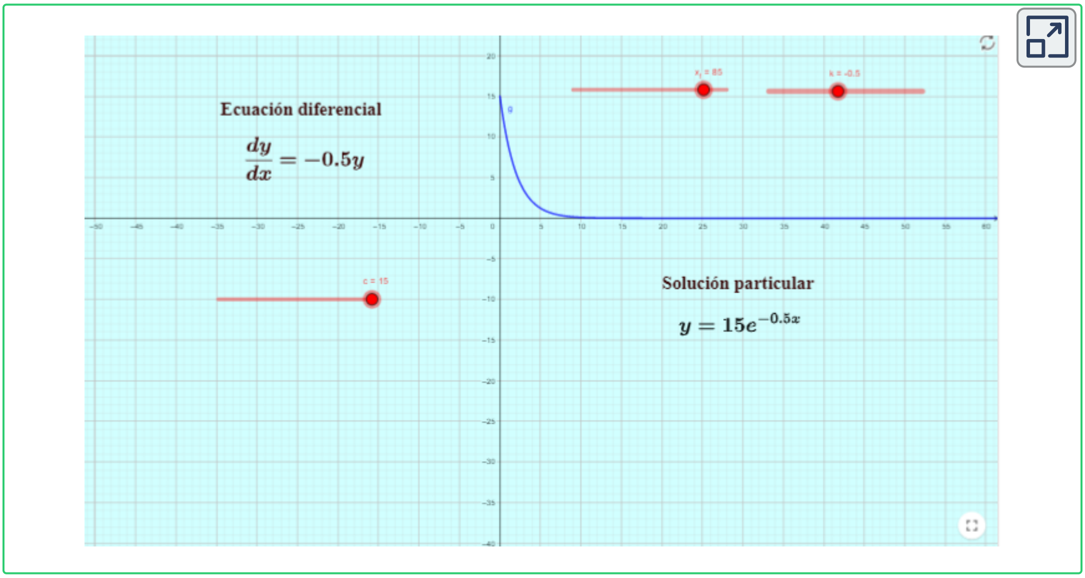
$\dfrac{dy}{dx} = -2y$	Separando variables
$\dfrac{dy}{y} = -2dx$	Los diferenciales indican que hay que integrar
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$	Integrando obtenemos
$\ln\|y\| = -2x + c$	Quitando el logaritmo
$y = ce^{-2x}$	Reemplazando condiciones iniciales
$-5 = ce^{0}$	El valor del parámetro es
$c = -5$	La solución particular es

$$y = -5e^{-2x}$$

En la siguiente escena interactiva puedes ver la gráfica del ejemplo 4. Podrás ver en la escena interactiva, cómo cambia la gráfica de la ED al cambiar el valor del parámetro en un intervalo de $[-15, 15]$, el valor de la x lo puedes cambiar de $[0, 100]$ y el valor de la k lo puedes cambiar de $[-5, 5]$

Al interactuar con los deslizadores podrás observar cómo cambia la gráfica, también podrás observar la ecuación diferencial y veras la solución particular de dicha ecuación

En la siguiente escena interactiva, diseñada por [Jorge Olivares Funes](), podrás ver cómo cambia la gráfica del ejemplo 4 al cambiar el valor de la constante.

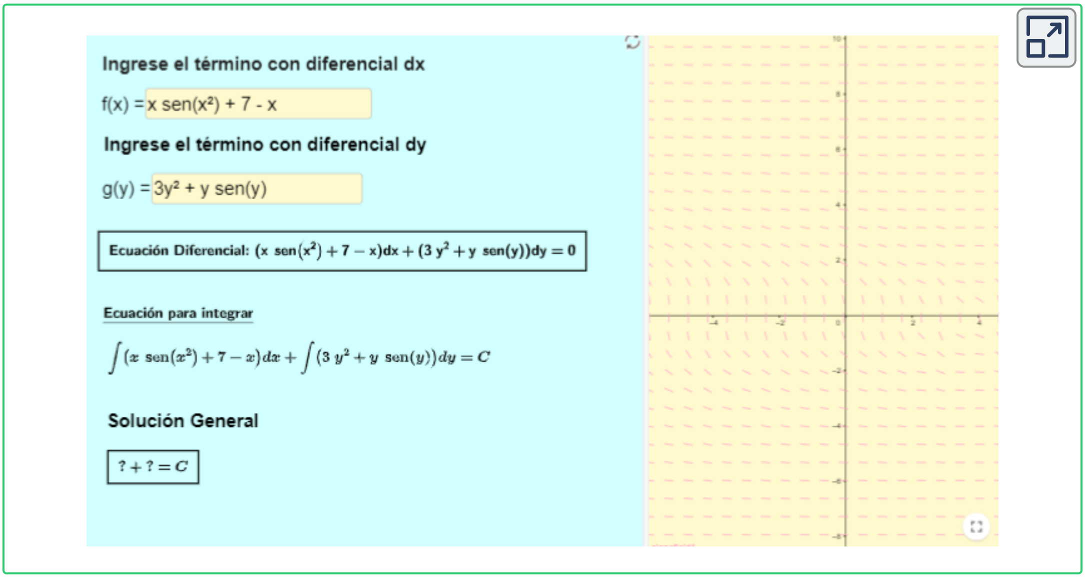


En las siguientes dos escenas interactiva podrás resolver ED por variables separables, en la primera debes tener en cuenta que el resultado se da con el parámetro despejado.

En la primera escena interactiva debes ingresar la función $f(x)$ (función con términos en la variable x) en la primera entrada y la función $g(y)$ (función con términos en la variable y) en la segunda entrada, luego vas a ver la ED igualada a cero y la solución genberal

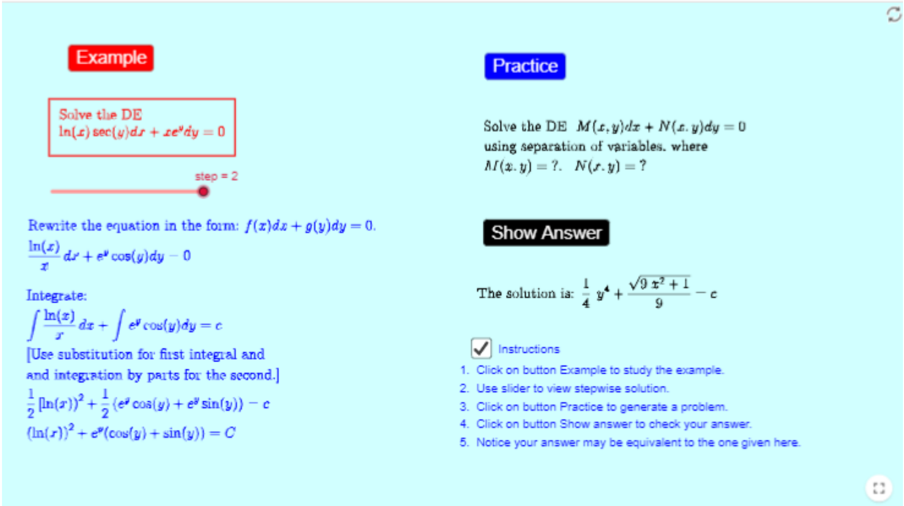
En la segunda escena interactiva encuentras una ED resuelta en dos pasos, los pasos los puedes ver interactuando con el deslizador, luego puedes practicar con diferentes ED cada una con su respectiva respuesta.

En la siguiente escena interactiva, diseñada por [Ravinder Kumar](), podrás resolver ED por variables separables y visualizar su gráfica.



En la siguiente escena interactiva, diseñada por [Ravinder Kumar](), podrás resolver ED por variables separables. Con el botón "Practice" podrás ver diferentes ejercicios y con el botón "Show" visualizarás el resultado.

En el vídeo podrás observar un ejemplo de ecuaciones diferenciales por variables separables.



En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de variables separables.

2.1.1 Tabla de Integrales

Como acabas de ver en los contenidos vistos hasta ahora es muy importante que manejes bien las integrales, por eso a continuación encontrarás una tabla con algunas de las integrales que encontrarás en los diferentes ecuaciones diferenciales que tendrás que resolver en este libro tanto en la segunda unidad como en las posteriores.

A continuación encontrarás una tabla con integrales para que uses al resolver ejercicios.

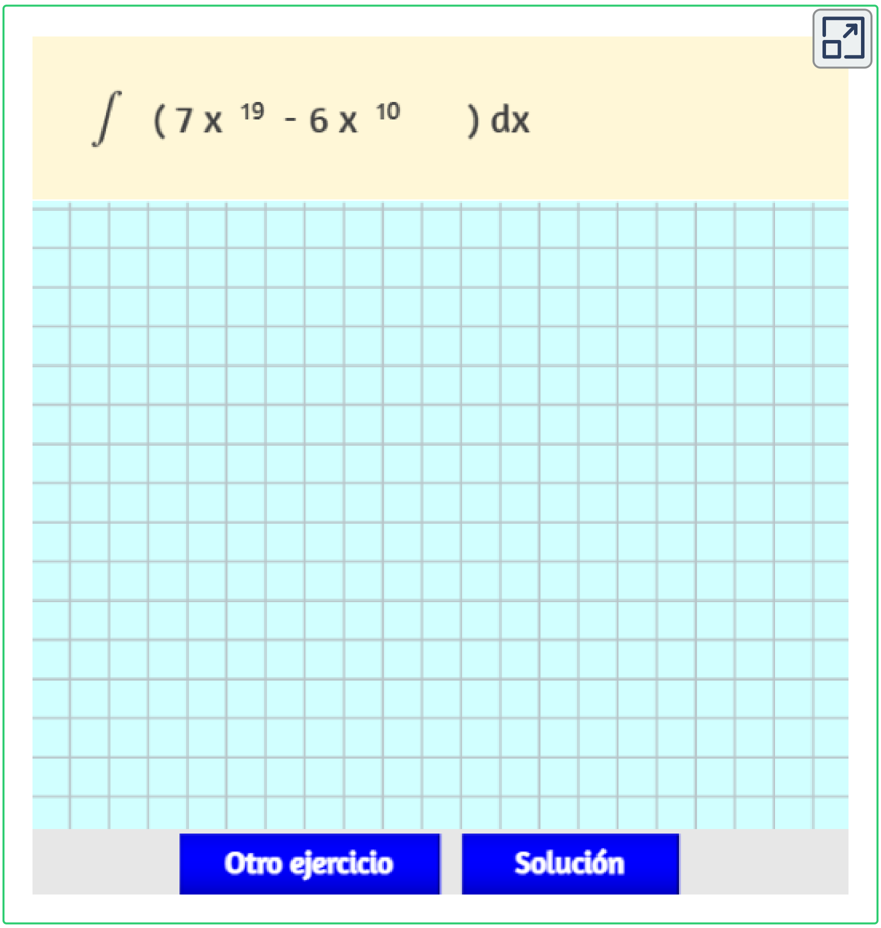
Tabla de integrales	
1. $\int senx\, dx = -cosx + c$	2. $\int cosx\, dx = senx + c$
3. $\int secxtanx\, dx = secx + c$	4. $\int cscxcotx\, dx = -cscx + c$
5. $\int sec^2x\, dx = tanx + c$	6. $\int csc^2x\, dx = -cotx + c$
7. $\int secx\, dx = \ln\lvert secx + tanx\rvert + c$	8. $\int cscx\, dx = \ln\lvert cscx - cotx\rvert + c$
9. $\int ln\lvert x\rvert\, dx = xln\lvert x\rvert - x + c$	10. $\int \frac{1}{xln\lvert x\rvert} = ln\left\lvert ln\lvert x\rvert\right\rvert - x + c$
11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = sen^{-1}\frac{u}{a} + c$	12. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}tan^{-1}\frac{u}{a} + c$
13. $\int tan^2x\, dx = tanx - x + c$	14. $\int cot^2x\, dx = -cotx - x + c$
15. $\int sen^2x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen2x + c$	16. $\int cos^2x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sen2x + c$
17. $\int sen^3x\, dx = -\frac{1}{3}(2 + sen^2x)cosx + c$	18. $\int cos^3x\, dx = \frac{1}{3}(2 + cos^2x)senx + c$
19. $\int xsenx\, dx = senx - xcosx + c$	20. $\int xcosx\, dx = cosx - xsenx + c$
21, $\int e^{ax}cosbx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(acosbx + bsenbx) + c$	
22. $\int e^{ax}senbx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(asenbx - bcosbx) + c$	

Tabla 3. Integrales

2.1.2 Repasando integrales

Como acabas de ver para resolver ED es muy importante que manejes bien las diferentes técnicas de integración, por eso vamos a repasar un poco integrales, si ya los manejas bien, pasa directamente a la página 76 para resolver ED por variables separables.

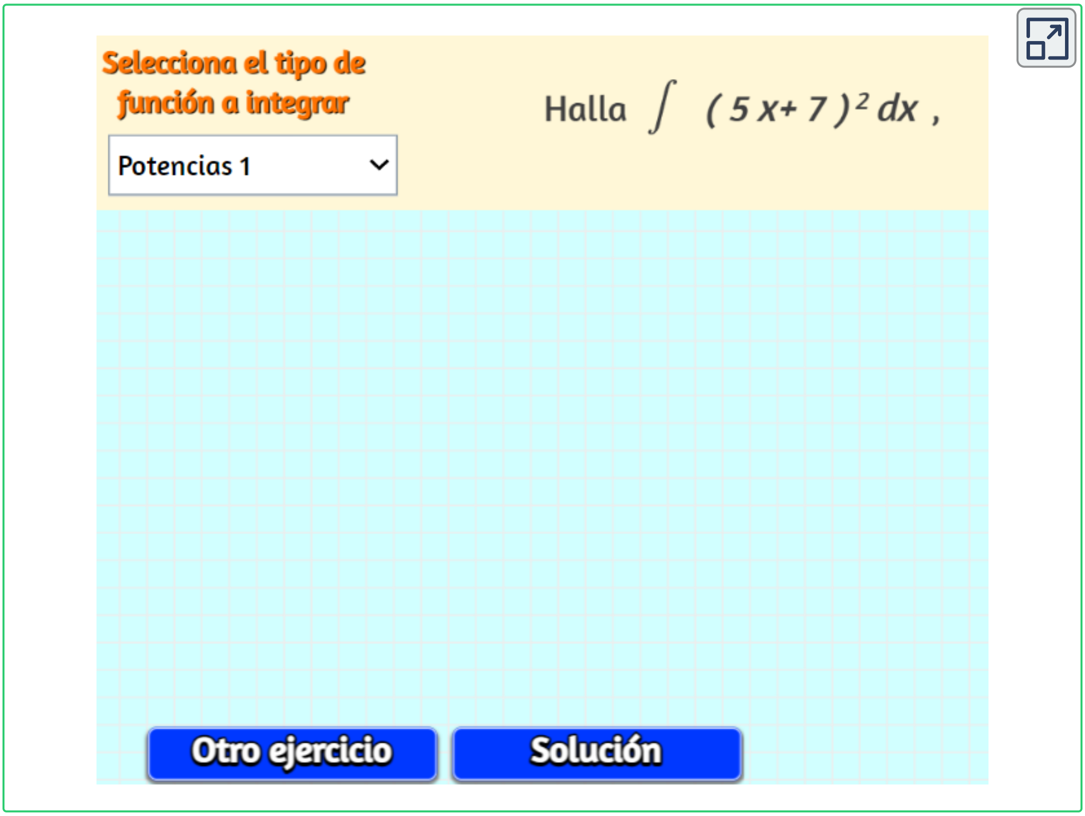
En la siguiente escena interactiva, que se encuentra en la página 40 del libro [Integrando con Paco](), podrás repasar integrales directas



En la siguiente escena interactiva vamos a resolver integrales por sustitución, recuerda que si una integral no es directa, se debe examinar si una función es la derivada de la otra, para llevarla a la forma $\int f(u)du$

Puedes escoger el tipo de integral que quieres resolver, luego hazlo en tu cuaderno y verifica tu respuesta, luego da clikc en el botón otro ejercicio para realizar uno diferente.

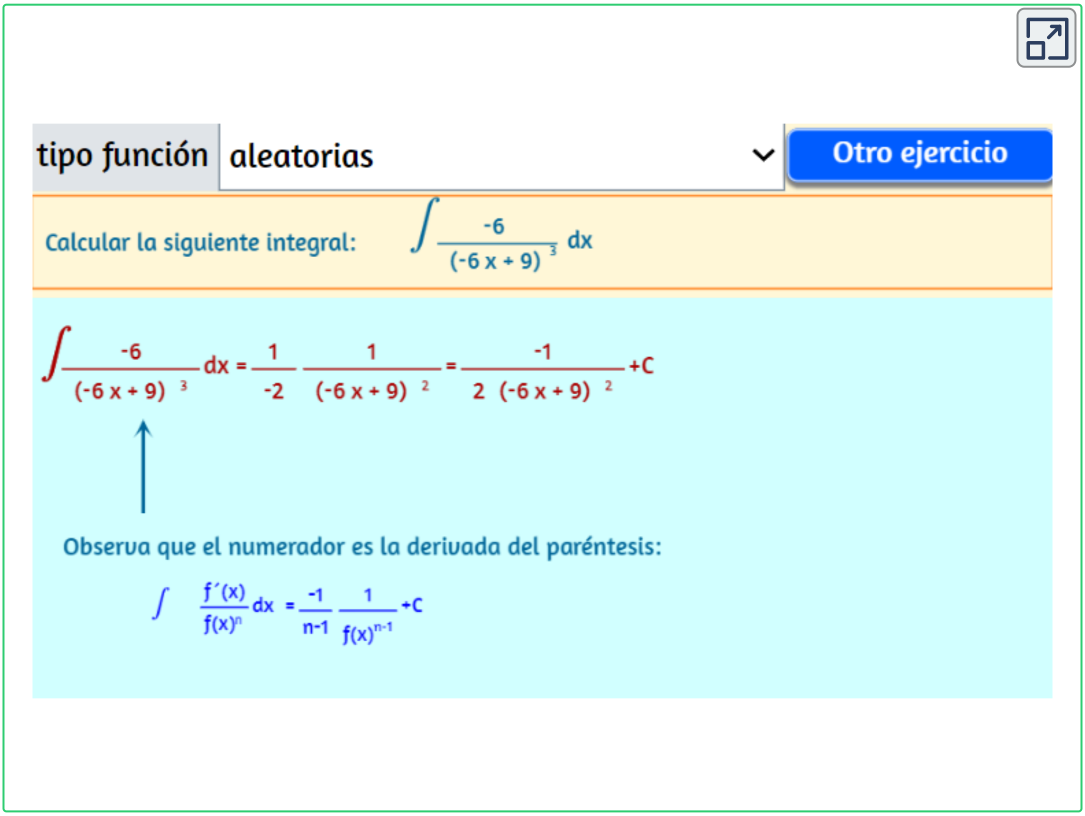
En la siguiente escena interactiva, que se encuentra en la página 77 del libro [Integrando con Paco](), podrás repasar integrales por sustitución



La única forma de volverse experto en algún contenido, es practicando, y esto se logra resolviendo muchos ejercicios, por eso aquí tienes más integrales que se resuelven por sustitución para que sigas practicando en caso de que todavía tengas dificultad con dichas integrales.

Puedes escoger el tipo de integral que quieres resolver, luego hazlo en tu cuaderno y verifica tu respuesta, luego da clikc en el botón otro ejercicio para realizar uno diferente.

En la siguiente escena interactiva, que se encuentra en la página 70 del libro [Integrando con Paco](), podrás repasar integrales por partes



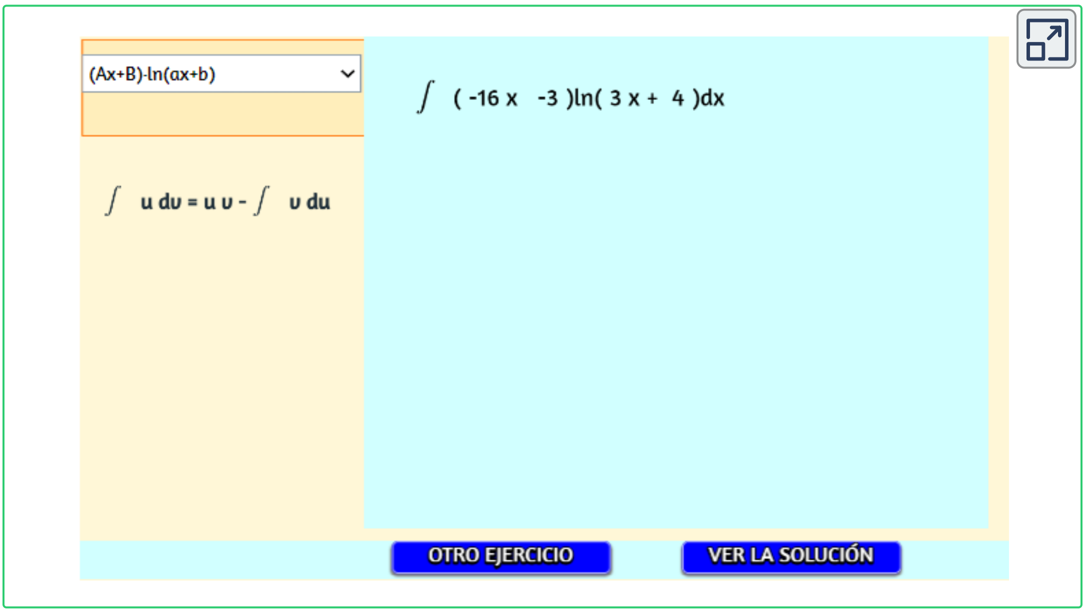
Cuando una integral no es directa, ni por sustitución, se verifica si es por partes. En la siguiente escena interactiva vamos a resolver integrales utilizando integración por partes

Puedes escoger el tipo de integral que quieres resolver, luego hazlo en tu cuaderno y verifica tu respuesta, luego da clikc en el botón otro ejercicio para realizar uno diferente.

Aquí encontrarás combinaciones de: algebraicas con exponencial, con logaritmo natural y con coseno; integrales logarítmicas y coseno con exponencial, las cuales son cíclicas.

Recuerda la fórmula de integración por partes $\int udv = uv - \int vdu$

En la siguiente escena interactiva, que se encuentra en la página 106 del libro [Integrando con Paco](), podrás repasar integrales por partes



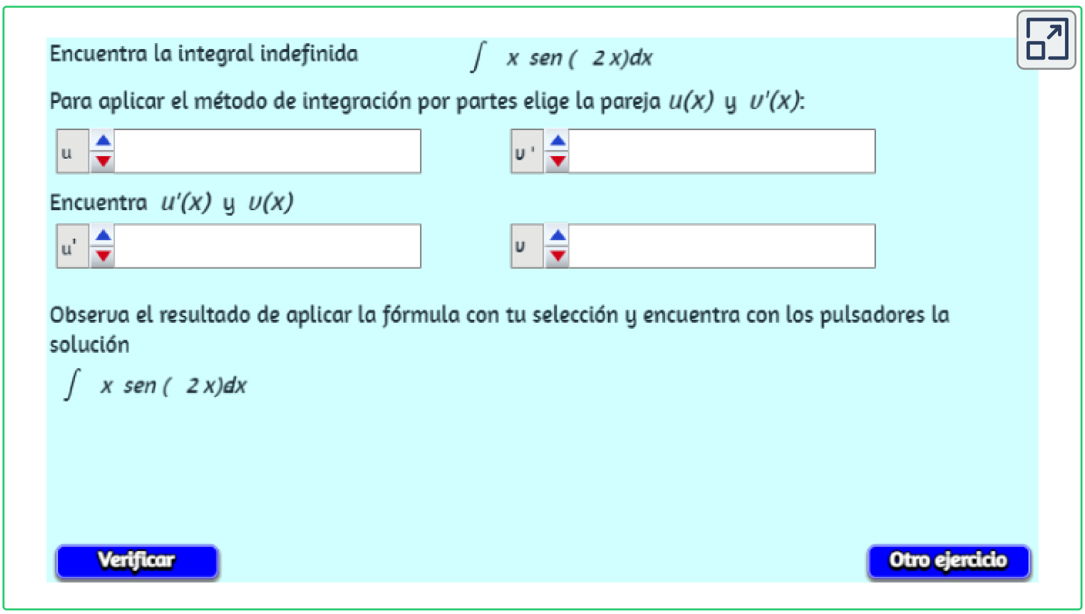
La técnica de integración por partes, fuera de que es muy utilizada, a veces presenta alguna complicación al momento de iniciar a resolverla, por eso aquí encontrarás otra escena interactiva muy amigable para que sigas repasando dicha integral

Puedes escoger el tipo de integral que quieres resolver, identificas $u \wedge dv$, luego buscas con los botones la respectiva derivada e integral, armas la solución y le das verificar para comprobar la respuesta.

Aquí encontrarás combinaciones diferentes a las vistas en la escena interactiva anterior.

Recuerda la fórmula de integración por partes $\int udv = uv - \int vdu$

En la siguiente escena interactiva, que se encuentra en la página 105 del libro [Integrando con Paco](), podrás repasar integrales directas



2.1.3 Ejercicios y respuestas de la sección 2.1

Ejercicios de repaso sección 2.1

Resolver las ecuaciones diferenciales por variables separables.

1. $dx - x^2 dy = 0$

2. $dx + e^{3x} dy = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{x^2}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+1}{x}$

6. $(1+x)dy - ydx = 0$

7. $e^x \dfrac{dy}{dx} = 2x$

8. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x^2 y^2}{1+x}$

9. $xy^4 dx + (y^2+2)e^{-3x} dy = 0$

10. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$ Sujeta a $y(0) = 5$

Respuestas

2.2 Ecuaciones lineales

Definición: una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad \text{(E1)}$$

se dice que es una ecuación lineal en la variable dependiente y

Se dice que la ecuación lineal es homogénea cuando $g(x) = 0$; si no es no homogénea.

Al dividir ambos lados de la ecuación $(E1)$ por el coeficiente $a_1(x)$ se obtiene la ecuación

$$\frac{a_1(x)}{a_1(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

Donde $\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ lo vamos a llamar $p(x) \wedge \dfrac{g(x)}{a_1(x)}$ lo vamos a llamar $f(x)$

Reemplazando estos valores en la ecuación $(E1)$ obtenemos la ecuación que vamos a llamar **Forma estándar**

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

Esta ecuación tiene la propiedad de que su solución es la suma de dos soluciones

$$\boxed{y = y_c + y_p}$$

Donde y_c es una solución de la ecuación homogénea $\wedge$ y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea.

Método de solución

- Convertir la ecuación lineal $(E1)$ a la forma estándar.

- Identifique a $p(x)$ para determinar el factor integrante $e^{\int p(x)dx}$

- Multiplique la forma estándar por el factor integrante, inmediatamente la ecuación líneal se transforma en variables separables, por lo cual se debe integrar ambos lados de la ecuación.

Propiedad

Las ecuaciones lineales tienen la propiedad que el lado izquierdo de la ecuación resultante es la derivada del producto del factor integrante por la variable dependiente, esto es

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right] = e^{\int p(x)dx}f(x)$$

Reemplazando el factor integrante $e^{\int p(x)dx}$ por $F.I$ en la ecuación y despejando, llegamos a la ecuación.

$$F.Iy = \int F.If(x)dx$$

Cuando se aplica la propiedad, se resuelven de forma más sencilla las ecuaciones lineales, pues sólo se debe integrar el lado derecho de la ED.

Ejemplo 1: ED lineal homogénea

Resolver la ED $\quad \dfrac{dy}{dx} = -2y$

Solución Esta ED la resolvimos por variables separables, ejemplo 5, página 65. Ahora la vamos a resolver como una ecuación lineal.

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

Pasando $-2y$ al lado izquierdo de la ecuación nos queda una ED lineal homogénea.

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Como la ecuación está en forma estándar identificamos $p(x)$ y hallamos el factor integrante

$$p(x) = 2 \qquad F.I = e^{2x}$$

Multiplicando la forma estándar por el $F.I$

$$e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 0$$

Tenemos una ecuación de variables separables

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$$

Ahora integramos ambos lados de la ecuación

$$\ln|y| = -2x + c$$

Eliminando logaritmos llegamos a la solución

$$y = ce^{-2x}$$

Ejemplo 2: ED lineal no homogénea

Resolver la ED $\quad \dfrac{dy}{dx} = -2y + 10$

Solución Esta ED la resolvimos homogénea en el ejemplo 1. Ahora la vamos a resolver no homogénea, vamos a obtener la solución complementaria y_c del ejemplo anterior más la solución particular y_p asociada a la ED no homogénea.

$$\frac{dy}{dx} = -2y + 10$$

Pasando $-2y$ al lado izquierdo de la ecuación, obtenemos una ecuación lineal no homogénea.

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 10$$

ecuación en forma estándar, identificamos $p(x) \wedge$ y hallamos el F.I

$p(x) = 2 \qquad F.I = e^{2x}$ Multiplicando la forma estándar por el $F.I$

$$e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 10e^{2x}$$

Ahora tenemos una ecuación de variables separables.

$$e^{2x}\frac{dy}{dx} = -2e^{2x}y + 10e^{2x}$$

Sacando factor común para separar variables.

$$e^{2x}\frac{dy}{dx} = -2e^{2x}(y-5)$$

ahora pasamos el dx al lado derecho y separamos variables

$$\frac{dy}{y-5} = -2dx$$

Los diferenciales indican que hay que integrar ambos lados de la ED

$$\int \frac{dy}{y-5} = -2\int dx$$

Integrando

$$\ln|y-5| = -2x + c$$

Quitando el logaritmo

$$e^{\ln|y-5|} = e^{-2x+c}$$

La ecuación queda de la forma

$$y - 5 = ce^{-2x}$$

Despejando

$$y = 5 + ce^{-2x}$$

La respuesta contiene la solución complementaria $y_c = ce^{-2x}$ la cual obtuvimos en el ejemplo 1 y también la solución particular $y_p = 5$ que corresponde a la solución de la ED no homogénea, por lo cual la solución general es la suma de dos soluciones $y = y_c + y_p$

Cuando se resuelven ED lineales de primer orden, no es necesario hacer la distinción en la solución entre $y_c \ \wedge \ y_p$, pero cuando se resuelvan las ED de orden superior si es necesario, pues cada una se resuelve de forma diferente.

Otra forma de resolver una ED lineal es aplicando la propiedad

$$\boxed{F.Iy = \int F.If(x)dx}$$

Observe que al usar la propiedad sólo se debe integrar el lado derecho de la ecuación y luego despejar la variable dependiente y esto reduce las operaciones matemáticas para llegar a la solución de la ED.

Se debe llevar la ED a la forma estándar, identificar $p(x)$ para hallar el factor integrante. En lugar de multiplicar toda la forma estándar por el factor integrante para resolver la ecuación por variables separables, se aplica la propiedad $F.Iy = \int F.If(x)dx$

Vamos a resolver nuevamente el ejercicio anterior aplicando la propiedad

$e^{2x}y = \int 10e^{2x}dx$ Integrando

$e^{2x}y = 5e^{2x} + c$ Despejando y

$$y = \frac{5e^{2x}}{e^{2x}} + \frac{c}{e^{2x}}$$

La solución es

$$\boxed{y = 5 + ce^{-2x}}$$

Nota: Todas las ecuaciones diferenciales lineales se pueden resolver aplicando la propiedad $F.Iy = \int F.If(x)dx$. Observe que aplicando la propiedad se reduce el método de solución, pues sólo se debe integrar el lado derecho de la ecuación.

Ejemplo 3: ED lineal no homogénea

Resolver la ED $\quad x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 senx$

Solución Esta ED no está en forma estándar. Se debe dividir cada término por x para llevarla a la forma estándar.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x\ senx$$

Como la ecuación está en forma estándar identificamos $p(x)$ $\wedge$ hallamos el factor integrante.

$$p(x) = \frac{-1}{x} \qquad F.I = x^{-1}$$

Ahora aplicamos la propiedad para resolverla

$x^{-1}y = \int x^{-1}x \; senx dx$

Aplicando potenciación para unir términos semejantes.

$x^{-1}y = \int senx dx$

Integrando el lado derecho de la ecuación

$x^{-1}y = -cosx + c$

Despejamos la variable dependiente y

$$y = \frac{-cosx}{x^{-1}} + \frac{c}{x^{-1}}$$

La solución es

$$y = -x \; cosx + cx$$

Ejemplo 4: ED lineal no homogénea

Resolver la ED $\quad \dfrac{dy}{dx} + ny = e^{nx}$

Solución La ED está en forma estándar.

$$\frac{dy}{dx} + ny = e^{nx}$$

Como la ecuación está en forma estándar, identificamos $p(x)$ y hallamos el factor integrante

$p(x) = n \qquad F.I = e^{nx}$

Aplicamos la propiedad para resolver la ecuación lineal

$e^{nx}y = \int e^{nx}\ e^{nx}dx$

Ahora aplicamos potenciación para agrupar términos semejantes.

$e^{nx}y = \int e^{2nx}dx$

Integrando el lado derecho. Recuerde que esta integral es por sustitución donde $u = nx$

$$e^{nx}y = \frac{e^{2nx}}{2n} + c$$

Despejando la y

$$y = \frac{e^{2nx}}{2ne^{nx}} + \frac{c}{e^{nx}}$$

La solución es

$$\boxed{y = \frac{e^{nx}}{2n} + ce^{-nx}}$$

En la siguiente escena interactiva, podrás ver la gráfica del ejemplo 4, pero también podrás interactuar con los valores de n para visualizar diferentes ecuaciones diferenciales y observar cómo cambia la gráfica a medida que se cambia el valor de n o el valor del parámetro c, también podrás observar la solución particular para cada ED

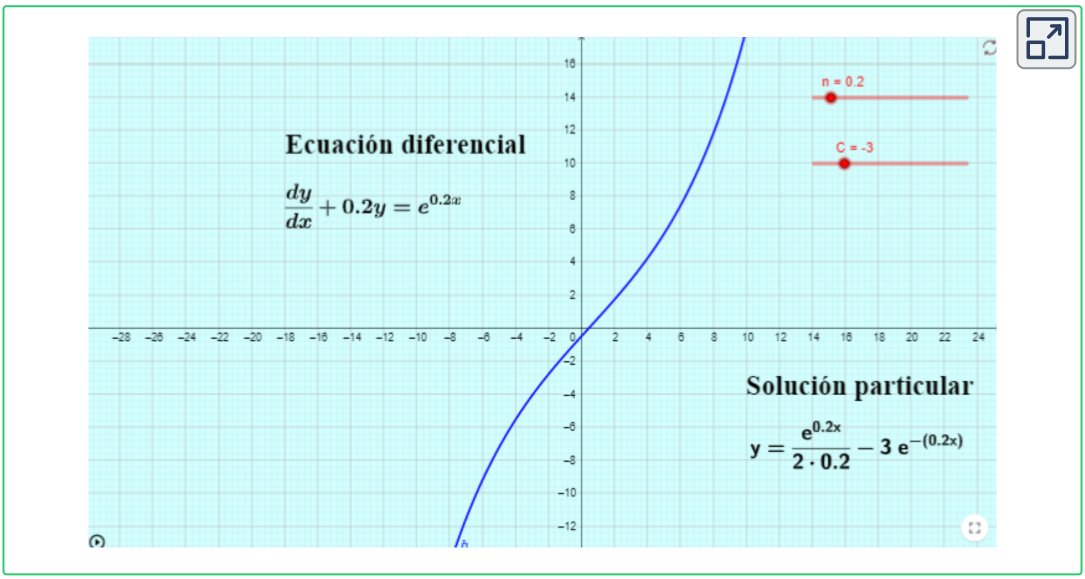
Al cambiar el valor de n en la escena interactiva, la gráfica varia en la inclinación de la curva

Al cambiar el valor de c en la escena interáctiva, cambia la forma de la gráfica

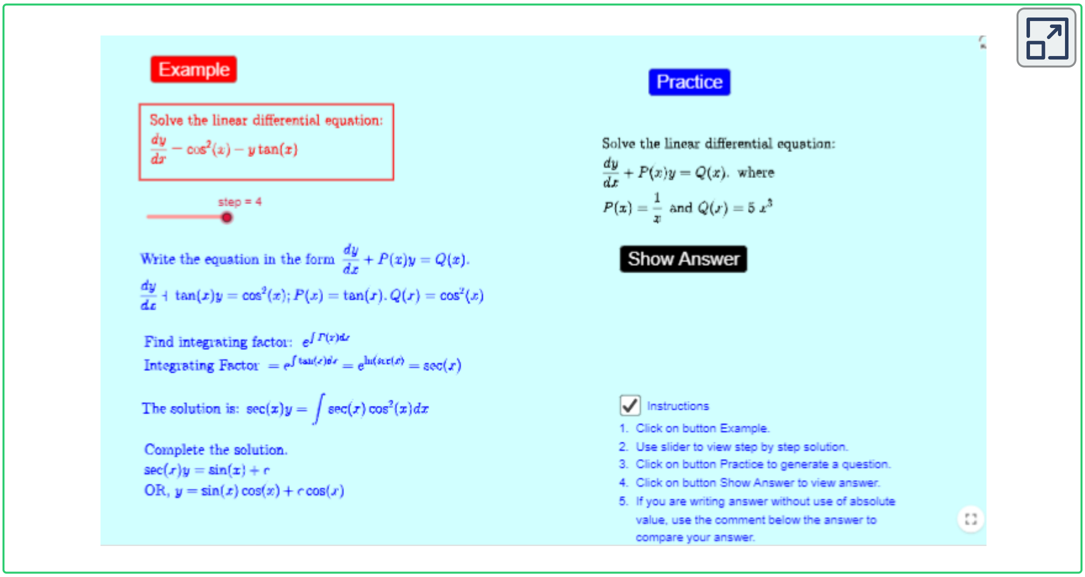
En la siguiente escena interactiva, diseñada por Jorge Olivares Funes, podrás ver cómo cambia la gráfica del ejemplo 4 al cambiar los valores de n y de la constante.

Es recomendable tomar tu cuaderno de apuntes y resolver varios ejercicios cuando cambies los valores de n o de c y luego compruebes tus resultados con los de la escena interactiva

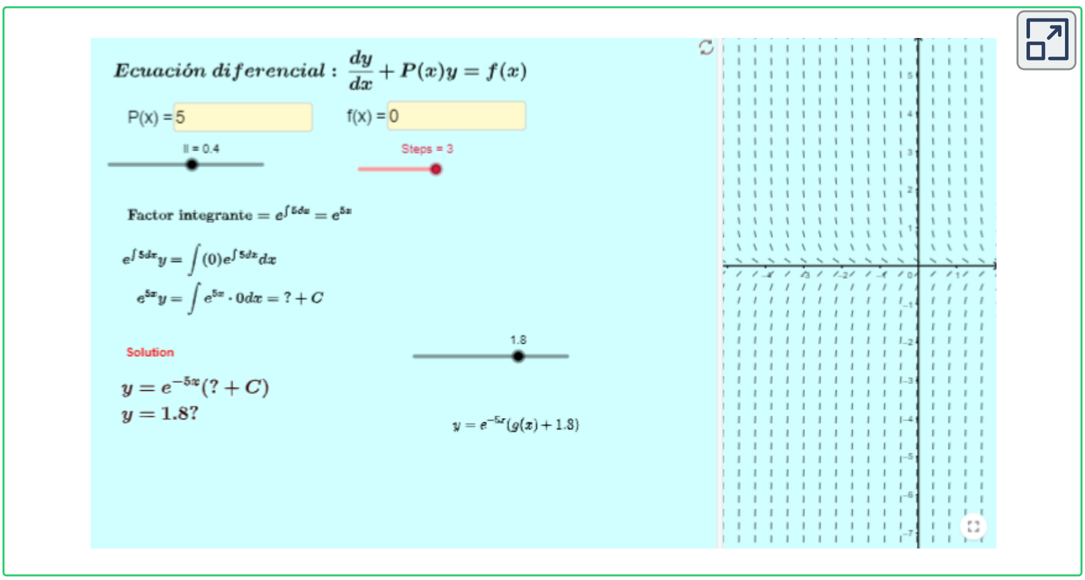
En la página siguiente encontrarás una escena donde puedes ingresar el $p(x)$ y el $f(x)$ para resolver diferentes ED



En la siguiente escena interactiva, diseñada por Ravinder Kumar, podrás Resolver ecuaciones lineales.

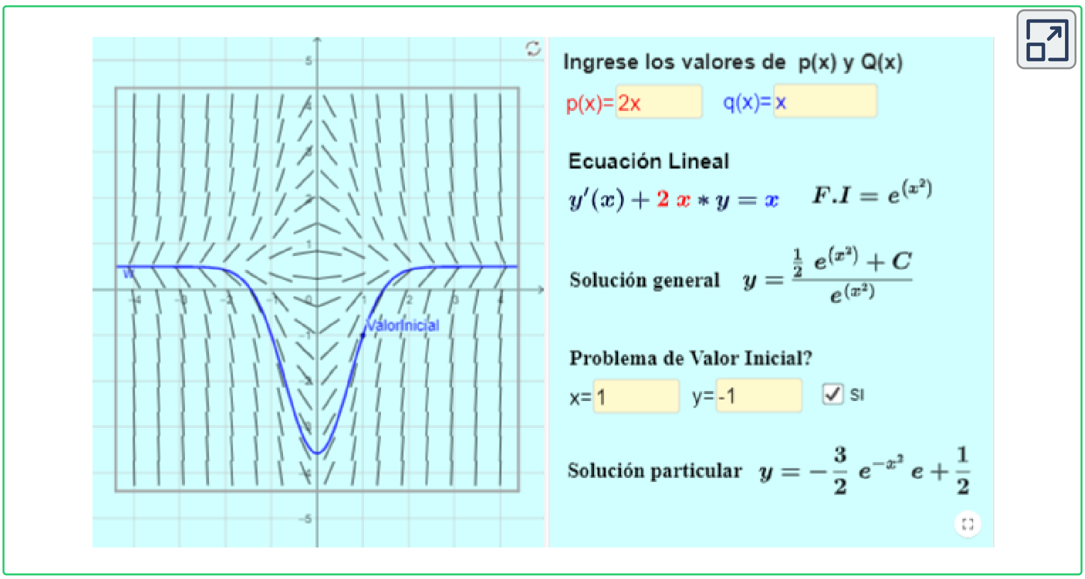


En la siguiente escena interactiva, diseñada por Ravinder Kumar, podrás Resolver ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas y visualizar su gráfica.



En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de ecuación lineal.

En la siguiente escena interactiva, diseñada por Diego Sandoval, podrás resolver ED lineales y visualizar su campo de direcciones.



2.2.1 Ejercicios y respuestas de la sección 2.2

Ejercicios de repaso sección 2.2

Resolver las ecuaciones diferenciales lineales.

1. $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 20$

2. $(x^2 - 9)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$

3. $2\dfrac{dy}{dx} + 10y = 1$

4. $x^2y^{'} + xy = 1$

5. $ydx - 4(x + y^6)dy = 0$

6. $\dfrac{dy}{dx} + (tanx)y = cos^2x$ Sujeta a $y(0) = -1$

7. $x\dfrac{dy}{dx} + (3x + 1)y = e^{-3x}$

8. $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$

9. $y^{'} + 3x^2y = x^2$

10. $y\dfrac{dx}{dy} - x = 2y^2$ Sujeta a $y(1) = 5$

Respuestas

2.3 Ecuaciones exactas

Definición: Una ED de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta en una región R del plano xy si corresponde a la diferencial de alguna función $f(x,y)$

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es una ecuación exacta si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta

Teorema. Criterio para una diferencial exacta: Sean continuas $M(x,y)dx \quad \wedge \quad N(x,y)dy$, con derivadas parciales continuas en una región rectangular R, definida por $a < x < b, c < y < d$. Entonces la condición necesaria y suficiente para que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ sea una diferencial exacta es que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Método de solución

- Dada una función de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se determina si es exacta. En caso afirmativo, existe una función para la cual

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$$

- Determinamos f si integramos $M(x, y)$ con respecto a x, manteniendo a y constante

$$\boxed{f(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) \quad (1)}$$

Donde $g(y)$ es la constante de integración.

- Luego derivamos la ecuación (1) con respecto a $y \wedge$ suponemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

- Por último integramos con respecto a $y \wedge$ sustituimos en la ecuación (1)

- La solución implícita de la ecuación es

$$\boxed{f(x, y) = c}$$

Es importante anotar que este método de solución se puede invertir comenzando con $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$ y el resultado es el mismo.

Ejemplo 1: ED exacta

Determinar si la ED $2y(y-1)dx + x(2y-1)dy = 0$ es exacta, si lo es resuélvala.

Solución

$$2y(y-1)dx + x(2y-1)dy = 0$$

Primero debemos aplicar la propiedad distributiva

$$(2y^2 - 2y)dx + (2xy - x)dy = 0$$

Determinamos si es exacta. Derivamos parcialmente M con respecto a y dejando x constante

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y - 2$$

Derivamos parcialmente N con respecto a x dejando y constante

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y - 1$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

Podemos concluir que la ED no es exacta, por tanto, no hay que resolverla

Ejemplo 2: ED exacta

Determinar si la ED $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ es exacta, si lo es resuélvala.

Solución

$$2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$$

Determinamos si es exacta. Derivamos parcialmente M con respecto a y dejando x constante

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

Derivamos parcialmente N con respecto a x dejando y constante

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, entonces, la ecuación es exacta.

$$2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$$

Asumimos $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$.

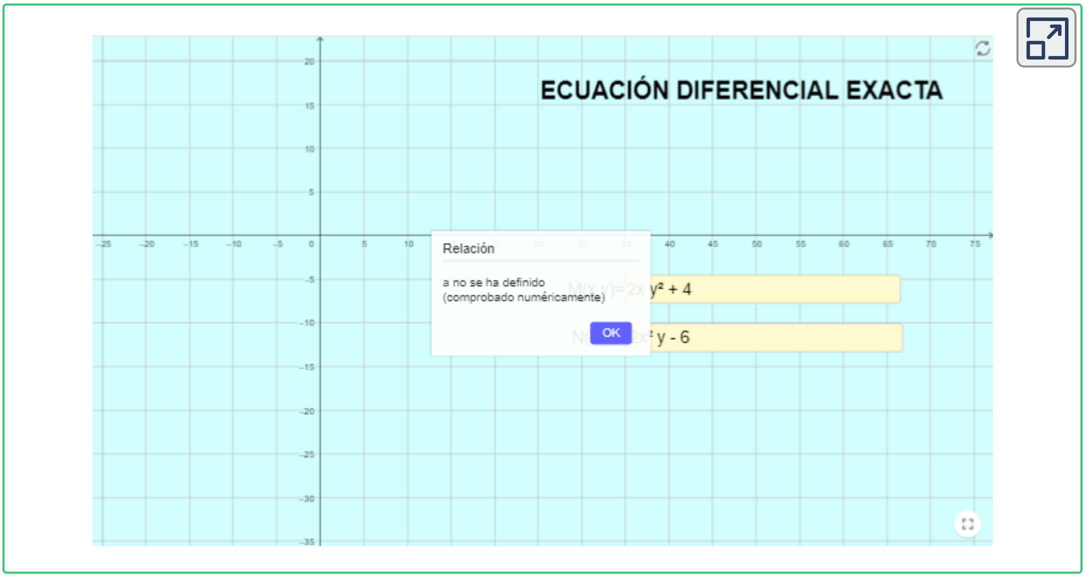
$$\partial f = (2xy)\partial x$$

Los diferenciales indican que se debe integrar

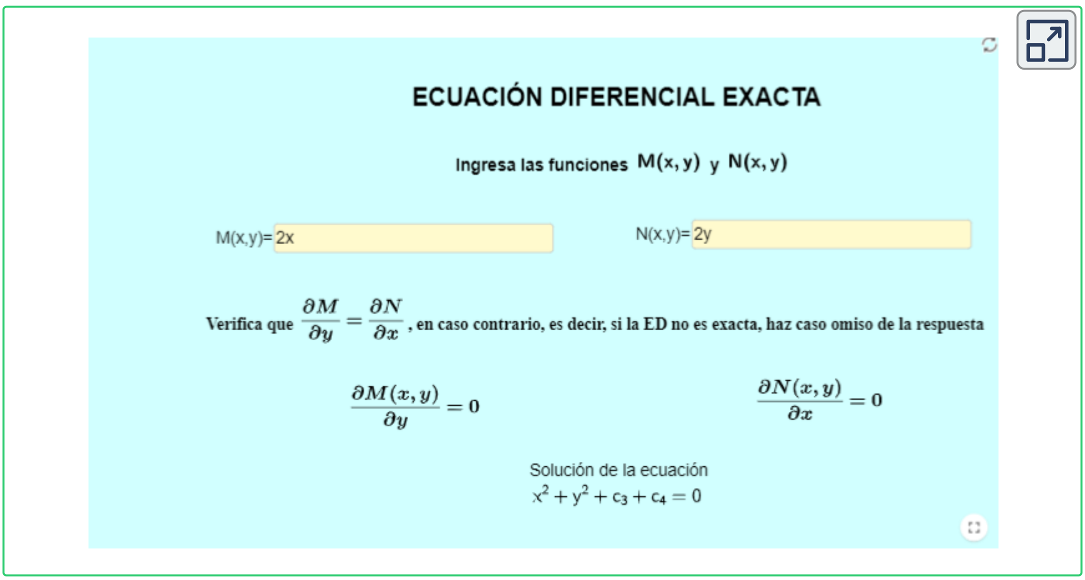
$\int \partial f = \int 2xy\partial x$	Como vamos a integrar con respecto a x tanto el 2 como la y son constantes
$\int \partial f = 2y \int x\partial x$	Integramos
$f(x,y) = x^2y + g(y) \qquad (1)$	Derivamos la ecuación (1) con respecto a y dejando x constante
$x^2 + g'(y)$	Ahora igualamos este resultado con N.
$x^2 + g'(y) = x^2 - 1$	Simplificamos e integramos con respecto a y
$g(y) = -y$	Reemplazando este valor en la ecuación (1) y como $f(x,y) = c$ obtenemos

$$c = x^2y - y$$

En la siguiente escena interactiva, diseñada por Victor Cruz, podrás resolver ED exactas y visualizar su gráfica.



En la siguiente escena interactiva, diseñada por [Víctor Cruz](), podrás resolver ED exactas ingresando $M(x,y) \wedge N(x,y)$



Ejemplo 3: Resolver el PVI

Determinar si la ED es exacta, si lo es resuélvala.

$$(y^2 cosx - 3x^2 y - 2x)dx + (2ysenx - x^3 + \ln|y|)dy = 0$$

Sujeta a la condición inicial $y(0) = e$

Solución

Determinamos si es exacta. Derivamos parcialmente M con respecto a y dejando x constante

$$2ycosx - 3x^2$$

Ahora derivamos parcialmente N con respecto a x dejando y constante

$$2ycosx - 3x^2$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, entonces, la ecuación es exacta.

Asumimos $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 cosx - 3x^2 y - 2x$$

Despejamos e integramos a ambos lados.

$\int \partial f = \int (y^2 cosx - 3x^2 y - 2x)\partial x$ Sacamos la constante de cada integral

$\int \partial f = y^2 \int cosx\partial x - 3y \int x^2 \partial x - 2 \int x\partial x$

Integramos

$$f(x,y) = y^2 senx - 3y\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + g(y)$$

Simplificando obtenemos

$$f(x,y) = y^2 senx - x^3 y - x^2 + g(y) \qquad (1)$$

Derivamos la ecuación (1) con respecto a y dejando x constante

$2ysenx - x^3 + g'(y)$ Ahora igualamos este resultado con N.

$$2ysenx - x^3 + g'(y) = 2ysenx - x^3 + \ln|y|$$

Ahora simplificamos

$g'(y) = \ln|y|$ Integramos con respecto a y. Se integra por partes

$$u = \ln|y| \qquad dv = dy$$

$$du = \frac{1}{y}dy \qquad v = y$$

$\int g'(y)\partial y = y\ln|y| - \int \partial y$ El valor $g(y)$ es

$g(y) = y\ln|y| - y$

Reemplazando este valor en la ecuación (1) y teniendo en cuenta que $f(x,y) = c$ obtenemos la solución general

$$c = y^2 senx - x^3y - x^2 + y\ln|y| - y$$

Ahora debemos reemplazar las condiciones iniciales

$y(0) = e$ para obtener la solución particular

$c = e^2 sen0 - (0)^3 e - (0)^2 + e\ln|e| - e$

Recuerde que $\ln|e| = 1$

$c = e - e$

El valor del parámetro es $c = 0$

Reemplazando este valor en la solución general

$0 = y^2 senx - x^3y - x^2 + y\ln|y| - y$

Obtenemos la solución particular es

$$0 = y^2 senx - x^3y - x^2 + y\ln|y| - y$$

Ejemplo 4: ED exacta

Determinar si la ED es exacta, si lo es resuélvala.

$$\left(1+\ln|x|+\frac{y}{x}\right)dx=(1-\ln|x|)\,dy$$

Solución

Antes de determinar si la ecuación es o no exacta se debe organizar para que cumpla la estructura $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ que vimos en la definición.

Se puede pasar cualquiera de los dos términos al otro lado, teniendo en cuenta cual es M y cual es N Para resolver este ejercicio pasamos el término del lado derecho al lado izquierdo

$$\left(1+\ln|x|+\frac{y}{x}\right)dx-(1-\ln|x|)dy=0$$

Los dos términos deben ser positivos, por lo cual sacamos factor común -1 del segundo término

$$\left(1+\ln|x|+\frac{y}{x}\right)dx+(-1+\ln|x|)dy=0$$

Ahora si podemos determinar si la ED es exacta. Derivamos parcialmente M con respecto a y dejando x constante. Cuando en la ED no aparecen los dos términos al lado izquierdo o están negativos, se debe ajustar antes de comprobar si es exacta.

$\frac{1}{x}$

Derivamos parcialmente N con respecto a x dejando y constante

$\frac{1}{x}$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, entonces, la ecuación es exacta.

Asumimos $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$

$$\int \partial f = \int \left(1 + \ln|x| + \frac{y}{x}\right) \partial x$$

Separamos las integrales

$$\int \partial f = \int \partial x + \int \ln|x| \, \partial x + y \int \frac{1}{x} \partial x$$

Integramos M con respecto a x dejando y constante.

$$f(x, y) = x + x \ln|x| - x + y \ln|x| + g(y) \qquad (1)$$

Agrupando términos semejantes

$$f(x, y) = x \ln|x| + y \ln|x| + g(y) \qquad (1)$$

Derivamos la ecuación (1) con respecto a y dejando x constante

$\ln|x| + g'(y)$

Ahora igualamos este resultado con N.

$\ln|x| + g'(y) = -1 + \ln|x|$ Simplificamos

$g'(y) = -1$ Integramos con respecto a y

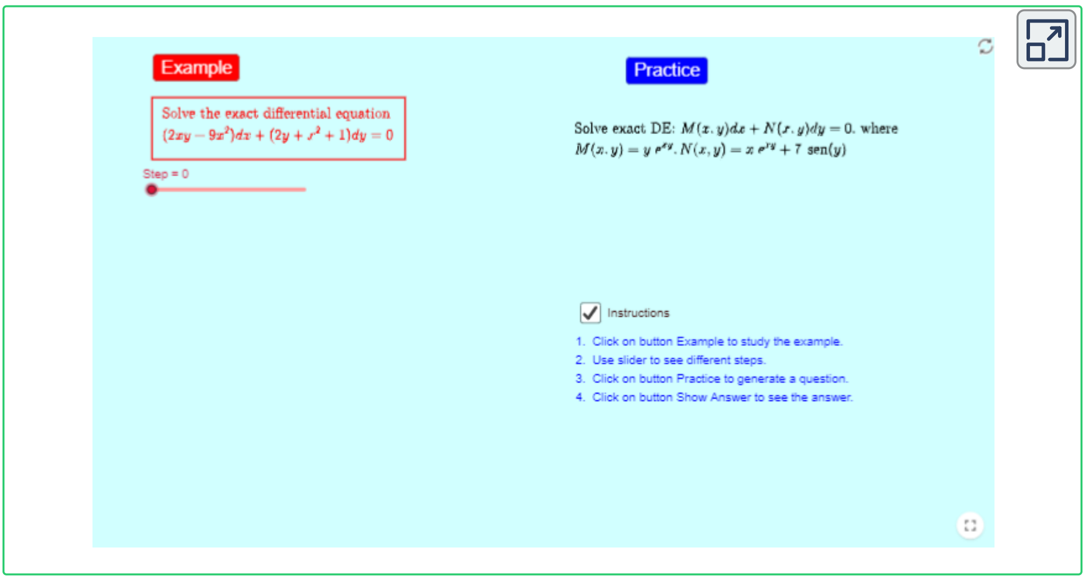
$g(y) = -y$

Reemplazando este valor en la ecuación (1)

Teniendo en cuenta que $f(x, y) = c$ obtenemos la solución general

$$c = x\ln|x| + y\ln|x| - y$$

En la siguiente escena interactiva, diseñada por [Ravinder Kumar](), podrás resolver ED exactas y visualizar su gráfica.



En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de ecuación exacta.

En la siguiente escena interactiva, diseñada por Ravinder Kumar, podrás resolver ED exactas

2.3.1 Ejercicios y respuestas de la sección 2.3

Ejercicios de repaso sección 2.3

Determinar si la E.D. es exacta, si lo es revuélvala.

1. $(2x+4)dx+(3y-1)dy=0$

2. $(2x+y)dx+(x+6y)dy=0$

3. $(x+y)(x-y)dx+x(x-2y)dy=0$

4. $x\dfrac{dy}{dx}=2xe^{x}-y+6x^{2}$

5. $\left(2y-\dfrac{1}{x}+\cos 3x\right)\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x^{2}}-4x^{3}+3ysen3x=0$

6. $(x+y)^{2}dx+(2xy+x^{2}-1)dy=0$ Sujeta a $y(1)=1$

7. $(4xy^{3}+3y^{2}+1)dx+(6x^{2}y^{2}+6xy)dy=0$

8. $(2x-1)dx+(3y+7)dy=0$

9. $(x+2y)dx+(x+2y)dy=0$

10. $(y\ln|y|-e^{-xy})\,dx+\left(\dfrac{1}{y}+x\ln|y|\right)dy=0$

Respuestas

2.4 Ecuaciones transformables a exactas

Muchas ED que no son exactas se pueden transformar en exactas usando un factor integrante. luego de transformar la ED se utiliza el método de solución visto en las ecuaciones exactas. Si la ecuación no se puede transformar en exacta se resuelve por otro método que veremos más adelante.

Para transformar una ecuación no exacta en exacta se utiliza la siguiente sustitución.

$$p\left(x\right)=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{ax}}{N\left(x,y\right)}$$

Si $p(x)$ es función sólo de la variable x, entonces el factor integrante $e^{\int p(x)dx}$ la transforma en exacta

Si $p(x)$ depende de dos variables, entonces se utiliza la siguiente sustitución

$$p\left(y\right)=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{ay}}{M\left(x,y\right)}$$

Si $p(y)$ es función sólo de la variable y, entonces el factor integrante $e^{\int p(y)dy}$ la transforma en exacta

Si una de las dos sustituciones queda en términos de una sola variable, entonces el factor integrante la transforma en exacta. es importante anotar que no todas las ED de primer orden tienen factor integrante y la sustitución tampoco permite encontrar todos los factores integrantes posibles de la ED. Sólo permite encontrar factores integrantes univariables

Ejemplo 1: ED reducible a exacta

Determinar el factor integrante para resolver la ED

$$xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$$

Solución

Determinamos si es exacta. Derivamos parcialmente M con respecto a y dejando x constante

$$x$$

Ahora derivamos parcialmente N con respecto a x dejando y constante

$$4x$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, entonces, la ecuación no es exacta.

Realizamos la sustitución $p\left(x\right)=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{ax}}{N\left(x,y\right)}$

$$\frac{x-4x}{2x^2+3y^2-20}=\frac{-3x}{2x^2+3y^2-20}$$

Como el resultado depende de dos variables buscamos $p(y)$

$$\frac{4x-x}{xy}=\frac{3x}{xy}=\frac{3}{y}$$

Como el resultado depende de una variable, utilizamos $p(y)$ para hallar el factor integrante

$$F.I=e^{\int\frac{3}{y}dy}=y^3$$

Ahora multiplicamos la ED no exacta por el $F.I$

$$[xydx+(2x^2+3y^2-20)dy=0]y^3$$

$$xy^4dx+(2x^2y^3+3y^5-20y^3)dy=0$$

Derivamos M con respecto a y dejando x constante

$$4xy^3$$

Derivamos N con respecto a x dejando y constante

$$4xy^3$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, entonces, la ecuación es exacta.

Asumimos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$

$\partial f = \left(xy^4\right) \partial x$

Los diferenciales indican que se debe integrar

$\int \partial f = \int \left(xy^4\right) \partial x$

Integramos M con respecto a x dejando y constante

$$f(x, y) = \frac{x^2y^4}{2} + g(y) \qquad (1)$$

Derivamos la ecuación (1) con respecto a y dejando x constante

$2x^2y^3 + g'(y)$

Igualamos este resultado con N.

$$2x^2y^3 + g'(y) = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3$$

Simplificando obtenemos

$g'(y) = 3y^5 - 20y^3$

Integramos con respecto a y

$$\int g'(y)\partial y = \int (3y^5 - 20y^3)\partial y$$

Integral directa

$$g(y) = \frac{3y^6}{6} - \frac{20y^4}{4}$$

Simplificando

$$g(y) = \frac{y^6}{2} - 5y^4$$

Reemplazando este valor en la ecuación (1) y teniendo en cuenta que $f(x, y) = c$ obtenemos la solución general

$$c = \frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^6}{2} - 5y^4$$

Ejemplo 2: ED reducible a exacta

Determinar el factor integrante para resolver la ED

$$(cos2y - senx)dx + (-2tanxsen2y)dy = 0$$

Solución

Determinamos si es exacta. Derivamos parcialmente M con respecto a y dejando x constante

$$-2sen2y$$

Ahora derivamos parcialmente N con respecto a x dejando y constante

$$-2sec^2xsen2y$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, entonces, la ecuación no es exacta.

Realizamos la sustitución $p\left(x\right)=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{ax}}{N\left(x,y\right)}$

$$\frac{-2sen2y+2sec^2xsen2y}{-2tanxsen2y}$$

Sacando factor común

$$\frac{-2sen2y(-1+sec^2x)}{-2tanxsen2y}$$

Simplificando $\wedge$ aplicando identidad pitagórica. $-1+sec^2x=tanx$

$$\frac{-1+sec^2x}{-tanx}=\frac{tan^2x}{-tanx}$$

Como el resultado depende de una variable, utilizamos $p(x)$ para hallar el factor integrante

$$F.I=e^{\int -tanxdx}=cosx$$

Ahora multiplicamos la ED no exacta por el $F.I$

$$[(cos2y-senx)dx+(-2tanxsen2y)dy=0]cosx$$

$$(cosxcos2y-senxcosx)dx+(-2senxsen2y)=0$$

Tenga en cuenta que se aplicó la identidad $cosxtanx=senx$

Derivamos M con respecto a y dejando x constante

$-2cosxsen2y$ Derivamos N con respecto a x dejando y constante

$-2cosxsen2y$.

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, entonces, la ecuación es exacta.

Asumimos $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$

$\partial f = (cosxcos2y - senxcosx)\,\partial x$ Los diferenciales indican que se debe integrar

$\int \partial f = \int (cosxcos2y - senxcosx)\,\partial x$

Integramos M con respecto a x dejando y constante

$$f(x, y) = senxcos2y + \frac{cos^2 x}{2} + g(y) \qquad (1)$$

Derivamos la ecuación (1) con respecto a y dejando x constante

$-2senxsen2y + g'(y)$ Ahora igualamos este resultado con N.

$$-2senxsen2y + g'(y) = -2senxsen2y$$

Al simplificar vemos que $g'(y) = 0$. Cuando integramos el 0 el resultado es $0 + c$ como la constante sólo se tiene en cuenta en la respuesta podemos decir que:

$g(y) = 0$

Reemplazando este valor en la ecuación $(1) \quad \wedge \quad$ teniendo en cuenta que $f(x, y) = c \quad$ obtenemos la solución general

$$c = senxcos2y + \frac{cos^2x}{2}$$

Ejemplo 3: ED reducible a exacta

Determinar el factor integrante para resolver la ED

$(2xy \ln |y|)dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1})dy = 0$

Solución

Determinamos si es exacta. Derivamos parcialmente M con respecto a y dejando x constante

$2x + 2x \ln |y|$

Derivamos parcialmente N con respecto a x dejando y constante

$2x$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, entonces, la ecuación no es exacta.

Realizamos la sustitución $p\left(x\right) = \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{ax}}{N\left(x,y\right)}$

$\dfrac{2x + 2x\ln\left|y\right| - 2x}{x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}}$

Simplificando

$\dfrac{2x\ln\left|y\right|}{x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}}$

Como el resultado depende de dos variables, utilizamos la sustitución $p(y)$

$\dfrac{2x - 2x - 2x\ln\left|y\right|}{2xy\ln\left|y\right|}$

Simplificando

$\dfrac{-2x\ln\left|y\right|}{2xy\ln\left|y\right|} = \dfrac{-1}{y}$

Hallamos el factor integrante

$F.I = e^{\int \frac{-1}{y}dy} = y^{-1}$

Ahora multiplicamos la ED no exacta por el $F.I$

$$(2x\ln\left|y\right|)dx + (x^2y^{-1} + y\sqrt{y^2+1})dy = 0$$

Derivamos M con respecto a y dejando x constante

$2xy^{-1}$

Derivamos N con respecto a x dejando y constante

$2xy^{-1}$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, entonces, la ecuación es exacta.

Asumimos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$

$\partial f = (2x \ln |y|)\, \partial x$

Los diferenciales indican que se debe integrar

$\int \partial f = \int 2x \ln |y|\, \partial x$

Integramos M con respecto a x dejando y constante

$f(x, y) = x^2 \ln |y| + g(y) \qquad (1)$

Derivamos la ecuación (1) con respecto a y dejando x constante

$x^2 y^{-1} + g'(y)$

Ahora igualamos este resultado con N.

$x^2 y^{-1} + g'(y) = x^2 y^{-1} + y\sqrt{y^2 + 1}$

Simplificando

$g'(y) = y\sqrt{y^2+1}$

Ahora integramos esta ecuación con respecto a y.

$$\int g'(y)\partial y = \int y\sqrt{y^2+1} \quad \partial y$$

Integral por sustitución

$u = y^2 + 1 \quad \wedge \quad du = 2ydy$

Reemplazando en la integral

$$g'(y) = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}} du$$

Integrando obtenemos

$$g(y) = \frac{1}{3}\int u^{\frac{3}{2}}$$

Reemplazamos el valor de u en la respuesta

$$g(y) = \frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

Entonces $g(y)$ es:

$$g(y) = \frac{1}{3}\sqrt{(y^2+1)^3}$$

Reemplazando este valor en la ecuación $(1) \quad \wedge \quad$ teniendo en cuenta que $f(x, y) = c \quad$ obtenemos la solución general

$$c = x^2 \ln|y| + \frac{1}{3}\sqrt{(y^2+1)^3}$$

Ejemplo 4: Resolver el PVI

Determinar el factor integrante para resolver la ED

$xtanxdx - ycosxdy = 0$

Sujeta a la condición inicial $y(0) = 2$

Solución

Debemos organizar la ED para que cumpla la estructura $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

$xtanxdx + (-ycosx)dy = 0$

Determinamos si es exacta. Derivamos parcialmente M con respecto a y dejando x constante

0

Ahora derivamos parcialmente N con respecto a x dejando y constante

$ysenx$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, entonces, la ecuación no es exacta.

Buscamos un factor integrante para convertirla en exacta

Realizamos la sustitución $p\left(x\right)=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{ax}}{N\left(x,y\right)}$

$\dfrac{0-ysenx}{-ycosx}$ Simplificando

$\dfrac{senx}{cosx}$ hallamos el factor integrante

$F.I=e^{\int tanxdx}=secx$ La integral de secante está en la página 70

Ahora multiplicamos la ED no exacta por el $F.I$

$[xtanxdx+(-ycosx)dy=0]secx$

$(xsecxtanx)dx+(-y)dy=0$

Tenga en cuenta que se aplicó la identidad $cosxsecx=1$

Derivamos M con respecto a y dejando x constante

0 Derivamos N con respecto a x dejando y constante

0 Como $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, entonces, la ecuación es exacta.

Asumimos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$

$\int \partial f = \int x\ secx\ tanx\ \partial x$

Integramos M con respecto a x dejando y constante.

$u = x \qquad dv = secxtanxdx$
$du = dx \qquad v = secx$

Aplicando la fórmula de integración por partes

$\int \partial f = xsecx - \int secxdx$

Integrando la $secx$ obtenemos

$$f(x, y) = xsecx - \ln|secx + tanx| + g(y) \qquad (1)$$

Derivamos la ecuación (1) con respecto a y dejando x constante y la igualamos con N

$g'(y) = -y$

Integramos con respecto a y.

$\int g'(y)\partial y = \int -y\partial y$

Integral directa

$g(y) = -\dfrac{y^2}{2}$

Reemplazando en la ecuación (1) $\wedge$ teniendo en cuenta que $f(x, y) = c$

$$c = xsecx - \ln|secx + tanx| - \frac{y^2}{2}$$

Ahora reemplazamos las condiciones iniciales $y(0) = 2$

$$c = 0sec0 - \ln|sec0 + tan0| - \frac{2^2}{2} \qquad c = -2$$

Entonces la solución particular de la ED es

$$\boxed{-2 = xsecx - \ln|secx + tanx| - \frac{y^2}{2}}$$

En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de una ecuación reducible a exacta.

2.4.1 Ejercicios y respuestas de la sección 2.4

Ejercicios de repaso sección 2.4

Transforme la ecuación diferencial en exacta y resuélvala.

1. $y(x+y+1)dx+(x+2y)dy=0$

2. $6xydx+(4y+9x^2)dy=0$

3. $(2x^3+y)dx-xdy=0$

4. $x^2senxdx+xydy=0$

5. $(5x^2-xy+x^3senx)dx+(x^2+x^3y)dy=0$

6. $(x+y+2)dx+dy=0$

7. $(xy^2-y^3)dx+(1-xy^2)dy=0$

8. $(2y^2+3x)dx+2xydy=0$

9. $(10-6y+e^{-3x})dx-2dy=0$

10. $y^2cosxdx+(4+5ysenx)dy=0$ Sujeta a $y(0)=2$

Respuestas

2.5 Ecuaciones homogéneas

Si una ED tiene la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Tiene la siguiente propiedad

a) $M(tx,ty) = t^n M(x,y)$

b) $N(tx,ty) = t^n N(x,y)$

Entonces se dice que tiene coeficientes homogéneos o que es una ecuación diferencial homogénea

Nota: Una ecuación diferencial homogénea siempre se puede llevar a una ecuación diferencial de variables separables por medio de una sustitución algebraica adecuada

Definición: Se dice que $f(x,y)$ es una función homogénea de grado n si para algún número R

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

Método de solución

- Si $f(x,y)$ es una función homogénea de grado n, es posible hacer una sustitución con el fin de llevarla a una E.D. de variables separables.

- La sustitución que normalmente se hace es:

$$y = ux$$

Recuerde que, con esta sustitución, la ecuación se vuelve variables separables, sí la integral es muy difícil o imposible de resolverse utiliza la siguiente sustitución.

$$x = vy$$

Ejemplo 1: ED homogénea

Resolver la ED

$$x\frac{dy}{dx} = (y + xe^{\frac{y}{x}})$$

Solución

Primero se determina si la ecuación es homogénea

$$tx\frac{dy}{dx} = (ty + txe^{\frac{ty}{tx}})$$

Se simplifica $\quad \wedge \quad$ se saca factor común

$$tx\frac{dy}{dx} = t(y + xe^{\frac{y}{x}})$$

Se determina que la ecuación es homogénea de grado 1. Ahora se hace el cambio de variable

$y = ux$ derivando $dy = udx + xdu$

$$x\frac{udx + xdu}{dx} = (ux + xe^u)$$

Al hacer la sustitución la ecuación se vuelve variables separables, subimos dx y sacamos factor común x.

$$x(udx + xdu) = x(u + e^u)dx$$

Simplificamos la x $\wedge$ hacemos distributiva

$$udx + xdu = udx + e^u dx$$

Agrupamos los dx a un lado $\wedge$ el du al otro lado

$$xdu = udx - udx + e^u dx$$

Simplificamos $\wedge$ separamos variables

$$\frac{du}{e^u} = \frac{dx}{x}$$

Los diferenciales indican que se debe integrar

$$\int e^{-u} du = \int \frac{dx}{x}$$

integrando obtenemos

$$-e^{-u} = \ln|x| + c$$

Sustituimos nuevamente la u

$-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + c$ Multiplicamos por -1 para dar la solución

$$e^{-\frac{y}{x}} = -\ln|x| + c$$

Ejemplo 2: ED homogénea

Resolver la ED

$(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0$

Solución

Primero se determina si la ecuación es homogénea

$(t^2y^2 + tytx)dx - t^2x^2dy = 0$

Se multiplica el parámetro

$(t^2y^2 + t^2yx)dx - t^2x^2dy = 0$

Se saca factor común

$t^2(y^2 + yx)dx - t^2x^2dy = 0$

Se determina que la ecuación es homogénea de grado 2. Ahora se hace el cambio de variable

$y = ux$ derivando $dy = udx + xdu$

$$((ux)^2 + uxx)dx - x^2(udx + xdu) = 0$$

Para resolver la ecuación se saca factor común x^2 $\wedge$ pasamos el segundo término a la derecha.

$x^2(u^2 + u)dx = x^2(udx + xdu)$	Simplificamos x^2 $\wedge$ hacemos distributiva
$u^2dx + udx = udx + xdu$	Se deben separar los diferenciales a diferente lado para poder separar variables
$u^2dx = xdu$	Ahora se separan variables
$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{u^2}$	Los diferenciales indican que se debe integrar
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int u^{-2}du$	integrando obtenemos
$\ln \lvert x \rvert + c = -u^{-1}$	Sustituimos nuevamente la u
$\ln \lvert x \rvert + c = -\dfrac{x}{y}$	despejando la y, queda la solución

$$y = \frac{-x}{\ln|x| + c}$$

Ejemplo 3: Resolver el PVI

Resolver la ED

$$\left(y + x\cot\frac{y}{x}\right)dx - xdy = 0$$

Solución

Primero se determina si la ecuación es homogénea

$$\left(ty + txcot\frac{ty}{tx}\right)dx - txdy = 0$$

Se simplifica $\quad\wedge\quad$ se saca factor común

$$t\left(y + xcot\frac{y}{x}\right)dx - txdy = 0$$

Como los dos términos tienen el mismo factor t, se determina que la ecuación es homogénea de grado 1. Ahora se hace el cambio de variable

$y = ux$ derivando $dy = udx + xdu$

$$(ux + xcotu)dx - x(udx + xdu) = 0$$

Al hacer la sustitución la ecuación se vuelve variables separables, ahora sacamos factor común $x \quad \wedge \quad$ pasamos el segundo término a la derecha.

$x(u + cotu)dx = x(udx + xdu)$ — Simplificamos $x \quad \wedge \quad$ hacemos distributiva

$udx + cotudx = udx + xdu$ — separamos diferenciales

$udx + cotudx - udx = xdu$ — Simplificamos $\quad \wedge \quad$ separamos variables

$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{cotu}$ — Los diferenciales indican que se debe integrar $\quad \wedge \quad$ se aplica la identidad $\dfrac{1}{cotu} = tanu$

$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int tanudu$ — integrando obtenemos

$\ln|x| + c = \ln|secu|$ — Aplicamos axioma de igualdad

$e^{\ln|x|+c} = e^{\ln|secu|}$ — Quitando logaritmos. Recuerde que $e^{\ln|x|} = x$

$cx = secu$ — Sustituyendo la u

$$cx = sec\frac{y}{x}$$

Axioma de igualdad para despejar y

$$sec^{-1}(cx) = sec^{-1}sec\frac{y}{x}$$

Operando

$$sec^{-1}(cx) = \frac{y}{x}$$

despejando la y queda la solución

$$\boxed{y = xsec^{-1}(cx)}$$

Ejemplo 4: Resolver la ED homogénea

Resolver la ED

$$2x^2ydx = (3x^3 + y^3)dy$$

Solución

Primero se determina si la ecuación es homogénea

$$2t^2x^2tydx = (3t^3x^3 + t^3y^3)dy$$

Operando y sacando factor común

$$2t^3x^2ydx = t^3(3x^3 + y^3)dy$$

Como los dos términos tienen el mismo factor t^3, se determina que la ecuación es homogénea de grado 3. Ahora hacemos el cambio de variable

$y = ux$ derivando $dy = udx + xdu$

$$2x^2uxdx = (3x^3 + (ux)^3)(udx + xdu)$$

Al hacer la sustitución la ecuación se vuelve variables separables, ahora sacamos factor común x^3

$2x^3udx = x^3(3 + u^3)(udx + xdu)$ Simplificamos x^3 $\wedge$ hacemos distributiva

$2udx = 3udx + 3xdu + u^4dx + xu^3du$ separamos diferenciales

$-udx - u^4dx = 3xdu + xu^3du$ Sacamos factor común

$-dx(u + u^4) = xdu(3 + u^3)$ Separando variables

$-\dfrac{dx}{x} = \dfrac{3 + u^3}{u + u^4}du$ Los diferenciales indican que se debe integrar

$$-\int \frac{dx}{x} = \int \frac{3 + u^3}{u + u^4}du$$

La integral del lado derecho es muy difícil de resolver, pues no se puede hacer por sustitución $\wedge$ por fracciones parciales queda un término irreductible, cuando esto ocurre, se debe volver a comenzar el ejercicio pero utilizando la otra sustitución $x = vy$

$x = vy$ derivando $dx = vdy + ydv$

$$2(vy)^2y(vdy + ydv) = (3(vy)^3 + y^3)dy$$

Operando tenemos

$$2v^2y^3(vdy + ydv) = (3v^3y^3 + y^3)dy$$

Sacamos factor común y^3

$$2v^2y^3(vdy + ydv) = y^3(3v^3 + 1)dy$$

Simplificando $\wedge$ haciendo distributiva

$$2v^3dy + 2v^2ydv = 3v^3dy + dy$$

separamos diferenciales y agrupamos términos semejantes

$$2v^2ydv = v^3dy + dy$$

Sacamos factor común

$$2v^2ydv = dy(v^3 + 1)$$

Separando variables

$$\frac{2v^2}{v^3 + 1}dv = \frac{dy}{y}$$

Los diferenciales indican que se debe integrar

$$\int \frac{2v^2}{v^3+1}dv = \int \frac{dy}{y}$$

La integral se resuelve por sustitución

Es necesario hacer un cambio de variable para resolver la integral del lado izquierdo cambiamos v^3+1 por u

$$u = v^3 + 1 \;\Rightarrow\; du = 3v^2dv \;\Rightarrow\; \frac{du}{3} = v^2dv$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y}$$

Integrando obtenemos

$$\frac{2}{3}\ln|u| + c = \ln|y|$$

Se organiza el término

$$2\ln\left|v^3+1\right| + c = 3\ln|y|$$

Aplicamos propiedades de logaritmos

$$\ln\left|v^3+1\right|^2 + c = \ln|y|^3$$

Aplicamos axioma de igualdad

$$e^{\ln\left|v^3+1\right|^2+c} = e^{\ln|y|^3}$$

Quitando logaritmos

$$c(v^3+1)^2 = y^3$$

Sustituyendo la v

$$c\left(\frac{x^3}{y^3}+1\right)^2 = y^3$$

Operando fraccionarios

$$c\left(\frac{x^3+y^3}{y^3}\right)^2=y^3$$

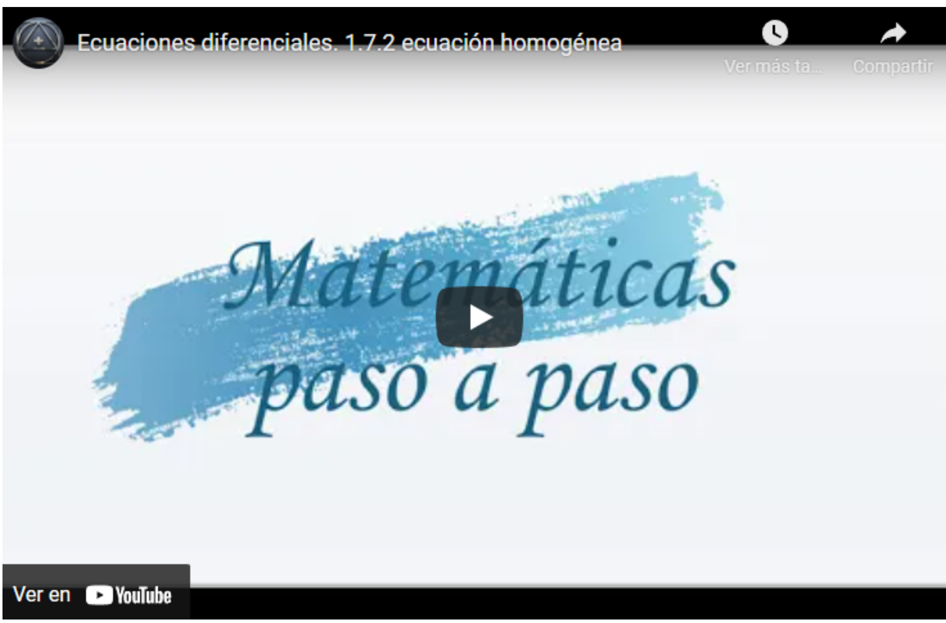
Aplicando propiedades de potenciación

$$\frac{C\left(x^3+y^3\right)^2}{\left(y^3\right)^2}=y^3$$

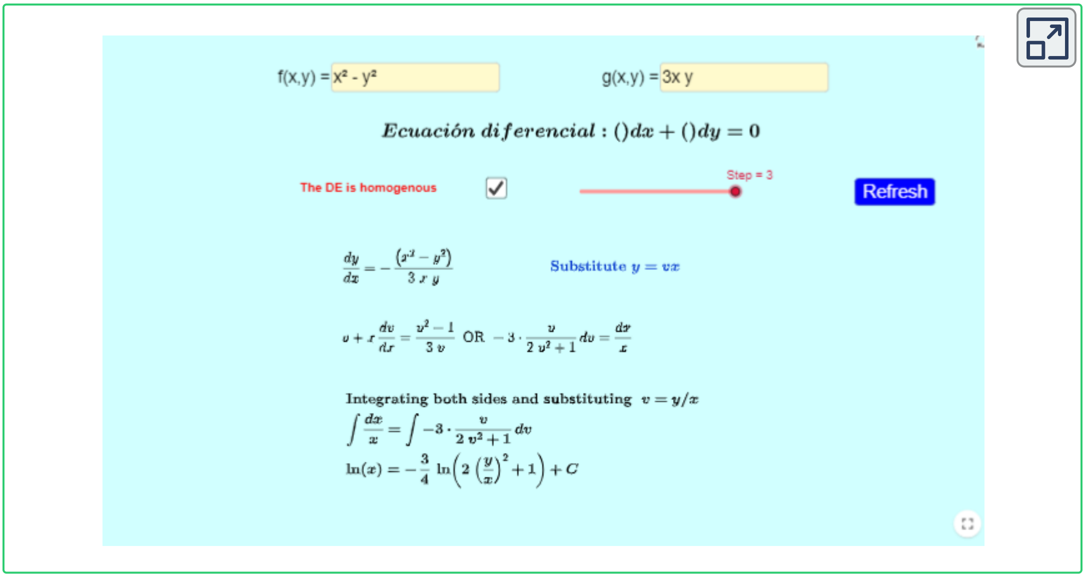
Pasando y^6 a multiplicar obtenemos la solución

$$y^9=c(x^3+y^3)^2$$

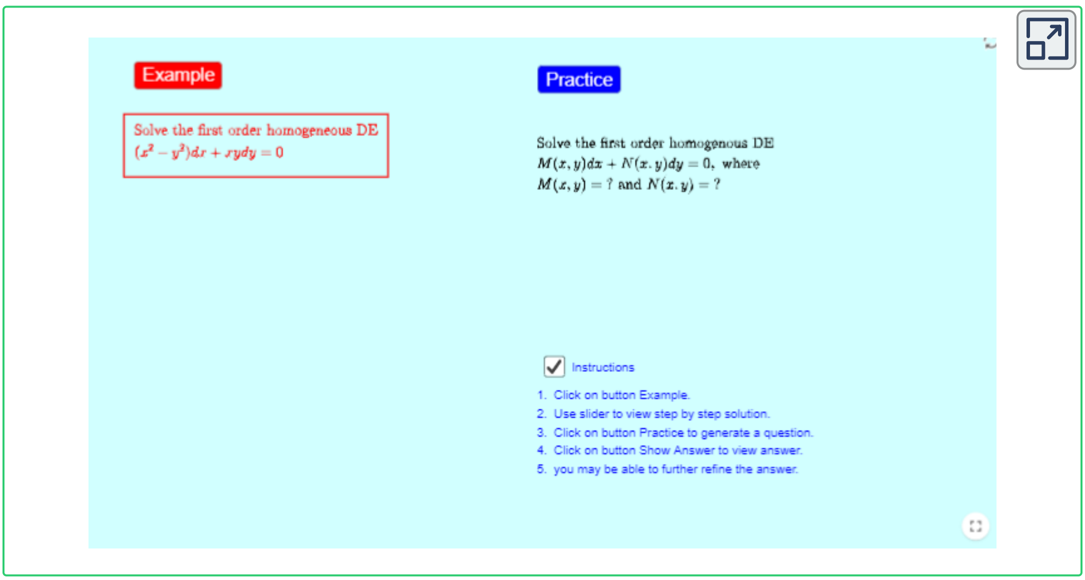
En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de ecuación homogénea.



En la siguiente escena interactiva, diseñada por Ravinder Kumar, podrás resolver ecuaciones homogéneas.



En la siguiente escena interactiva, diseñada por [Ravinder Kumar](), podrás resolver ecuaciones homogéneas.



2.5.1 Ejercicios y respuestas de la sección 2.5

Ejercicios de repaso sección 2.5

Resolver la ecuación diferencial homogénea.

1. $(x-y)dx + xdy = 0$

2. $(x+y)dx + xdy = 0$

3. $xdx + (y-2x)dy = 0$

4. $ydx = 2(x+y)dy$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$

6. $-ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$

7. $(2\sqrt{xy} - y)dx - xdy = 0$

8. $(y^2 + xy)dx + x^2dy = 0$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{y+x} = 0$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+3y}{3x+y} = 0$

Respuestas

2.6 ecuación de Bernoulli

Algunas veces es necesario hacer un cambio de variable para transformar una ecuación diferencial no lineal en lineal. Lo primero que se debe hacer es llevar la ecuación a la forma estándar, lego hacer una sustitución. Si la ecuación presenta la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n \quad (1)$$

Donde n es cualquier número real, es la ecuación de Bernoulli.

Nota: Si $n = 0$ $\quad n = 1$ la ecuación es lineal.

Si $n \neq 1$ la sustitución

$$\boxed{u = y^{1-n}}$$

Reduce cualquier ecuación de la forma (1) en una ecuación lineal.

La ecuación diferencial de Bernoulli es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, formulada por **Jacob Bernoulli.** Esta ecuación fue transformada, por Gottfried Leibniz en 1693 y por Johann Bernoulli en 1697, es una ecuación diferencial lineal de primer orden, mediante la sustitución $\quad u = y^{1-n}$

Ejemplo 1: Resolver la ED de Bernoulli

Resolver la ED

$$x\frac{dy}{dx}+y=x^2y^2$$

Solución

Se determina el valor de n para realizar la sustitución. En este ejercicio $n=2$

$$u=y^{1-2}\;\Rightarrow\;u=y^{-1}$$

Despejando la y

$$y=u^{-1}$$

Derivando la y

$$dy=-u^{-2}du$$

Reemplazando la y $\wedge$ el dy en la ecuación de Bernoulli

$$x\frac{-u^{-2}du}{dx}+u^{-1}=x^2(u^{-1})^2$$

Después de hacer el cambio de variable, la ecuación se transforma en lineal, ahora se debe llevar a la forma estándar

$$\frac{-u^{-2}xdu}{-u^{-2}xdx}+\frac{u^{-1}}{-u^{-2}x}=\frac{x^2u^{-2}}{-u^{-2}x}$$

Simplificando

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -x$$

La ecuación es lineal en la variable dependiente u $\wedge$ además está en forma estándar. Ahora identificamos $p(x)$ para hallar el factor integrante.

$$p(x) = -\frac{1}{x} \qquad F.I = x^{-1}$$

Ahora aplicamos la propiedad para resolver la ED lineal, multiplicando la forma estándar por el $F.I$

$$x^{-1}u = -\int x^{-1}xdx$$

Ahora debemos integrar el lado derecho de la ecuación

$$x^{-1}u = -x + c$$

Despejamos la variable dependiente u

$$u = -\frac{x}{x^{-1}} + \frac{c}{x^{-1}}$$

Sustituyendo u $\wedge$ aplicando potenciación

$$\frac{1}{y} = -x^2 + cx$$

Despejando y se llega a la solución

$$\boxed{y = \frac{1}{-x^2 + cx}}$$

Ejemplo 2: Resolver la ED de Bernoulli

Resolver la ED

$$\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$$

Solución

Se aplica propiedad distributiva

$$\frac{dy}{dx} = xy^4 - y$$

Se organiza la ecuación para que la variable lineal quede al lado izquierdo

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^4$$

La ecuación ya está en la forma de la ecuación de Bernoulli

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n$, ahora se determina el valor de n para realizar la sustitución. En este ejercicio $n = 4$

$u = y^{1-4} \;\Rightarrow\; u = y^{-3}$ Despejando la y

$y = u^{-\frac{1}{3}}$ Derivando la y

$$dy = -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}du$$

Reemplazando la y $\wedge$ el dy en la ecuación de Bernoulli

$$\frac{-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}du}{dx} + u^{-\frac{1}{3}} = xu^{-\frac{4}{3}}$$

Después de hacer el cambio de variable, la ecuación se transforma en lineal, ahora se debe llevar a la forma estándar

$$\frac{-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}du}{-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}dx} + \frac{u^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}} = \frac{xu^{-\frac{4}{3}}}{-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}}$$

Simplificando

$$\frac{du}{dx} - 3u = -3x$$

La ecuación es lineal en la variable dependiente u $\wedge$ además está en forma estándar.

$$p(x) = -3 \qquad F.I = e^{-3x}$$

Ahora aplicamos la propiedad para resolver la ED lineal, multiplicando la forma estándar por el $F.I$

$$e^{-3x}u = \int -3xe^{-3x}dx$$

La integral se resuelve por partes

$$u = -3x \qquad dv = e^{-3x}dx$$

$$du = -3dx \qquad v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

Reemplazando en la fórmula de integración por partes.

$$\int -3xe^{-3x}dx = xe^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + c$$

Ahora reemplazamos el resultado de esta integral al lado derecho de la ED.

$$e^{-3x}u = xe^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + c$$

Despejando u

$$u = x + \frac{1}{3} + ce^{3x}$$

Sustituyendo u

$$y^{-3} = x + \frac{1}{3} + ce^{3x}$$

Despejando y se llega a la solución

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{x + \frac{1}{3} + ce^{3x}}}$$

Ejemplo 3: Resolver la ED de Bernoulli

Resolver la ED

$$x^2\frac{dy}{dx} + y^2 = xy$$

Solución

Primero se debe organizar la ecuación, pues no está en forma estándar $\wedge$ la y con exponente aparece en el lado izquierdo

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x^2}y^2$$

El valor de n es 2

$$u=y^{1-2} \Rightarrow u=y^{-1}$$

Despejando la y

$$y=u^{-1}$$

Derivando la y

$$dy=-u^{-2}du$$

Reemplazando la y $\wedge$ el dy en la ecuación de Bernoulli

$$\frac{-u^{-2}du}{dx}-\frac{1}{x}u^{-1}=-\frac{1}{x^2}(u^{-1})^2$$

la ecuación ya es lineal, se debe llevar a la forma estándar

$$\frac{-u^{-2}du}{-u^{-2}dx}-\frac{u^{-1}}{-u^{-2}x}=-\frac{u^{-2}}{-u^{-2}x^2}$$

Simplificando

$$\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}u=\frac{1}{x^2}$$

La ecuación es lineal en la variable dependiente u $\wedge$ además está en forma estándar.

$$p(x)=\frac{1}{x} \qquad F.I=x$$

Multiplicando la forma estándar por el $F.I$

$$xu = \int \frac{1}{x} dx$$

Integrando

$$xu = \ln|x| + c$$

Despejando u

$$u = \frac{\ln|x|}{x} + \frac{c}{x}$$

Sustituyendo u $\wedge$ aplicando potenciación

$$\boxed{y = \frac{x}{\ln|x| + c}}$$

Ejemplo 4: Resolver el PVI

Resolver la ED

$$x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4 \quad \text{Sujeta a} \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

Solución

Primero se debe llevar la ecuación a la forma estándar

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} y = \frac{3}{x^2} y^4$$

El valor de n es 4

$u = y^{1-4} \;\Rightarrow\; u = y^{-3}$ Despejando la y

$y = u^{-\frac{1}{3}}$ Derivando la y

$dy = -\dfrac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}du$ Reemplazando la y $\wedge$ el dy en la ecuación de Bernoulli

$\dfrac{-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}du}{dx} - \dfrac{2u^{-\frac{1}{3}}}{x} = \dfrac{3u^{-\frac{4}{3}}}{x^2}$ Ya la ecuación es lineal, se debe llevar a la forma estándar

$$\frac{-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}du}{-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}dx} - \frac{2u^{-\frac{1}{3}}}{-x\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}} = \frac{3u^{-\frac{4}{3}}}{-x^2\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}}$$

Simplificando

$\dfrac{du}{dx} + \dfrac{6}{x}u = -\dfrac{9}{x^2}$ Ecuación lineal en forma estándar.

$p(x) = \dfrac{6}{x} \qquad F.I = x^6$ Multiplicando la forma estándar por el $F.I$

$x^6u = \int -9x^4dx$ integrando el lado derecho de forma directa, obtenemos

$x^6u = \dfrac{-9}{5}x^5 + c$ Despejando la u y simplificando

$$u = \frac{-9}{5x} + \frac{c}{x^6}$$

Sustituyendo u

$$y^{-3} = \frac{-9}{5x} + \frac{c}{x^6}$$

Reemplazando valores iniciales

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{-9}{5(1)} + \frac{c}{(1)^6}$$

Operando

$$8 = \frac{-9}{5} + c$$

Despejando obtenemos el valor de c

$$c = \frac{49}{5}$$

Reemplazando en la respuesta obtenemos

$$y^{-3} = \frac{-9}{5x} + \frac{49}{5x^6}$$

Operando el lado derecho

$$y^{-3} = \frac{-9x^5 + 49}{5x^6}$$

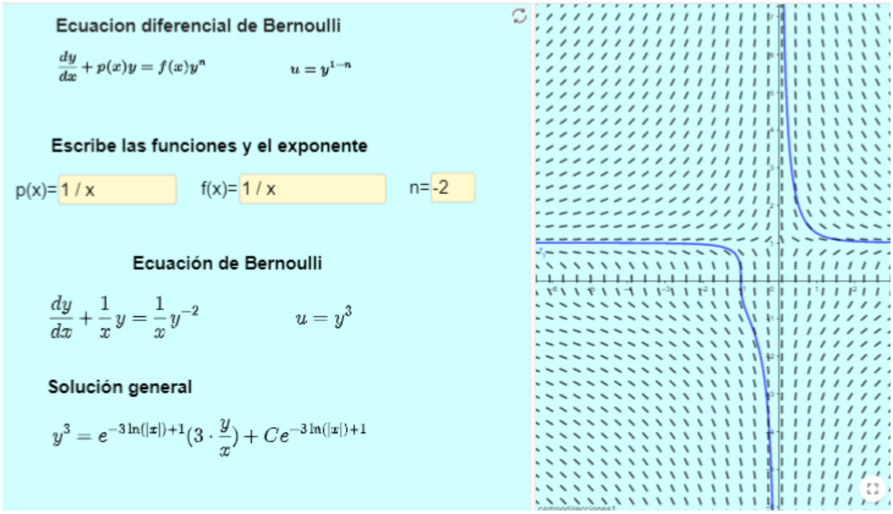
Bajamos la y para volver el exponente positivo

$$\frac{1}{y^3} = \frac{-9x^5 + 49}{5x^6}$$

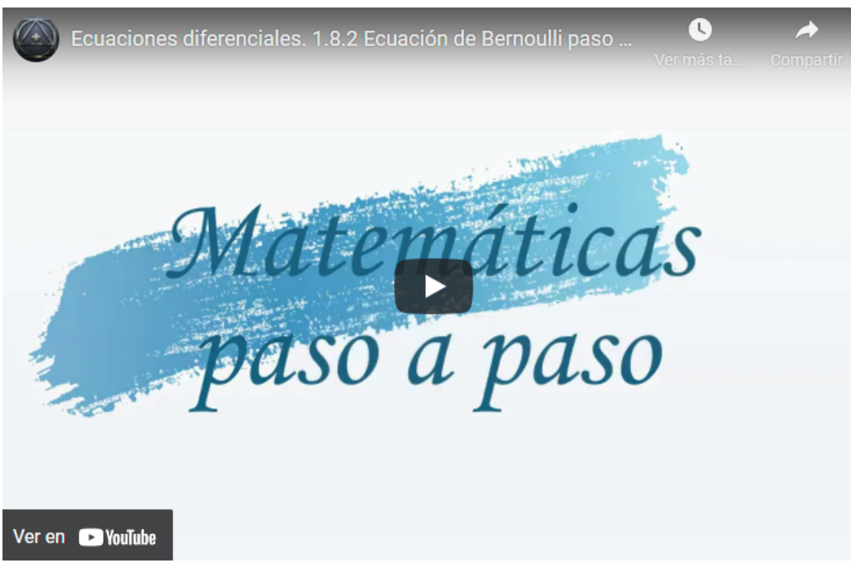
Despejando la y $\wedge$ sacando raíz cúbica obtenemos la siguiente respuesta

$$y = \sqrt[3]{\frac{5x^6}{-9x^5 + 49}}$$

En la siguiente escena interactiva, diseñada por Raul Enrique Escobar Caro, podrás resolver la ecuación de Bernoulli.



En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de ecuación de Bernoulli.



2.6.1 Ejercicios y respuestas de la sección 2.6

Ejercicios de repaso sección 2.6

Resolver las ecuaciones diferenciales de Bernoulli.

1. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^x y^2$

2. $x\dfrac{dy}{dx} - (1+x)y = xy^2$

3. $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$

4. $3(1+t^2)\dfrac{dy}{dt} = 2ty(y^3-1)$

5. $y^{\frac{1}{2}}\dfrac{dy}{dx} + y^{\frac{3}{2}} = 1$ Sujeta a $y(0) = 4$

6. $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} - y = xy^5$

8. $y' - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) y = y^2$

9. $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{2}{3}x^4y^4$

10. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{3}{x^2}y^4$

Respuestas

2.7 Ejercicios de modelado

Las ED tienen una importancia fundamental en las matemáticas debido a que es aplicable a casi todas las ramas del saber, entre ellas están: la geometría, la física, la química y la biología. Éstas permiten identificar y aplicar técnicas y conceptos matemáticos que admiten obtener e interpretar la solución de una situación problema en la que intervienen relaciones entre tasas o razones de cambio de variables definidas en diversos contextos.

Algunas de las aplicaciones de las ED de primer orden son: el crecimiento y decrecimiento poblacional, la desintegración radiactiva, el fechado de fósiles con carbono 14, el cambio en las temperaturas y los circuitos en serie, entre otros.

Las ED se utilizan para describir los comportamientos de algunos fenómenos de la vida real en términos matemáticos, dicho proceso recibe el nombre de **modelo matemático** y se utiliza para comprender las variables que lo conforman, la relación entre ellas, además de predecir el comportamiento de dicho fenómeno.

Cuando dicho modelo lo debe resolver un científico es necesario conocer la fuerza de gravedad que ejerce la tierra sobre dicho cuerpo o la temperatura de ebullición del agua dependiendo de la altitud donde se realice el experimento, más para efectos de este libro, el objetivo se reduce a resolver modelos de baja resolución por lo cual la fuerza de gravedad que se utiliza es de $9.8\frac{m}{seg^2}$ en el sistema MKS o $32\frac{pies}{seg^2}$ en el sistema inglés y la temperatura de ebullición del agua que se utilizará es de $100^{\circ}C$.

Es por esto que para terminar el capítulo se introduce el modelado de problemas a partir de las leyes físicas que los rigen y que conducen a EDO.

2.7.1 Crecimiento y decrecimiento

En 1798 el economista inglés Thomas Malthus intentó modelar el crecimiento de la población humana por medio de las matemáticas, su teoría dice que la rapidez con que varía la población de un país es proporcional al número de personas presentes en ese momento. En términos matemáticos, si $p(t)$ denota la población en función del tiempo, su hipótesis se puede expresar cómo

$$\frac{dp}{dt} \;\; \alpha p$$

Recuerde que en matemáticas, si dos cantidades $x \;\wedge\; y$ son proporcionales, se escribe $x \;\alpha\; y$ significando que x es un múltiplo constante de y, es decir, $x = ky$, por tanto, la ecuación $\frac{dp}{dt} \;\; \alpha p$ se puede reescribir como

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

Donde k es una constante de proporcionalidad.

Podemos observar que la ecuación contiene la derivada de una variable dependiente (población) con respecto a una variable independiente (tiempo), a esta ecuación se le conoce como ED y al resolverla teniendo en cuenta las condiciones iniciales del modelo matemático podemos predecir la cantidad de personas presentes en cualquier momento t. Aunque es un modelo simple bastante exacto, puede fallar si no se tienen en cuenta algunos factores como, por ejemplo, migración, inmigración y catástrofes naturales entre otros. Cuando se habla de seres vivos se puede usar para modelar el crecimiento de pequeñas poblaciones en intervalos cortos de tiempo.

Observemos que esta es una ED de primer orden, al organizarla nos queda

$$\frac{dp}{dt} - kp = 0$$

Esta es una ED lineal y está en forma estándar. Identificamos $p(t)$ y hallamos el factor integrante

$p(t) = -k \qquad F.I = e^{-kt}$	Aplicando la propiedad
$e^{-kt}p = \int 0dx$	Integrando
$e^{-kt}p = c$	despejando la y
$p = \dfrac{c}{e^{-kt}}$	La solución es

$$p = ce^{kt}$$

Esta es la solución de la ED para resolver ejercicios de crecimiento y decrecimiento poblacional. Esta ecuación es la misma que se utiliza para ejercicios de descomposición radiactiva, carbono 14 (C-14) e interés compuesto entre otros, por lo cual para efectos de simplificación de variables cuando no estemos trabajando ejercicios de crecimiento y decrecimiento poblacional, la ecuación la vamos a trabajar con la variable x

$$x = ce^{kt}$$

Ejemplo 1: Crecimiento poblacional

La población de Colombia crece a una tasa proporcional a la población presente en el tiempo (t). En el año 2005 el censo arrojó que había $41^{'}468.384$ habitantes, en 2018 el número de habitantes era de $48^{'}258.494$. ¿Cuál será el número de personas en 2030? Y ¿Cuándo habrá $100^{'}000.000$ de habitantes en Colombia?

Solución

Condiciones iniciales del problema. En 2005, el cual va a ser el tiempo inicial $t = 0$ el número de habitantes era de $41^{'}468.384$ y en 2018, o sea, 13 años más tarde el número de habitantes era de $48^{'}258.494$, las otras dos condiciones son las preguntas.

Condiciones iniciales.

$$t = 0 \qquad p = 41^{'}468.384$$

$$t = 13 \qquad p = 48^{'}258.494$$

$$t = 12 \qquad p = ?$$

$$t = ? \qquad p = 100^{'}000.000$$

Vamos a comenzar reemplazando el primer dato $p = 41^{'}468.384$ cuando $t = 0$ en la ecuación $p = ce^{kt} \qquad (1).$

Note que la ecuación (1) tiene cuatro incógnitas

$41^{'}468.384 = ce^{k(0)} \qquad \Rightarrow \qquad c = 41^{'}468.384$

Reemplazando este valor en la ecuación (1) queda de la siguiente forma $\quad p = 41^{'}468.384e^{kt} \qquad (2).$

Note que la ecuación (2) ya tiene sólo tres incógnitas

Ahora reemplazamos $p = 48^{'}258.494$ cuando $t = 13$ en la ecuación (2)

$48^{'}258.494 = 41^{'}468.384e^{k(13)}$ despejando queda

$$\frac{48^{'}258.494}{41^{'}468.384} = e^{13k}$$

Aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación

$$\ln\left|\frac{48^{'}258.494}{41^{'}468.384}\right| = \ln\left|e^{13k}\right|$$

$0.1516405482 = 13k$ despejando obtenemos el valor de k

$k = 0.01166465755$

Reemplazando este valor en la ecuación (2) obtenemos

$p = 41^{'}468.384e^{0.01166465755t} \qquad (3).$

Ya podemos responder la primera pregunta. Cuál será la población en 2030, es decir, en $t = 25$

$$p = 41^{'}468.384e^{0.01166465755(25)} \qquad \Rightarrow \qquad p = 55^{'}509.143$$

La población en Colombia en 2030 será de $55^{'}509.143$ habitantes

Ahora vamos a responder la segunda pregunta que dice, ¿Cuándo habrá $100^{'}000.000$ de habitantes en Colombia?

$$100^{'}000.000 = 41^{'}468.384e^{0.01166465755(t)} \qquad \Rightarrow \qquad t = 75.46$$

A mediados del año 2093 se espera que la población en Colombia sea de $100^{'}000.000$ de habitantes.

Ejemplo 2: Datado con carbono

En una cueva de Sudáfrica se halló un cráneo humano junto con los restos de una hoguera. Los arqueólogos creen que la edad del cráneo sea igual a la edad de la hoguera. Se determinó que sólo queda el 2% de la cantidad original de $C-14$ en los restos de la madera. Estime la edad del cráneo.

En 1955, Willard Frank Libby publicó una obra titulada Radiocarbon datingel en la cual habla sobre la teoría del fechado con radiocarbono (carbono 14) que se produce en la atmósfera por acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno.

El carbono 14 es un isótopo radioactivo inestable que se encuentra en la atmósfera, al oxidarse se transforma en dióxido de carbono que absorben las plantas y que se transmiten a otros organismos cuando éstas son consumidas. Este intercambio constante de carbono entre la atmósfera y los seres vivos se ve interrumpida cuando éstos mueren y es cuando comienza a desintegrarse en fracciones constantes, en los laboratorios especializados miden la cantidad de carbono 14 que se conservó de la muestra al paso del tiempo.

Solución

Para resolver el ejercicio es necesario plantear las condiciones iniciales del problema, teniendo en cuenta que la vida media del $C - 14$ es 5.600 años. Se sabe que inicialmente el cráneo tenía el 100% de $c - 14$. Siempre que un ejercicios nos hable de porcentaje lo vamos a dividir por cien.

Condiciones iniciales.

$t = 0 \qquad\qquad p = 1$

$t = 5600 \qquad p = 0.5$

$t = ? \qquad\qquad p = 0.02$

Vamos a comenzar reemplazando el primer dato $p = 1$ cuando $t = 0$ en la ecuación $p = ce^{kt} \qquad (1)$.

$$1 = ce^{k(0)} \qquad \Rightarrow \qquad c = 1$$

Reemplazando este valor en la ecuación (1) queda de la siguiente forma $\quad p = e^{kt} \qquad (2)$.

Ahora reemplazamos $p = 0.5$ cuando $t = 5600$ en la ecuación (2)

$$0.5 = e^{k(5600)}$$

Aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación

$$\ln|0.5| = \ln\left|e^{5600k}\right|$$

$-0.6931471806 = 5600k \qquad$ despejando obtenemos el valor de k

$$k = -0.0001237762$$

Reemplazando este valor en la ecuación (2) obtenemos

$$p = e^{-0.0001237762t} \qquad (3).$$

Ahora vamos a calcular la edad del cráneo, teniendo en cuenta que al momento de encontrar los restos de la madera sólo quedaba el 2% de la cantidad original de $C - 14$.

$$0.02 = e^{-0.0001237762t} \qquad \Rightarrow \qquad t = 31.607, 1.$$

La edad aproximada del cráneo es de $31.607, 6$ años.

Ejemplo 3: Crecimiento poblacional

La población de cierta ciudad aumenta proporcionalmente al número de habitantes que hay en un momento dado en ella. Si después de 5 años, la población se ha triplicado y después de 8 años es de 45.000 habitantes, hallar el número de ciudadanos que había inicialmente.

Solución

Se deben plantear las condiciones iniciales del problema. Como la incógnita es la población inicial, la vamos a llamar p_0 para poder trabajar la ecuación. Note que cuando el enunciado dice que a los 5 años la población se ha triplicado, se representa $3p_o$

Condiciones iniciales.

$$t = 0 \qquad\qquad p = p_0$$

$$t = 5 \qquad\qquad p = 3p_0$$

$$t = 8 \qquad\qquad p = 45.000$$

Reemplazamos el primer dato $p = p_0$ cuando $t = 0$ en la ecuación $p = ce^{kt} \qquad (1)$.

$$p_0 = ce^{k(0)} \qquad \Rightarrow \qquad c = p_0$$

Reemplazando este valor en la ecuación (1) queda de la siguiente forma $\quad p = p_0e^{kt} \qquad (2)$.

Ahora reemplazamos $p = 3p_0$ cuando $t = 5$ en la ecuación (2)

$3p_0 = p_0 e^{k(5)}$ despejando queda

$$\frac{3p_0}{p_0} = e^{5k}$$

Aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación

$$\ln|3| = \ln\left|e^{5k}\right|$$

$1.098612289 = 5k$ despejando obtenemos el valor de k

$$k = 0.2197224577$$

Reemplazando este valor en la ecuación (2) obtenemos

$p = p_0 e^{0.2197224577t}$ (3).

Ahora vamos a calcular la cantidad inicial de habitantes

$$45000 = p_0 e^{0.2197224577(8)}$$

Despejando p_0

$$p_0 = \frac{45000}{e^{0.2197224577(8)}}.$$

La cantidad inicial de habitantes en la ciudad es 7.759 habitantes

Ejemplo 4: Descomposición radiactiva

Se ha detectado que el 0.5% de una sustancia radioactiva desaparece en 12 años. ¿Qué porcentaje desaparecerá en 1.000 años? ¿Cuál es la vida media de dicha sustancia?

Solución

Condiciones iniciales.

$$t = 0 \qquad\qquad x = 1$$

$$t = 12 \qquad\qquad x = 0.995$$

$$t = ? \qquad\qquad x = 0.5$$

$$t = 1000 \qquad\qquad x = ?$$

Reemplazamos el primer dato $x = 1$ cuando $t = 0$ en la ecuación $p = ce^{kt} \qquad (1)$.

$1 = ce^{k(0)} \qquad \Rightarrow \qquad c = 1$

Reemplazando este valor en la ecuación (1) queda de la siguiente forma $\quad x = e^{kt} \qquad (2)$.

Ahora reemplazamos $x = 0.995$ cuando $t = 12$ en la ecuación (2)

$0.995 = e^{k(12)}$ aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación

$\ln|0.995| = \ln\left|e^{12k}\right|$

Despejando obtenemos $k = -0.00041771181$

Reemplazando este valor en la ecuación (2) obtenemos

$x = e^{-0.00041771181t} \qquad (3).$

Ahora vamos a calcular qué porcentaje desaparecerá en 1.000 años

$x = e^{-0.00041771181(1000)}$

$x = 65.85$ Esto quiere decir que a los mil años quedará el 65.85%

En 1.000 años desaparecerá el 34.15%

Ahora vamos a calcular la vida media de la sustancia radiactiva

$0.5 = e^{-0.00041771181(t)}.$

$\ln|0.5| = \ln\left|e^{-0.00041771181(t)}\right|$

$$t = \frac{-0.6931471806}{-0.00041771181}$$

La vida media de la sustancia radiactiva es 1659.4 años

Ejemplo 5: Interés compuesto

Previo al nacimiento de su primer hijo, una pareja deposita 5.000 dólares en una cuenta que paga el 8% de interés compuesto. Los pagos de interés son acumulables al capital. ¿Cuánto habrá en la cuenta en el dieciochoavo cumpleaños del niño?

Solución

En los ejercicios de modelado la k es la constante de crecimiento o decrecimiento del ejercicio, es la que determina a qué velocidad está creciendo o decreciendo una población o se descompone el carbono 14 o se desintegra determinado material radiactivo, en los ejercicios de interés compuesto el interés determina la rapidez de crecimiento del capital, es decir, que la k es el interés compuesto, para este ejercicio $k = 0.08$

Condiciones iniciales.

$$t = 0 \qquad\qquad x = 5000$$

$$t = 18 \qquad\qquad x = ?$$

Reemplazamos el primer dato $x = 5000$ cuando $t = 0$ en la ecuación $p = ce^{kt} \qquad (1)$.

$$5000 = ce^{k(0)} \qquad \Rightarrow \qquad c = 5000$$

Reemplazando este valor en la ecuación (1) queda de la siguiente forma $\quad x = 5000e^{kt} \qquad (2)$.

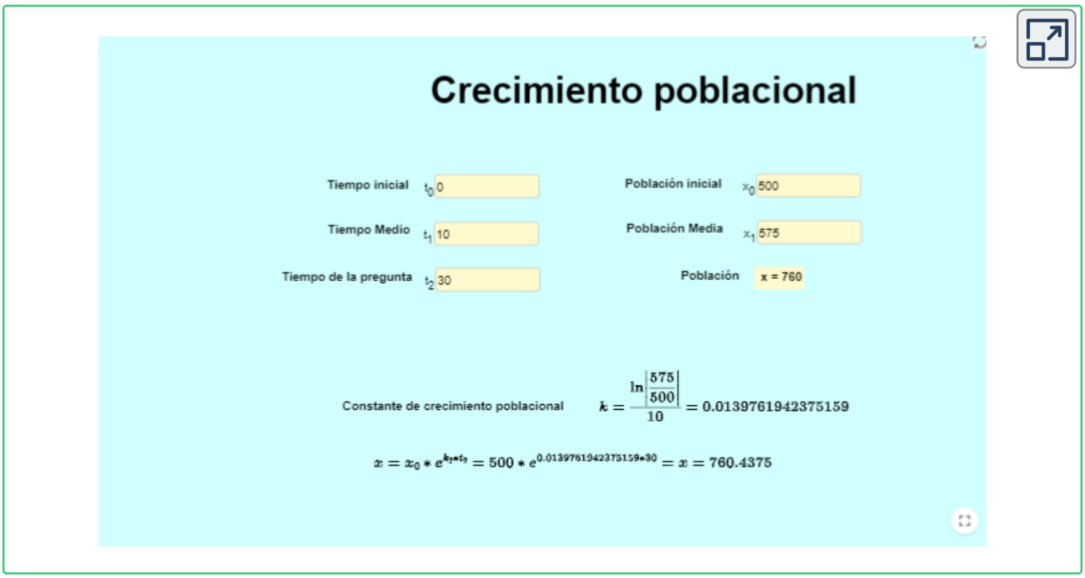
Ahora reemplazamos $k = 0.08 \wedge t = 18$ en la ecuación (2)

$x = 5000e^{(0.08)(18)} \qquad x = 21103,47.$

Al dieciochoavo cumpleaños del niño habrá en la cuenta $21103,47$ dólares

En la página 199 puedes observar un vídeo de aplicación de crecimiento y decrecimiento.

En la siguiente escena interactiva, podrás resolver ejercicios de crecimiento poblacional, debes ingresar las condiciones iniciales del ejercicio.



2.7.2 Ejercicios y respuestas de la sección 2.7.1

Ejercicios de repaso sección 2.7.1

Resolver los ejercicios de crecimiento y decrecimiento.

1. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta en un instante cualquiera con una rapidez proporcional al número de personas presentes en dicho instante. Si la población se duplica en 5 años ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse? ¿Cuánto tiempo tardará en cuadruplicarse?

2. Suponga que la comunidad del problema anterior es de 10.000 personas después de tres años. ¿Cuál era la población inicial? ¿Cuál será la población en 10 años?

3. la población de un pueblo crece a una tasa proporcional a la población presente en el tiempo (t). La población inicial es 500 habitantes y aumenta el 15% en 10 años. ¿Cuál será la población en 30 años?

4. Un cultivo tiene inicialmente una cantidad de bacterias x_0 , después de una hora el número de bacterias es $\frac{3}{2}x_0$. Si la rapidez de crecimiento es proporcional al número de bacterias presentes. Determine el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique.

5. En cualquier momento (t) la cantidad de bacterias de un cultivo crece a razón proporcional al número de bacterias presentes. Al cabo de tres horas se observa que hay 400 bacterias. Después de 10 horas hay 2000 bacterias. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

6. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Al cabo de 6 horas, esa cantidad disminuyó el 3%. Si la razón de desintegración en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de sustancia presente, calcule la cantidad que queda después de 24 horas.

7. En 1990 el departamento de recursos naturales liberó 1000 ejemplares de una especie de pez en un lago. En 1997 la población de estos peces en el lago era de 3000. Estime la población de peces en el lago en el año 2020.

Respuestas

2.7.3 Temperaturas

La ley de enfriamiento de Newton dice que en un cuerpo que se está enfriando, la rapidez con que la temperatura T cambia, es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura constante T_m del medio que lo rodea, esto es:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Podemos ver que esta es una ED de variables separables. Separando variables tenemos

$$\frac{dT}{(T - T_m)} = kdt$$

Integrando ambos lados de la ED. El lado izquierdo se integra por sustitución.

$$\ln |T - T_m| = kt + c$$

Quitando el logaritmo

$$e^{\ln |T - T_m|} = e^{kt+c}$$

$$T - T_m = ce^{kt}$$

Despejando la temperatura obtenemos la solución

$$T = T_m + ce^{kt}$$

La solución es muy similar a la de crecimiento y decrecimiento, se diferencia en que tenemos un dato más que es la temperatura del medio T_m, por esto los ejercicios se resuelven de forma similar.

Ejemplo 1: Temperatura

Una taza de café se sirve a una temperatura de $70^{\circ}C$ en un cuarto cuya temperatura es de $17^{\circ}C$. Dos minutos más tarde la temperatura del café es de $60^{\circ}C$. ¿Después de cuánto tiempo la taza de café alcanza la temperatura de $20^{\circ}C$?

Solución

Se plantean las condiciones iniciales del problema.

Condiciones iniciales.

$$\begin{array}{ll} t=0 & T=70^{\circ}C \\ t=2 & T=60^{\circ}C \\ t=? & T=20^{\circ}C \\ & T_m=17^{\circ}C \end{array}$$

Vamos a comenzar reemplazando el primer dato $T=70^{\circ}C$ cuando $t=0$ en la ecuación $T=T_m+ce^{kt}$ $\quad (1)$.

$$70 = 17 + ce^{k(0)} \qquad \Rightarrow \qquad c = 53$$

Reemplazando este valor en la ecuación (1) queda de la siguiente forma $\quad T = 17 + 53e^{kt} \qquad (2)$.

Ahora reemplazamos $T = 60$ cuando $t = 2$ en la ecuación (2)

$60 = 17 + 53e^{k(2)}$ despejando queda $\dfrac{43}{53} = e^{k(2)}$

Aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación

$$\ln\left|\frac{43}{53}\right| = \ln\left|e^{2k}\right|$$

$-0.2090917979 = 2k$ despejando obtenemos el valor de k

$$k = -0.1045458989$$

Reemplazando este valor en la ecuación (2) obtenemos

$$T = 17 + 53e^{-0.1045458989t} \qquad (3).$$

Ahora vamos a calcular cuánto tiempo se demora la taza de café para llegar a $20^\circ C$

$$20 = 17 + 53e^{-0.1045458989t} \qquad \Rightarrow \qquad t = 27,46.$$

La taza de café se demora $27,46$ minutos para llegar a $20^\circ C$

Ejemplo 2: Temperatura

Un termómetro que indica $70^\circ F$ se coloca en un horno precalentado a temperatura constante. A través de una ventana de vidrio del horno, un observador registra que la temperatura es de $110^\circ F$ después de medio minuto y de $145^\circ F$ después de un minuto. ¿A qué temperatura está el horno?

Solución

Se plantean las condiciones iniciales del problema.

Condiciones iniciales.

$$t = 0 \qquad T = 70^\circ F$$

$$t = 0.5 \qquad T = 110^\circ F$$

$$t = 1 \qquad T = 145^\circ F$$

$$T_m = ?$$

Vamos a comenzar reemplazando el primer dato $T = 70^\circ C$ cuando $t = 0$ en la ecuación $T = T_m + ce^{kt} \qquad (1)$.

$$70 = T_m + ce^{k(0)} \qquad \Rightarrow \qquad c = 70 - T_m$$

Reemplazando este valor en la ecuación (1) queda de la siguiente forma $\quad T = T_m + (70 - T_m)e^{kt} \quad (2)$.

Ahora reemplazamos $T = 110$ cuando $t = 0.5$ en la ecuación (2)

$110 = T_m + (70 - T_m)e^{k(0.5)} \qquad (3) \qquad$ Nos queda una ecuación con dos incógnitas, como no se puede resolver una ecuación con dos incógnitas, entonces, reemplazamos la otra condición para tener una segunda ecuación.

$$145 = T_m + (70 - T_m)e^{k(1)} \qquad (4)$$

Despejando Euler de la ecuación (3) $e^{0.5k} = \dfrac{110 - T_m}{70 - T_m} \qquad (5)$

Despejando Euler de la ecuación (4) $e^{k} = \dfrac{145 - T_m}{70 - T_m} \qquad (6)$

No podemos igualar las ecuaciones $(5) \quad \wedge \quad (6)$

Aplicamos axioma de igualdad a la ecuación (5) elevando al cuadrado a ambos lados

$$\left[e^{0.5k}\right]^2 = \left[\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right]^2 \;\Rightarrow\; e^k = \left[\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right]^2 \qquad (7)$$

Ahora igualamos las ecuaciones $(6) \quad \wedge \quad (7)$

$$\frac{145 - T_m}{70 - T_m} = \left[\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right]^2$$

Aplicando potenciación

$$\frac{145 - T_m}{70 - T_m} = \frac{[110 - T_m]^2}{[70 - T_m]^2}$$

Simplificando

$$145 - T_m = \frac{[110 - T_m]^2}{70 - T_m}$$

Despejando

$$(145 - T_m)(70 - T_m) = [110 - T_m]^2$$

Haciendo distributiva y desarrollando el binomio

$$10.150 - 215T_m + [T_m]^2 = 12100 - 220T_m + [T_m]^2$$

Agrupando términos semejantes

$$5T_m = 1950$$

Despejando T_m

$$T_m = \frac{1950}{5}$$

La temperatura al interior del horno es de $390^\circ F$

Cuando se resuelven ejercicios de crecimiento y decrecimiento o de temperaturas y piden población inicial, temperatura inicial o temperatura del medio, siempre se debe plantear un sistema de ecuaciones para poder resolver el ejercicio.

Ejemplo 3: Temperatura

Un termómetro se lleva del interior de una habitación donde la temperatura del aire es de $80^\circ F$ al exterior donde la temperatura del aire es de $15^\circ F$. después de un minuto el termómetro indica $55^\circ F$. ¿Cuál es la temperatura del termómetro en $t = 2$ minutosS? ¿Cuánto tiempo le tomará alcanzar $19^\circ F$

Solución Se plantean las condiciones iniciales del problema.

Condiciones iniciales.

$t = 0$	$T = 80^\circ F$
$t = 1$	$T = 55^\circ F$
$t = 2$	$T = ?$
$t = ?$	$T = 19^\circ F$
	$Tm = 15^\circ F$

Vamos a comenzar reemplazando el primer dato $T = 80^\circ C$ cuando $t = 0$ en la ecuación $T = T_m + ce^{kt} \qquad (1)$.

$$80 = 15 + ce^{k(0)} \qquad \Rightarrow \qquad c = 65$$

Reemplazando este valor en la ecuación (1) queda de la siguiente forma $\quad T = 15 + 65e^{kt} \quad (2)$.

Ahora reemplazamos $T = 55$ cuando $t = 1$ en la ecuación (2)

$55 = 15 + 65e^{k(1)}$ despejando queda $\dfrac{40}{65} = e^{k}$

Aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación

$\ln\left|\dfrac{40}{65}\right| = \ln\left|e^{k}\right|$ obtenemos el valor de k

$$k = -0.4855078$$

Reemplazando este valor en la ecuación (2) obtenemos

$$T = 15 + 65e^{-0.4855078t} \qquad (3).$$

Ahora vamos a calcular la temperartura a los 2 minutos

$$T = 15 + 65e^{(-0.4855078)(2)} \quad \Rightarrow \quad T = 39.61.$$

La temperatura a los dos minutos es $39.61^{\circ}F$

Ahora vamos a calcular cuánto tiempo se demora el termómetro para llegar a $19^{\circ}F$

$19 = 15 + 65e^{-0.4855078t}$ \$

$$\ln\left|\frac{4}{65}\right| = \ln\left|e^{-0.4855078t}\right| \quad \Rightarrow \quad t = 5,74$$

El termómetro se demora $5,74$ minutos para llegar a $19^{\circ}F$

Ejemplo 4: Temperatura

Se sumerge una barra de acero en un líquido que está a una temperatura de $110^{\circ}C$, la barra está a $32^{\circ}C$, un segundo después su temperatura aumenta $4^{\circ}C$. ¿Cuál será la temperatura de la barra a los 10 segundos? ¿Cuánto tiempo le tomará alcanzar $100^{\circ}C$

Solución

Tenga en cuenta que la temperatura de la barra aumenta $4^{\circ}C$ en un segundo, es decir en $t=1$ la temperatura es $36^{\circ}C$.

Condiciones iniciales.

$$
\begin{array}{ll}
t=0 & T=32^{\circ}C \\
t=1 & T=36^{\circ}C \\
t=10 & T=? \\
t=? & T=100^{\circ}C \\
 & Tm=110^{\circ}C
\end{array}
$$

Vamos a comenzar reemplazando el primer dato $T = 32°C$ cuando $t = 0$ en la ecuación $T = T_m + ce^{kt} \qquad (1)$.

$32 = 110 + ce^{k(0)} \qquad \Rightarrow \qquad c = -78$

Reemplazando este valor en la ecuación (1) queda de la siguiente forma $\quad T = 110 - 78e^{kt} \qquad (2)$.

Ahora reemplazamos $T = 36$ cuando $t = 1$ en la ecuación (2)

$36 = 110 - 78e^{k(1)}$ despejando queda $\quad \dfrac{-74}{-78} = e^k$

Aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación

$\ln\left|\dfrac{74}{78}\right| = \ln\left|e^k\right|$ obtenemos el valor de k

$k = -0.05264373$

Reemplazando este valor en la ecuación (2) obtenemos

$T = 110 - 78e^{-0.05264373t} \qquad (3)$.

Ahora vamos a calcular la temperatura a los 10 segundos

$T = 110 - 78e^{(-0.05264373)(10)} \qquad \Rightarrow \qquad T = 63.92.$

La temperatura a los 10 segundos es $63.92°C$

Ahora vamos a calcular cuánto tiempo se demora el termómetro para llegar a $100°C$

$100 = 110 - 78e^{-0.05264373t}$ despejando queda

$$\frac{-10}{-78} = e^{-0.05264373t}$$

Aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación

$$\ln\left|\frac{10}{78}\right| = \ln\left|e^{-0.05264373t}\right| \quad \Rightarrow \quad t = 39.01$$

El termómetro se demora 39.01 segundos para llegar a $100^\circ F$

Ejemplo 5: Temperatura

Se encuentra el cuerpo de un hombre una mañana fría en una habitación cuya temperatura es $15^\circ C$, un detective mide la temperatura del cuerpo y el termómetro indica $36^\circ C$, una hora después vuelve a medir la temperatura del cuerpo y el termómetro indica $35.2^\circ C$. En qué momento ocurrió el asesinato.

[Sugerencia: La temperatura normal del cuerpo es de $37^\circ C$].

Solución

Condiciones iniciales.

$t = 0$ $\qquad T = 37°C$

$t = t$ $\qquad T = 33°C$

$t = t + 1$ $\qquad T = 32.1$

$Tm = 15°C$

Vamos a comenzar reemplazando el primer dato $T = 37°C$ cuando $t = 0$ en la ecuación $T = T_m + ce^{kt} \qquad (1)$.

$37 = 15 + ce^{k(0)} \qquad \Rightarrow \qquad c = 22$

La ecuación (1) queda de la siguiente forma $\quad T = 15 + 22e^{kt} \quad (2)$.

Ahora reemplazamos $T = 33$ cuando $t = t$ en la ecuación (2)

$33 = 15 + 22e^{k(t)}$ $\quad$ despejando queda $\quad \dfrac{18}{22} = e^{kt}$

Aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación

$\ln\left|\dfrac{18}{22}\right| = \ln\left|e^{kt}\right|$ $\quad$ obtenemos una ecuación con dos incógnitas$

$kt = -0.20067079 \qquad (3)$ $\qquad$ Nos queda una ecuación con dos incógnitas, como no se puede resolver, reemplazamos la otra condición para tener una segunda ecuación.

$32.1 = 15 + 22e^{k(t+1)}$ $\quad$ despejando queda $\quad \dfrac{17.1}{22} = e^{k(t+1)}$

Aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación

$\ln\left|\dfrac{17.1}{22}\right| = \ln\left|e^{k(t+1)}\right|$ obtenemos

$k(t+1) = -0.25196398 \qquad (4)$

Despejamos k de las ecuaciones (3)

$$k = \frac{-0.20067079}{t} \qquad (5)$$

Despejamos k de las ecuaciones (4)

$$k = \frac{-0.25196398}{t+1} \qquad (6)$$

Igualamos $(5) \quad \wedge \quad (6)$

$$\frac{-0.20067069}{t} = \frac{-0.25196398}{t+1}$$

Operando obtenemos

$-0.20067069t - 0.20067069 = -0.25196398t$

Agrupando términos semejantes

$0.05129329t = 0.20067069$ despejando $t = 3.912$

3.912 horas equivale a 235 minutos

El asesinato ocurrió a las $8:06$ am

En la página 199 puedes observar un vídeo de aplicación de temperaturas.

2.7.4 Ejercicios y respuestas de la sección 2.7.3

Ejercicios de repaso sección 2.7.3

Resolver los ejercicios de temperaturas.

1. Un termómetro se lleva del interior de una habitación donde la temperatura del aire es de $70^{\circ}F$ al exterior donde la temperatura del aire es de $10^{\circ}F$. después de medio minuto el termómetro indica $50^{\circ}F$. ¿Cuál es la temperatura del termómetro en $t = 1$ minuto? ¿Cuánto tiempo le tomará alcanzar $15^{\circ}F$?

2. Un termómetro se lleva del interior de una habitación al exterior, donde la temperatura del aire es de $5^{\circ}F$. después de 1 minuto el termómetro indica $55^{\circ}F$. 5 minutos después marca $30^{\circ}F$. ¿Cuál será la temperatura del interior de la habitación?

3. Dos grandes tanques A y B del mismo tamaño se llenan con fluidos diferentes. Los fluidos en los tanques A y B se mantienen a $0^{\circ}C$ y a $100^{\circ}C$, respectivamente. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es $100^{\circ}C$, se sumerge dentro del tanque A. Después de 1 minuto la temperatura de la barra es de $90^{\circ}C$. Después de 2 minutos se saca la barra e inmediatamente se transfiere al otro tanque. Después de 1 minuto en el tanque B la temperatura se eleva $10^{\circ}C$. ¿Cuánto tiempo medido desde el comienzo de todo el proceso, le tomará a la barra alcanzar los $99.9^{\circ}C$?

4. Una pequeña barra metálica cuya temperatura inicial es de $20^{\circ}C$ se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar $90^{\circ}C$ si se sabe que incrementa $2^{\circ}C$ en un segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a $98^{\circ}C$?

5. Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es de $100^{\circ}F$ y se lleva al exterior donde la temperatura es de $23^{\circ}F$. Después de medio minuto el termómetro indica $75^{\circ}F$ ¿Cuál será la lectura después de un minuto? ¿Cuánto tiempo se demorará para que el termómetro llegue a $30^{\circ}F$?

Respuestas

2.7.5 Mezclas

las soluciones químicas, entendiéndose estas como un sistema homogéneo donde hay mayor proporción de soluto que de solvente, conllevan la necesidad de comprender el concepto de concentración, el cual no es más que la relación entre la cantidad de soluto y la cantidad de solvente. Las ED son una herramienta para comprender el comportamiento de las mezclas de dos o más soluciones en un recipiente bajo ciertas condiciones

Se tomará la sal como soluto para definir la ED, pero es importante resaltar que es igualmente aplicable a todo tipo de soluciones homogéneas, pues la ecuación mide la variación de la cantidad de soluto presente en la mezcla en cualquier momento t

Al mezclar dos soluciones salinas de distintas concentraciones surge una ecuación diferencial de primer orden, que define la cantidad de sal contenida en la mezcla. $A(t)$ denota la cantidad de sal (medida en libras) en el tanque en el tiempo t, entonces la razón con la que $A(t)$ cambia es una razón neta:

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2}$$

La rapidez está dada por

$R_1 =$ Velocidad de entrada por concentración

$R_2 =$ Velocidad de salida por concentración

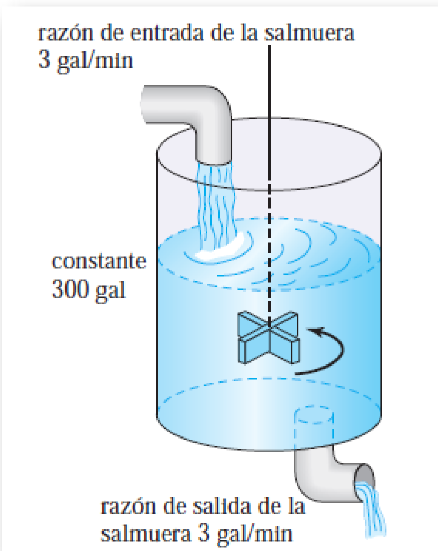
La rapidez con la que la sal entra es $\frac{lbs}{min}$

Ejemplo 1: Mezclas

Se disuelve inicialmente 50 libras de sal en un tanque con 300 galones de agua. Se bombea Salmuera al tanque a razón $3\frac{gal}{min}$ y luego la solución adecuadamente mezclada se bombea fuera del tanque a razón de $3\frac{gal}{min}$. Si la concentración de la solución que entra es de $2\frac{lib}{gal}$, determine la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuánta sal hay después de 50 min? ¿Cuánta después de un largo tiempo?

Solución

La ilustración ayuda a comprender lo que está pasando en el tanque.



En el tanque está entrando salmuera a razón de $3\frac{gal}{min}$ con una concentración de $2\frac{lib}{gal}$. Es decir, $R_1 = 3\frac{gal}{min}.2\frac{lib}{gal} = 6\frac{lib}{min}$

Inicialmente en el tanque hay 300 galones de salmuera, entonces para hallar R_2 se plantea la ecuación $R_2 = r_e.\frac{A}{V+(r_e-r_s)t}$.

Reemplazando datos en la ecuación.

$$R_2 = 3\frac{gal}{min}.\frac{A}{300+(3-3)t}\frac{lib}{gal} = \frac{A}{100}\frac{lib}{min}.$$

Reemplazando estos datos en la ED $\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2$ nos queda

$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}$ organizando la ED

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{100}A = 6$$

Tenemos una ED lineal no homogénea y está en forma estándar. Identificamos $p(t) \wedge$ hallamos el factor integrante.

$p(t) = \frac{1}{100}$ $\quad F.I = e^{\frac{t}{100}}$

Aplicamos la propiedad para resolverla.

$F.Iy = \int F.If(x)dx$

$e^{\frac{t}{100}}A = \int 6e^{\frac{t}{100}}dt$

Integrando el lado derecho

$e^{\frac{t}{100}}A = 600e^{\frac{t}{100}} + c$

Despejamos la variable dependiente A

$A = 600 + ce^{-\frac{t}{100}}$

Ahora reemplazamos condiciones iniciales $A(0) = 50$ para hallar la c

$50 = 600 + ce^0$

El valor de la constante es

$c = -550$ La solución es

$$A(t) = 600 - 550e^{-\frac{t}{100}}$$

Teniendo la ecuación de concentración de sal, podemos responder las dos preguntas

Para saber la cantidad de sal a los 50 minutos se reemplaza, la $t = 50$

$A(50) = 600 - 550e^{-\frac{50}{100}}$

$A(50) = 266.4$

La cantidad de sal que hay a los 50 minutos es 266.4 libras

Ahora necesitamos saber la cantidad de sal después de un largo tiempo, es decir, $t = \infty$

$A(\infty) = 600 - 550e^{-\frac{\infty}{100}}$

$A(\infty) = 600$

La cantidad de sal que hay despues de un largo tiempo es 600 libras

Ejemplo 2: Mezclas

Un tanque contiene 450 litros de agua en el que se disuelven 30 gramos de sal: Una salmuera que contiene $3\frac{gr}{l}$ se bombea al tanque con una intensidad de $6\frac{l}{min}$, la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera con una intensidad de $8\frac{l}{min}$. Determine la cantidad de libras de sal que hay en el tanque en cualquier instante. ¿Cuándo se vacía el tanque?

Solución

En el tanque está entrando salmuera a razón de $6\frac{l}{min}$ con una

concentración de $3\frac{gr}{l}$. Es decir, $R_1 = 6\frac{l}{min}.3\frac{gr}{l} = 18\frac{gr}{min}$

Inicialmente en el tanque hay 450 litros de salmuera, entonces para hallar R_2 se plantea la ecuación $R_2 = r_e.\dfrac{A}{V+(r_e-r_s)t}$.

Reemplazando datos en la ecuación.

$$R_2 = 8\frac{l}{min}.\frac{A}{450+(6-8)t}\frac{lib}{gal} = 8\frac{A}{450-2t}\frac{gr}{min}.$$

Reemplazando estos datos en la ED $\dfrac{dA}{dt} = R_1 - R_2$ nos queda

$\dfrac{dA}{dt} = 18 - 4\dfrac{A}{225-t}$ organizando la ED

$$\frac{dA}{dt} + \frac{4}{225-t}A = 18$$

Tenemos una ED lineal no homogénea y está en forma estándar. Identificamos $p(t) \wedge$ hallamos el factor integrante.

$$p(t) = \frac{4}{225-t} \quad F.I = (225-t)^{-4}$$

Ahora aplicamos la propiedad para resolverla

$$(225-t)^{-4}A = \int 18(225-t)^{-4}dt$$

Integrando el lado derecho de la ecuación

$$(225-t)^{-4}A = 6(225-t)^{-3} + c$$

Despejamos la variable dependiente A

$$A = 6(225-t) + c(225-t)^4$$

Ahora reemplazamos condiciones iniciales $A(0) = 30$ para hallar la c

$$30 = 6(225) + c(225)^4$$

El valor de la constante es

$$c = -\frac{1320}{(225)^4}$$

La solución es

$$A = 6\,(225-t) - 1320\left(\frac{225-t}{225}\right)^4$$

La ecuación que nos ayuda a determinar la cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier momento es

$$A(t) = 6\,(225 - t) - 1320\left(\frac{225 - t}{225}\right)^4$$

Ahora necesitamos saber cuándo se vacía el tanque. Como la intensidad de salida es mayor que la intensidad de entrada, es lógico que llega un momento en que el tanque estará vacío

Utilizamos la condición $450 + (6 - 8)t$. entonces es necesario igualar esta ecuación a cero y despejar t

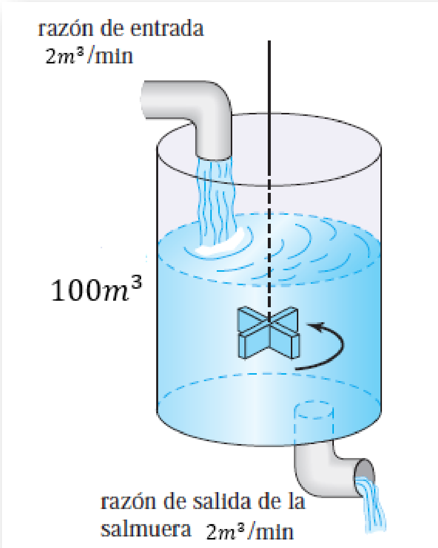
El tanque se vacía en $t = 225$ minutos

Ejemplo 3: Mezclas

Un estanque contiene $100m^3$ de agua contaminada. Con el propósito de descontaminarlo se introduce agua limpia a razón de $2\frac{m^3}{min}$ y el agua contaminada (uniformemente mezclada) se deja salir del estanque a la misma razón. ¿Qué porcentaje de contaminantes se habrá eliminado después de 1 h? ¿Qué tiempo debe transcurrir para que los contaminantes disminuyan en un 90%?

Solución

La ilustración ayuda a comprender lo que está pasando en el tanque.



En el tanque está entrando agua limpia a razón de $2\frac{m^3}{min}$ con una concentración de 0 contaminación.
Es decir, $R_1 = 2\frac{m^3}{min}.0 = 0$

Inicialmente en el tanque hay $100m^3$ de agua contaminada, entonces para hallar R_2 se plantea la ecuación $R_2 = r_e.\frac{A}{V+(r_e-r_s)t}$.

Reemplazando datos en la ecuación.

$$R_2 = 2.\frac{A}{100+(2-2)t} = \frac{A}{50}\frac{m^3}{min}.$$

Reemplazando estos datos en la ED $\dfrac{dA}{dt} = R_1 - R_2$ nos queda

$\dfrac{dA}{dt} = 0 - \dfrac{A}{50}$ organizando la ED

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{50}A = 0$$

ED lineal homogénea en forma estándar. Identificamos $p(t)$

$$p(t) = \frac{1}{50} \qquad F.I = e^{\frac{t}{50}}$$

Ahora aplicamos la propiedad para resolverla

$e^{\frac{t}{50}}A = \int 0dt$ Integrando obtenemos

$e^{\frac{t}{50}}A = c$ Despejamos la variable dependiente A

$A = ce^{\frac{t}{50}}$ Ahora reemplazamos condiciones iniciales $A(0) = A_0$ para hallar la c

$A_0 = ce^{\frac{0}{50}}$ El valor de la constante es

$c = A_0$ La solución es

$$A(t) = A_0e^{\frac{t}{50}}$$

Teniendo la ecuación de concentración de contaminante, podemos responder las dos preguntas

Para saber el porcentaje de contaminante que se habrá eliminado después de 60 minutos

$A(t) = A_0e^{\frac{60}{50}}$

La cantidad de contaminante que hay después de 1 hora es $0.3012A_0$

Ahora vamos a calcular qué porcentaje es esta cantidad de A_0

$$\frac{A_0 - 0.3012A_0}{A_0} = \frac{A_0(1 - 0.3012)}{A_0} = 0.6989$$

Después de una hora se habrá eliminado el 69.89% del contaminante del estanque

Ejemplo 4: Mezclas

El aire del interior de un pequeño cuarto con dimensiones de $12x8x8$ metros contiene 3% de monóxido de carbono. Empezando en $t = 0$, se sopla aire fresco que no contiene monóxido de carbono hacía el interior del cuarto a razón de $100\frac{m^3}{min}$. Si el aire del cuarto sale al exterior a través de una abertura a la misma velocidad.

¿Cuándo tendrá el aire del interior del cuarto 0.01% de monóxido de carbono?

Solución

La cantidad de monóxido de carbono que hay inicialmente en el cuarto es el 3% del volumen $V = 768m^3$

$$A(0) = \frac{768x3}{100} = 23.04$$

En el cuarto entra aire limpio a razón de $100\frac{m^3}{min}$. Es decir, $R_1 = 100\frac{m^3}{min}.0 = 0$

Inicialmente en el cuarto hay $768m^3$ litros de salmuera, entonces para hallar R_2 se plantea la ecuación $R_2 = r_e.\dfrac{A}{V+(r_e - r_s)t}$.

Reemplazando datos en la ecuación.

$$R_2 = 100.\frac{A}{768+(100-100)t} = \frac{100A}{768} = \frac{25A}{192}.$$

Reemplazando estos datos en la ED $\dfrac{dA}{dt} = R_1 - R_2$ nos queda

$\dfrac{dA}{dt} = 0 - \dfrac{25A}{192}$ organizando la ED

$$\frac{dA}{dt} + \frac{25}{192}A = 0$$

ED lineal homogénea en forma estándar. Identificamos $p(t)$ $\wedge$ hallamos el factor integrante.

$p(t) = \dfrac{25}{192} \quad F.I = e^{\frac{25}{192}t}$ Ahora aplicamos la propiedad para resolverla

$e^{\frac{25}{192}t}A = \int 0dt$ Integrando el lado derecho de la ecuación

$e^{\frac{25}{192}t}A = c$ Despejamos A

$A = ce^{-\frac{25}{192}t}$

Ahora reemplazamos condiciones iniciales $A(0) = 23.04$ para hallar la c

$23.04 = ce^{-\frac{25}{192}(0)}$

El valor de la constante es

$c = 23.04$

La solución es

La ecuación que determina la concentración de monóxido de carbono en función del tiempo es:

$$A = 23.04e^{-\frac{25}{192}t}$$

Ahora podemos responder la pregunta. ¿Cuándo tendrá el aire del interior del cuarto 0.01% de monóxido de carbono?

$0.0768 = 23.04e^{-\frac{25}{192}t}$

$\ln\left|\dfrac{0.0768}{23.04}\right| = \ln\left|e^{-\frac{25}{192}t}\right|$ obtenemos

$t = 43.805$

En un tiempo de $t = 43.8$ minutos el aire del interior del cuarto tendrá 0.01% de monóxido de carbono

En la página 200 puedes observar un vídeo de aplicación de mezclas.

2.7.6 Ejercicios y respuestas de la sección 2.7.5

Ejercicios de repaso sección 2.7.5

Resolver los ejercicios de mezclas.

1. Un tanque tiene 500 galones de agua pura y entra salmuera con 2 libras de sal por galón a razón de $5\dfrac{gal}{min}$. El tanque está bien mezclado y de él sale la solución con la misma rapidez. Determine $A(t)$ en libras de sal que hay en cualquier instante (t). Cuál es la concentración en $t = 5$ minutos?

2. Resuelva el ejercicio anterior suponiendo que la solución sale con una razón de 10 galones por minuto. ¿Cuándo se vacía el tanque?

3. Un tanque contiene 200 litros de un líquido en el que se han disuelto 30 gramos de sal. Una salmuera que contiene un gramo de sal por litro, se bombea al tanque con una intensidad de 4 litros por minuto; la solución bien mezclada se bombea hacia afuera con la misma rapidez. Encuentre la cantidad $A(t)$ de gramos de sal que hay en el tanque al tiempo t.

4. Resuelva el ejercicio anterior suponiendo que al tanque entra agua pura

5. Un gran tanque está parcialmente lleno con 100 galones de fluido en los que se disolvieron 10 libras de sal. La salmuera tiene media libra de sal por galón que entra al tanque a razón de $6\dfrac{gal}{min}$. La solución bien mezclada sale del tanque a razón de $4\dfrac{gal}{min}$. Determine la cantidad de libras de sal que hay en el tanque después de 30 minutos.

6. Un tanque contiene 100 galones de agua y le entra salmuera con $\frac{1}{4}$ de libra de sal por galón a razón de 3 gal/min. El tanque está mezclado y sale de él con la misma rapidez. Calcule la cantidad $A(t)$ de libras de sal que hay en el tanque en cualquier momento t.

7. Una alberca cuyo volumen es de 10000 litros contiene agua con el 0.001% de cloro. Empezando

Respuestas

2.7.7 Circuitos en serie

Circuitos LR: Cuando un circuito en serie sólo contiene un inductor (L) y un resistor (R), la segunda ley de Kirchhoff establece que:

la suma de las caídas de voltaje a través de un inductor $L\dfrac{di}{dt}$ y de un resistor (iR) es igual al voltaje aplicado $E(t)$ al circuito

Circuito LR en serie

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \qquad (1)$$

Circuitos RC: Cuando un circuito en serie sólo contiene un resistor (R) y un capacitor (C), la caída de voltaje a través de un capacitor de capacitancia (C) es

$\dfrac{Q(t)}{c}$ donde q es la carga en el capacitor.

Por la segunda ley de kirchhoff $\quad Ri + \dfrac{i}{C} + q = E(t) \quad (2)$

La corriente (i) y la carga (q) se relacionan mediante $i\dfrac{dq}{dt}$.

Así la ecuación (2) se transforma en

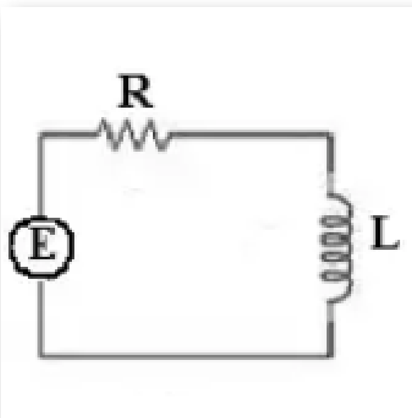
Circuito RC en serie

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \quad (3)$$

Ejemplo 1: Circuito en serie LR

Se conecta una bateria de 20 Voltios a un circuito en serie LR con 0.2 henry de inductancia y 30 Ohms de resistencia. Determine la corriente $i(t)$ sí $i(0) = 0$.

Solución



Recordemos que

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

Reemplazando valores tenemos

$$0.2\frac{di}{dt} + 30i = 20$$

Es una ED lineal pero no está en forma estándar.

LLevandola a la forma estándar, obtenemos.

$$\frac{di}{dt}+150i=100$$

Identificamos $p(t)$ y hallamos el FI.

$$p(t)=150 \quad F.I=e^{150t}$$

Ahora aplicamos la propiedad para resolverla

$$e^{150t}i=\int 100e^{150t}dt$$

Integrando el lado derecho de la ecuación

$$e^{150t}i=\frac{100}{150}e^{150t}+c$$

Despejamos la variable dependiente i

$$i=\frac{2}{3}+ce^{-150t}$$

Ahora reemplazamos condiciones iniciales $i(0)=0$ para hallar la c

$$0=\frac{2}{3}+ce^{0}$$

El valor de la constante es

$$c=-\frac{2}{3}$$

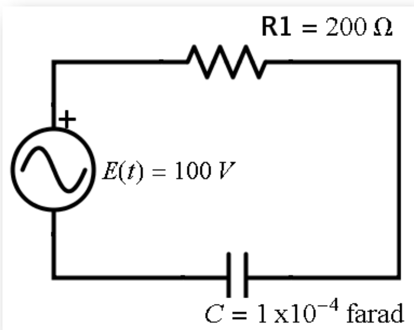
La corriente en función del tiempo es

$$i(t)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}e^{-150t}$$

Ejemplo 2: Circuito en serie RC

Se aplica una fuerza electromotriz de 100 Voltios a un circuito en serie RC, donde la resistencia es de 200 Ohms y la capacitancia es de 10^{-4} farads. Determine la carga $q(t)$ en el capacitor, Si $q(0) = 0$. Encuentre la corriente $i(t)$

Solución



Recordemos que

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

Reemplazando valores tenemos

$$200\frac{dq}{dt} + \frac{1}{10^{-4}}q = 100$$

Es una ED lineal pero no está en forma estándar.

LLevandola a la forma estándar, obtenemos.

$$\frac{dq}{dt} + 50q = \frac{1}{2}$$

Identificamos $p(t)$ y hallamos el FI.

$p(t) = 50 \quad F.I = e^{50t}$

Ahora aplicamos la propiedad para resolverla

$e^{50t}q = \int \frac{1}{2}e^{50t}dt$

Integrando el lado derecho de la ecuación

$e^{50t}q = \frac{1}{100}e^{50t} + c$

Despejamos la variable dependiente q

$q = \frac{1}{100} + ce^{-50t}$

Ahora reemplazamos condiciones iniciales $q(0) = 0$ para hallar la c

$c = -\frac{1}{100}$

La carga en función del tiempo es

$$q(t) = \frac{1}{100} - \frac{1}{100}e^{-50t}$$

La corriente es la derivada de la carga, por lo cual debemos derivar la respuesta anterior

$q^{'}(t) = \frac{50}{100}e^{-50t}$

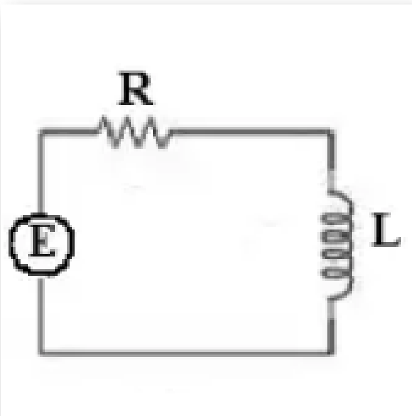
Entonces la corriente en función del tiempo es:

$$i(t) = \frac{1}{2}e^{-50t}$$

Ejemplo 3: Circuito en serie LR

Se aplica una fuerza electromotriz de 450 voltios a un circuito LR con 0.25 henry de inductancia y 90 ohms de resistencia. Determine la corriente $i(t)$ sí $i(0) = 0$. Cuando t tiende al infinito.

Solución



Recordemos que $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E(t)$

Reemplazando valores tenemos

$$0.25\frac{di}{dt} + 90i = 450$$

Es una ED lineal pero no está en forma estándar.

LLevandola a la forma estándar, obtenemos.

$$\frac{di}{dt} + 360i = 1800$$

Identificamos $p(t)$ y hallamos el FI.

$$p(t) = 360 \quad F.I = e^{360t}$$

Ahora aplicamos la propiedad para resolverla

$e^{360t} i = \int 1800 e^{360t} dt$	Integrando el lado derecho de la ecuación
$e^{360t} i = \dfrac{1800}{360} e^{360t} + c$	Despejamos la variable dependiente i
$i = \dfrac{5e^{360t}}{e^{360t}} + \dfrac{c}{e^{360t}}$	Simplificando
$i = 5 + ce^{-360t}$	Ahora reemplazamos condiciones iniciales $i(0) = 0$ para hallar la c
$0 = 5 + ce^{0}$	El valor de la constante es
$c = -5$	La corriente en función del tiempo es

$$i(t) = 5 - 5e^{-360t}$$

La corriente cuando t tiende a infinito es

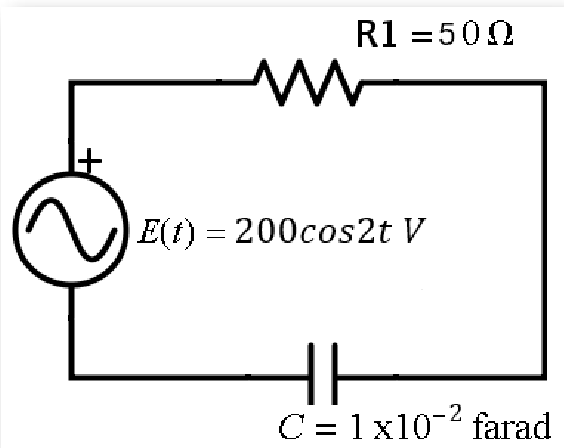
$$i(t) = 5 - 5e^{(-360)(\infty)}$$

$$i(\infty) = 5$$

Ejemplo 4: Circuito en serie RC

Se aplica una fuerza electromotriz de $200cos2t$ Voltios a un circuito en serie RC, donde la resistencia es de 50 Ohms y la capacitancia es de 10^{-2} farads. Determine la carga $q(t)$ en el capacitor, Si $q(0)=0$. Encuentre la corriente $i(t)$

Solución



Recordemos que

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)$$

Reemplazando valores tenemos

$$50\frac{dq}{dt}+\frac{1}{10^{-2}}q=200cos2t$$

$$50\frac{dq}{dt}+100q=200cos2t$$

Es una ED lineal pero no está en forma estándar.

LLevándola a la forma estándar, obtenemos.

$$\frac{dq}{dt} + 2q = 4cos2t$$

Identificamos $p(t)$ y hallamos el FI.

$$p(t) = 2 \quad F.I = e^{2t}$$

Ahora aplicamos la propiedad para resolverla

$$e^{2t}q = 4\int e^{2t}cos2tdt$$

Utilizamos el siguiente resultado de la tabla de integrales

$$\boxed{\int e^{ax}cosbxdx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(acosbx + bsenbx) + c}$$

$$\int e^{2t}cos2tdt = \frac{e^{2t}}{4+4}(2cos2t + 2sen2t) + c$$

$$4\int e^{2t}cos2tdt = 4\left(\frac{e^{2t}}{8}\right)2\left(\cos^2 t + sen2t\right) + c$$

Simplificando

$$4\int e^{2t}cos2tdt = e^{2t}(cos2t + sen2t) + c$$

Reemplazando este resultado en la ED

$$e^{2t}q = e^{2t}(cos2t + sen2t) + c$$

Despejamos la variable dependiente q

$$q = \frac{e^{2t}(cos2t + sen2t)}{e^{2t}} + \frac{c}{e^{2t}}$$

Simplificando

$$q = cos2t + sen2t + ce^{-2t}$$

Ahora reemplazamos condiciones iniciales $q(0) = 0$ para hallar la c

$$0 = cos2(0) + sen2(0) + ce^{-2(0)}$$

El valor de la constante es

$$c = -1$$

La carga en función del tiempo es

$$q = cos2t + sen2t - e^{-2t}$$

Para calcular la corriente recuerde que $I = \dfrac{dq}{dt}$

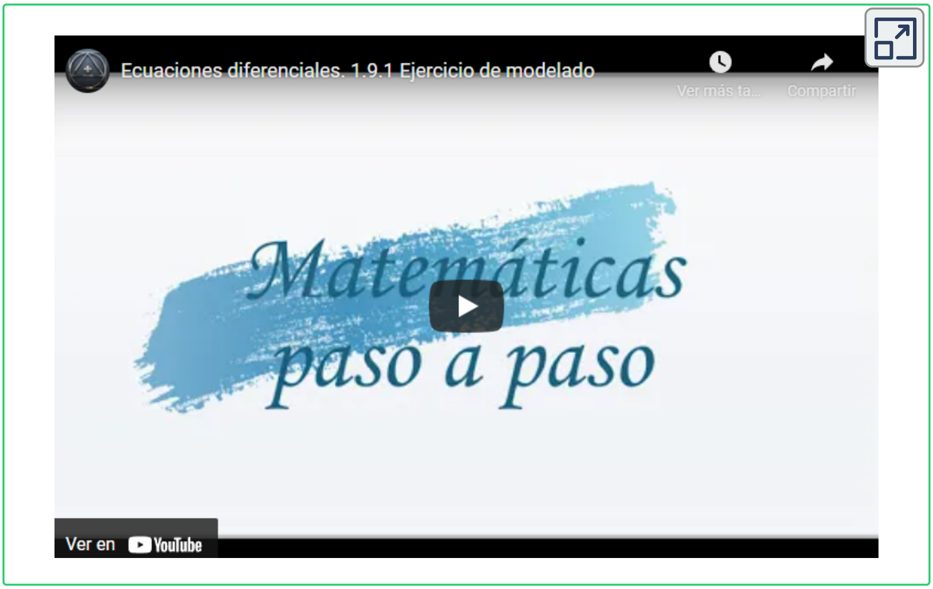
$$I = -2sen2t + 2cos2t + 2e^{-2t}$$

La corriente en función del tiempo es

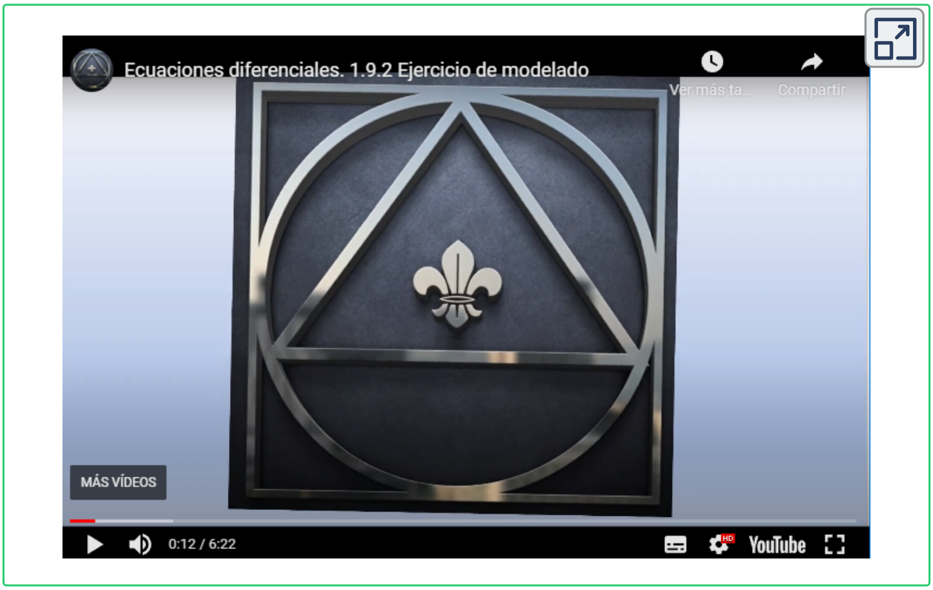
$$I = -2sen2t + 2cos2t + 2e^{-2t}$$

En la página 200 puedes observar un vídeo de aplicación de circuitos.

En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de aplicación de crecimiento.



En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de aplicación de temperatura.



En el siguiente video, realizado por [Jaime H. Ramírez Rios](), podrás observar un ejemplo de aplicación de mezclas.

En el siguiente video, realizado por [Jaime H. Ramírez Rios](), podrás observar un ejemplo de aplicación de circuitos.

2.7.8 Ejercicios y respuestas de la sección 2.7.7

Ejercicios de repaso sección 2.7.7

Resolver los ejercicios de circuitos.

1. Se aplica una fuerza electromotriz de 80 Voltios a un circuito en serie LR con 0.5 henry de inductancia y 120 Ohms de resistencia. Determine la corriente $i(t)$ sí $i(0) = 0$. Halle la corriente cuando t tiende a infinito.

2. Se aplica una fuerza electromotriz de 30 Voltios a un circuito en serie LR, 0.1 henrys de inductancia y 50 Ohms de resistencia. Determine la corriente $i(t)$ sí $i(0) = 0$. Determine la corriente conforme t tiende a infinito.

3. Se aplica una fuerza electromotriz de 200 Voltios a un circuito en serie RC, donde la resistencia es de 1000 Ohms y la capacitancia es de 10^{-4} farads. Determine la carga $q(t)$ en el capacitor. Si $i(0) = 4$ amperes. Determine la carga y la corriente en $t = 0.005s$. encuentre la carga cuando t tiende a infinito.

4. Un acumulador de 12 voltios se conecta a un circuito en serie con una inductancia de $\frac{1}{2}$ henry y una resistencia de 10 Ohms. Determine la corriente $i(t)$ sí $i(0) = 0$.

5. Se aplica una fuerza electromotriz de 10 Voltios a un circuito en serie RC, donde la resistencia es de 10 Ohms y la capacitancia es de 0.02 farads. Determine la carga $q(t)$ en el capacitor. Si $i(0) = 0$ amperes. Determine la carga y la corriente en $t = 0.005s$. encuentre la carga cuando t tiende a infinito.

Respuestas

2.7.9 Ejercicios y respuestas del capítulo 2

Ejercicios de repaso Capítulo 2

En los ejercicios 1 a 20, resuelva la ED dada.

1. $2y\,(x+1)\,dy = xdx$

2. $\left(x^3+y^3\right)dx + 3xy^2dy = 0$

3. $\left(4y+yx^2\right)dy - \left(2x+xy^2\right)dx = 0$

4. $sec^2xdy + cscydx = 0$

5. $y' + 2xy = x^3$

6. $\frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy = 0$

7. $(7x+2y)\,y\prime = -2x - 7y$

8. $y' + \frac{1}{x}y = 4x^3y^{-1}$

9. $yln|x|\frac{dx}{dy} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2$

10. $\left(3x^2y+e^y\right)dx + \left(x^3+xe^y-2y\right)dy = 0$

11. $y' + xy = xy^{-2}$

12. $y\frac{dx}{dy} = x + 4ye^{-\frac{2x}{y}}$

Respuestas

Capítulo 3

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

3.1 Principio de superposición

En la segunda unidad se estudiaron ED de primer orden. En esta unidad se estudiarán las ecuaciones de orden superior $n \geq 2$ comenzando con las ecuaciones lineales.

Una ED lineal de orden superior es de la forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

Cuando $g(x) = 0$ se dice que la ED es homogénea, en caso contrario es no homogénea.

Soluciones

La función $y = h(x)$ se llama solución de la ED si está definida y es derivable n veces en algún intervalo de tal manera que al sustituirla en la ecuación junto con sus derivadas se obtenga una identidad.

Teorema 1. **Principio de superposición; ecuaciones homogéneas.** Sean $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ soluciones de la ecuación homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I. entonces la combinación lineal

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

Donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo.

Ejemplo 1. Principio de superposición

Usando el principio de superposición, probar que las funciones

$y_1 = c_1 e^{-x}, y_2 = c_2 x e^{-x}$ son soluciones de la ED $y'' + 2y' + y = 0$

Solución

Escribimos la solución como una combinación lineal de las soluciones.

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

$$y' = -c_1 e^{-x} - c_2 x e^{-x} + c_2 e^{-x}$$

$$y'' = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - 2c_2 e^{-x}$$

Reemplazando en la ED

$$c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - 2c_2 e^{-x} - 2c_1 e^{-x} - 2c_2 x e^{-x} + 2c_2 e^{-x} + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} = 0$$

Agrupando términos semejantes queda $0 = 0$

Como se cumple la identidad, se prueba por el principio de superposición que las funciones

$y_1 = c_1 e^{-x} \;\wedge\; y_2 = c_2 x e^{-x}$ son **solución** de la ED $y'' + 2y' + y = 0$

3.1.1 Ejercicios y respuestas de la sección 3.1

Ejercicios de repaso sección 3.1

Usando el principio de superposición, probar si las funciones dadas son solución de las siguientes ED

1. $y_1 = c_1 e^x, \; y_2 = c_2 x e^x$ de $2y'' - 2y' + y = e^x$

2. $y_1 = c_1 e^{-x} cos2x, \; y_2 = c_2 e^{-x} sen2x$ de $y'' + 2y' + 5y = 0$

3. $y_1 = c_1 e^x cos2x, \; y_2 = c_2 e^x sen2x$ de $y'' - 2y' + 5y = cos2x$

4. $y_1 = c_1 e^{\frac{x}{2}}, \; y_2 = c_2 e^{-\frac{x}{5}}$ de $10y'' - 3y' - y = 0$

5. $y_1 = c_1 e^x, \; y_2 = c_2 e^{-x}$ de $y'' - y = 0$

Respuestas

3.2 Dependencia e independencia lineal

Definición se dice que un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es linealmente dependiente en un intervalo I si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todas ceros, tales que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

Para toda x en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es linealmente independiente.

Definición del Wronskiano Suponga que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ tiene al menos $n-1$ derivadas. El determinante

$$w\left(f_1\left(x\right), f_2\left(x\right), \ldots, f_n\left(x\right)\right) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & . & . & . & f_n \\ f_1' & f_2' & . & . & . & f_n' \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & . & . & . & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Donde las primas denotan derivadas, se llama el wronskiano de las funciones.

Teorema 2. Criterio para soluciones linealmente independientes. Sean $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ n soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I. El conjunto de soluciones es linealmente independiente en I si y sólo si $W(y_1, y_2, y_3, \ldots y_n) = \not{0}$ para toda x en el intervalo.

Ejemplo 1. Dependencia e independencia lineal

Verificar si el conjunto de funciones $f_1(x) = e^{3x}$, $f_2(x) = 5e^{3x}$ es linealmente dependiente (LD) o linealmente independiente (LI) en el intervalo $(-\infty, \infty)$

Solución

Para determinar si el conjunto de funciones es LI o LD se deben analizar las dos funciones.

Si multiplicamos f_1 por 5, obtenemos f_2 , es decir, $5f_1 = f_2$

Entonces f_1 es multiplo escalar de f_2

Si dos funciones son multiplo escalar, son LD

Las funciones son linealmente dependientes.

Otra forma de resolver el ejercicio es aplicando el Wronskian de las funciones.

$$w\left(f_1\left(x\right),f_2\left(x\right)\right)=\begin{vmatrix} e^{3x} & 5e^{3x} \\ 3e^{3x} & 15e^{3x} \end{vmatrix}=15e^{6x}-15e^{6x}=0$$

Como el Wronskiano de las funciones es cero, las funciones son linealmente dependientes.

Ejemplo 2. Dependencia e independencia lineal

Verificar si el conjunto de funciones $f_1(x)=e^{3x}$, $f_2(x)=e^{4x}$ es LD o LI en el intervalo $(-\infty,\infty)$

Solución

Para determinar si el conjunto de funciones es LI o LD se deben analizar las dos funciones.

Si multiplicamos cada función por una constante diferente, $A\wedge B$ y las igualamos, $Ae^{3x}=Be^{4x}$. La igualdad sólo se cumple cuando $A=0\wedge B=0$

Por definición es LD si existen constantes no todas ceros. como las dos constantes son cero el conjunto de funciones es LI.

Las funciones son linealmente independientes.

Otra forma de resolver el ejercicio es aplicando el Wronskian de las funciones.

$$w\left(f_1\left(x\right), f_2\left(x\right)\right) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{4x} \\ 3e^{3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 4e^{7x} - 3e^{7x} = e^{7x}$$

Como $W = \emptyset$ las funciones son LI.

Ejemplo 3. Dependencia e independencia lineal

Verificar si el conjunto de funciones $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2 \quad \wedge$ $f_3(x) = 3x^2 - 2x$ es LD o LI en el intervalo $(-\infty, \infty)$

Solución

Para determinar si el conjunto de funciones es LI o LD se deben analizar las tres funciones.

La función $f_3(x)$ se puede escribir como una combinación lineal de las otras dos funciones $f_3(x) = 3f_2(x) - 2f_1(x)$, entonces, Las funciones son linealmente dependientes.

Nota un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es LD en un intervalo, si por lo menos una función se puede expresar como una combinación lineal de las otras funciones.

Ahora lo vamos a resolver aplicando el Wronskian de las funciones.

$$w\left(f_1\left(x\right), f_2\left(x\right), f_3\left(x\right)\right) = \begin{vmatrix} x & x^2 & 3x^2-2x \\ 1 & 2x & 6x-2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Nota Si tienes dificultad para recordar cómo calcular determinantes de matrices de $2 \times 2 \wedge 3 \times 3$ puedes pasar a la página 210 para repasar dicho tema

Lo vamos a resolver expandiendo la fila 1

$$w = x\begin{bmatrix} 2x & 6x-2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - x^2\begin{bmatrix} 1 & 6x-2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \left(3x^2-2x\right)\begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$w = x(12x-(12x-4)) - x^2(6-0) + (3x^2-2x)(2-0)$$

$$w = x(12x-12x+4) - x^2(6) + (3x^2-2x)(2)$$

$$w = 4x - 6x^2 + 6x^2 - 4x \quad \Rightarrow \quad w = 0$$

Como $w = 0$ entonces las funciones son LD.

Ejemplo 4. Dependencia e independencia lineal

Verificar si el conjunto de funciones $f_1(x) = e^x, f_2(x) = e^{2x} \quad \wedge$ $f_3(x) = e^{3x}$ es LD o LI en el intervalo $(-\infty, \infty)$

Solución

Lo vamos a resolver aplicando el Wronskian de las funciones.

$$w\left(f_1\left(x\right), f_2\left(x\right), f_3\left(x\right)\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}$$

$$w = e^x \begin{bmatrix} 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{bmatrix} - e^{2x} \begin{bmatrix} e^x & 3e^{3x} \\ e^x & 9e^{3x} \end{bmatrix} + e^{3x} \begin{bmatrix} e^x & 2e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$w = e^x(18e^{5x} - 12e^{5x}) - e^{2x}(9e^{4x} - 3e^{4x}) + e^{3x}(4e^{3x} - 2e^{3x})$$

$$w = e^x(6e^{5x}) - e^{2x}(6e^{4x}) + e^{3x}(2e^{3x})$$

$$w = 6e^{6x} - 6e^{6x} + 2e^{6x} \quad \Rightarrow \qquad w = 2e^{6x}$$

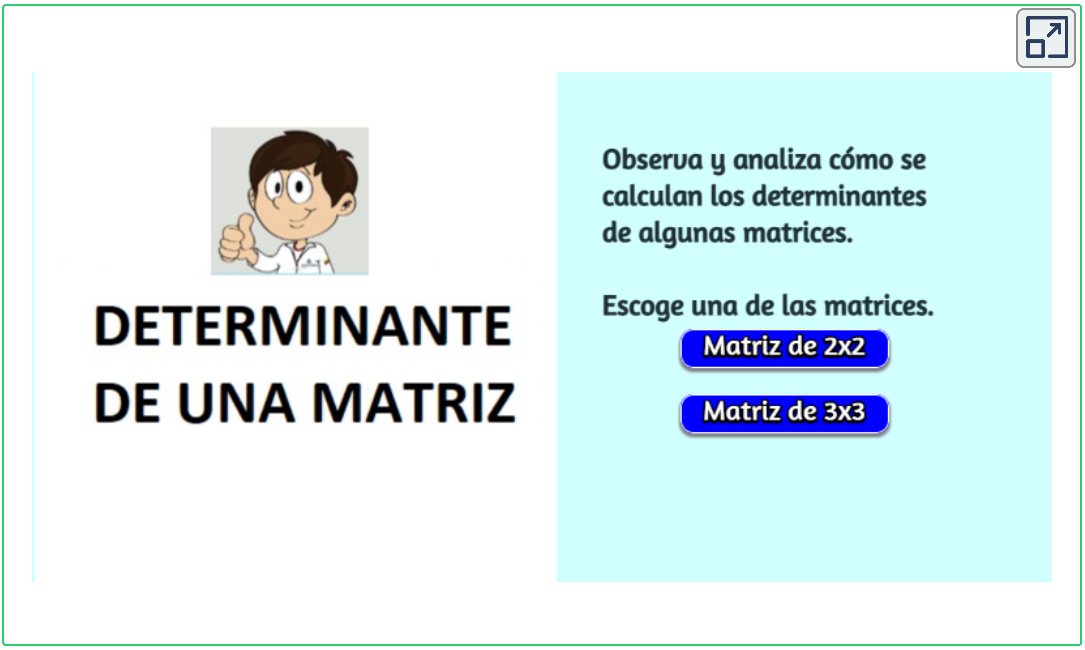
En la página 231 puedes observar un vídeo de dependencia e independencia lineal

Como $W \ = \emptyset$ las funciones son LI.

Repasando Determinantes

Asociado a cada matriz cuadrada A hay un número llamado determinante de A denotado como "$detA$" o también por $|A|$ (no confundir con el valor absoluto). Los determinantes nos proporcionan un método para el cálculo de la matriz inversa (en caso de existir) y un criterio para estudiar si una matriz es o no invertible. Sus aplicaciones son múltiples en todas las ramas de las ciencias que tratan problemas lineales en los que necesariamente aparecen matrices y por tanto, determinantes. Sólo se puede calcular el determinante si la matriz es cuadrada o de orden n.

En la escena interactiva que aparece a continuación se explica, el cálculo del determinante de matrices de orden 2 y 3. Es importante que repase el concepto antes de resolver ejercicios.



3.2.1 Ejercicios y respuestas de la sección 3.2

Ejercicios de repaso sección 3.2

Verificar si el conjunto de funciones es LI o LD en el intervalo dado.

1. $f_1(x) = x \quad \wedge \quad f_2(x) = x \ln|x| \qquad (0, \infty)$

2. $f_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \wedge \quad f_2(x) = x^2 \qquad (-\infty, \infty)$

3. $f_1(x) = cos3x \quad \wedge \quad f_2(x) = sen3x \qquad (-\infty, \infty)$

4. $f_1(x) = x^2 \quad \wedge \quad f_2(x) = x^2 \ln|x| \qquad (0, \infty)$

5. $f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = x \quad \wedge \quad f_3(x) = e^x \qquad (-\infty, \infty)$

6. $f_1(x) = 5, \quad f_2(x) = cos^2 x \quad \wedge \quad f_3(x) = sen^2 x \qquad (-\infty, \infty)$

7. $f_1(x) = cos2x, \quad f_2(x) = 1 \quad \wedge \quad f_3(x) = cos^2 x \qquad (-\infty, \infty)$

Respuestas

3.3 Conjunto fundamental de soluciones

Definición: Conjunto fundamental de soluciones
Cualquier conjunto $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I es un conjunto fundamental de soluciones (CFS) en el intervalo.

Teorema 3: solución general; ecuaciones homogéneas. Sea $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ un CFS de la ED lineal homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I. Entonces la solución general de la ecuación en el intervalo es:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

Donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$, son constantes arbitrarias

Ejemplo 1. Conjunto fundamental de soluciones

Compruebe que las funciones e^{-3x}, e^{4x} forman un CFS de la ecuación diferencial $y'' - y' - 12y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Forme la solución general y demuestre que son la solución de la ED.

Solución

Para demostrar que las funciones forman un CFS, se debe demostrar que las funciones son LI.

$$w\left(f_1\left(x\right), f_2\left(x\right)\right) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{4x} \\ -3e^{-3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 4e^{x} - \left(-3e^{x}\right) = 7e^{x}$$

Como $W \neq 0$ las funciones son LI.

Como el conjunto de funciones es LI, entonces las funciones forman un CFS.

Solución general

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x}$$

Como la ecuación es de segundo orden, se debe derivar dos veces la función.

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x}$$

$$y' = -3c_1 e^{-3x} + 4c_2 e^{4x}$$

$$y'' = 9c_1 e^{-3x} + 16c_2 e^{4x}$$

Ahora reemplazamos la función y las dos derivadas en la ED

$$9c_1e^{-3x} + 16c_2e^{4x} + 3c_1e^{-3x} - 4c_2e^{4x} - 12c_1e^{-3x} - 12c_2e^{4x} = 0$$

Aplicando propiedad distributiva $\wedge$ agrupando términos semejantes

Obtenemos $\qquad 0 = 0$

Al demostrar que el lado derecho de la ecuación es igual al lado izquierdo, se verifica que la función

$y = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x}$ es **solución** de la ED $\quad y'' - y' - 12y = 0$

Ejemplo 2. Conjunto fundamental de soluciones

Compruebe que las funciones $cos(2\ln|x|), sen(2\ln|x|)$ forman un CFS de la ecuación diferencial $x^2y'' + xy' + 4y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$.

Forme la solución general y demuestre que son la solución de la ED.

Solución

Para demostrar que las funciones forman un conjunto fundamental de soluciones, se debe demostrar que las funciones son linealmente independientes

$$w\left(f_1\left(x\right), f_2\left(x\right)\right) = \begin{vmatrix} cos(2\ln|x|) & sen(2\ln|x|) \\ -2x^{-1}sen(2\ln|x|) & 2x^{-1}cos(2\ln|x|) \end{vmatrix}$$

$$= 2x^{-1}cos^2(2\ln|x|) - (-2x^{-1}sen^2(2\ln|x|))$$

$$= 2x^{-1}(cos^2(2\ln|x|) + sen^2(2\ln|x|))$$

Aplicando la identidad fundamental $sen^2x + cos^2x = 1$

Obtenemos.

$$w = 2x^{-1}$$

Como $W \neq \emptyset$ las funciones son LI.

Como el conjunto de funciones es LI, entonces las funciones forman un CFS.

Solución general

$$y = c_1cos(2\ln|x|) + c_2sen(2\ln|x|)$$

Como la ecuación es de segundo orden, se debe derivar dos veces la función.

$$y = c_1cos(2\ln|x|) + c_2sen(2\ln|x|)$$

$$y' = -2c_1x^{-1}sen(2\ln|x|) + 2c_2x^{-1}cos(2\ln|x|)$$

$y'' = -4c_1x^{-2}cos(2\ln|x|) + 2c_1x^{-2}sen(2\ln|x|) -$
$4c_2x^{-2}sen(2\ln|x|) - 2c_2x^{-2}cos(2\ln|x|)$

Ahora reemplazamos la función y las dos derivadas en la ED

$x^2(-4c_1x^{-2}cos(2\ln|x|) + 2c_1x^{-2}sen(2\ln|x|) -$
$4c_2x^{-2}sen(2\ln|x|) - 2c_2x^{-2}cos(2\ln|x|)) +$
$x(-2c_1x^{-1}sen(2\ln|x|) + 2c_2x^{-1}cos(2\ln|x|)) +$
$4(c_1cos(2\ln|x|) + c_2sen(2\ln|x|)) = 0$

Aplicando propiedad distributiva

$-4c_1cos(2\ln|x|) + 2c_1sen(2\ln|x|) - 4c_2sen(2\ln|x|) -$
$2c_2cos(2\ln|x|)) - 2c_1sen(2\ln|x|) + 2c_2cos(2\ln|x|)) +$
$4c_1cos(2\ln|x|) + 4c_2sen(2\ln|x|)) = 0$

Agrupando términos semejantes Obtenemos

$$0 = 0$$

Al demostrar que el lado derecho de la ecuación es igual al lado izquierdo, se verifica que la función

$y = c_1cos(2\ln|x|) + c_2sen(2\ln|x|)$ es **solución** de la ED $\quad x^2y'' + xy' + 4y = 0$

Cuando un conjunto de funciones es LD, significa que esas funciones no son la solución de ninguna ED, sólo se verifica si son la solución de un ED cuando son LI, es decir, si forman un CFS.

3.3.1 Ejercicios y respuestas de la sección 3.3

Ejercicios de repaso sección 3.3

Compruebe que las funciones forman un CFS de la ecuación diferencial dada en el intervalo indicado. Forme la solución general y demuestre que son la solución de la ED.

1. $cosh2x$	$senh2x$	$y'' - 4y = 0$	$(-\infty, \infty)$
2. $e^x cos2x$	$e^x sen2x$	$y'' - 2y' + 5y = 0$	$(-\infty, \infty)$
3. $e^{\frac{x}{2}}$	$xe^{\frac{x}{2}}$	$4y'' - 4y' + y = 0$	$(-\infty, \infty)$
4. x^3	x^4	$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$	$(-\infty, \infty)$
5. $cos(\ln\|x\|)$	$sen(\ln\|x\|)$	$x^2y'' + xy' + y = 0$	$(0, \infty)$
6. $x^{\frac{1}{2}}$	$x^{\frac{1}{2}} \ln\|x\|$	$4x^2y'' + y = 0$	$(0, \infty)$

Respuestas

3.4 Reducción de orden

En la sección anterior vimos que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0 \tag{E1}$$

Es una combinación lineal $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ donde $y_1 \quad \wedge \quad y_2$ son soluciones linealmente independientes en un intervalo I.

En esta sección vamos a ver un método para determinar dichas soluciones cuando los coeficientes de la ED en $(E1)$ son constantes

REDUCCIÓN DE ORDEN Suponga que y_1 denota una solución no trivial de $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ y que y_1 se define en un intervalo I.

Se busca una segunda solución y_2 tal que $y_1 \quad \wedge \quad y_2$ sean un conjunto LI en I.

CASO GENERAL dividiendo la ecuación $(E1)$ por $a_2(x)$ queda la ecuación en la forma estándar.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Para encontrar la segunda solución se reemplaza en la ecuación:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx \qquad (\mathrm{E2})$$

Ejemplo 1. Reducción de orden

La función $y_1 = e^{-3x}$ es una solución de la ED $y'' - y' - 12y = 0$. Use reducción de orden para encontrar una segunda solución y_2. Forme la solución General.

Solución

Este ejercicio lo resolvimos como un CFS en la página 180, demostramos que las soluciones e^{-3x}, e^{4x} forman un CFS, luego demostramos que son la solución de la ED $y'' - y' - 12y = 0$. Ahora vamos a comenzar con la solución e^{-3x} y utilizando reducción de orden vamos a hallar la segunda solución e^{4x}

Como la ED está en forma estándar identificamos $p(x)$ que es el término que acompaña a y'

$p(x) = -1$

El $p(x)$ y la solución $y_1 = e^{-3x}$ los reemplazamos en la ecuación $(E2)$ para hallar la segunda solución y_2

$$y_2 = e^{-3x} \int \frac{e^{\int dx}}{[e^{-3x}]^2} dx$$

Integramos el numerado y operamos el denominador

$$y_2 = e^{-3x} \int \frac{e^{dx}}{e^{-6x}} dx$$

Aplicando potenciación

$$y_2 = e^{-3x} \int e^{7x} dx$$

Integrando

$$y_2 = e^{-3x} \left(\frac{1}{7} e^{7x} \right)$$

Operando

$$y_2 = \frac{1}{7} e^{4x}$$

Solución general

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x}$$

Ejemplo 2. Reducción de orden

La función $y_1 = sen3x$ es una solución de la ED $y'' + 9y = 0$. Use reducción de orden para encontrar una segunda solución y_2. Forme la solución General.

Solución

En la ED no hay y', eso quiere decir que el número que acompaña este término es 0

$p(x) = 0$

El $p(x)$ y la solución $y_1 = sen3x$ los reemplazamos en la ecuación $(E2)$ para hallar la segunda solución y_2

$$y_2 = sen3x \int \frac{e^{\int 0dx}}{[sen3x]^2} dx$$ La integral queda de la forma

$$y_2 = sen3x \int \frac{1}{sen^2 3x} dx$$ Identidad

$$y_2 = sen3x \int csc^2 3x dx$$ Integrando

$$y_2 = sen3x \left(-\frac{1}{3} \cot 3x \right)$$ Identidad

$$y_2 = -\frac{1}{3} sen3x \left(\frac{cos3x}{sen3x} \right)$$ Simplificando

$$y_2 = -\frac{1}{3} cos3x$$

Solución general

$$y = c_1 sen3x + c_2 cos3x$$

Ejemplo 3. Reducción de orden

La función $y_1 = e^{\frac{2x}{3}}$ es una solución de la ED $9y'' - 12y' + 4y = 0$. Use reducción de orden para encontrar una segunda solución y_2.

Forme la solución General.

Solución

A diferencia de los ejemplos anteriores, esta ED no está en forma estándar, entonces debemos dividir toda la ecuación por 9 antes de identificar $p(x)$

$$\frac{9y''}{9} - \frac{12y'}{9} + \frac{4y}{9} = \frac{0}{9}$$

Simplificando

$$y'' - \frac{4}{3}y' + \frac{4}{9}y = 0$$

Identificamos $p(x)$

$$p(x) = \frac{4}{3}$$

El $p(x)$ y la solución $y_1 = e^{\frac{2x}{3}}$ los reemplazamos en la ecuación $(E2)$ para hallar la segunda solución y_2

$$y_2 = e^{\frac{2x}{3}} \int \frac{e^{\int \frac{4x}{3} dx}}{\left[e^{\frac{2x}{3}}\right]^2} dx$$

La integral queda de la forma

$$y_2 = e^{\frac{2x}{3}} \int \frac{e^{\frac{4x}{3}}}{\left[e^{\frac{4x}{3}}\right]} dx$$

Simplificando

$$y_2 = e^{\frac{2x}{3}} \int dx$$

Integrando

$$y_2 = e^{\frac{2x}{3}} x$$

La segunda solución es

$$y_2 = xe^{\frac{2x}{3}}$$

Solución general

$$y = c_1 e^{\frac{2x}{3}} + c_2 x e^{\frac{2x}{3}}$$

Ejemplo 4. Reducción de orden

La función $y_1 = xcos(\ln|x|)$ es una solución de la ED $x^2y'' - xy' + 2y = 0$. Use reducción de orden para encontrar una segunda solución y_2. Forme la solución General.

Solución

Como la ED no está en forma estándar, debemos dividir toda la ecuación por x^2 para identificar $p(x)$

$$\frac{x^2y''}{x^2} - \frac{xy'}{x^2} + \frac{2y}{x^2} = \frac{0}{x^2}$$

Simplificando

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$$

Identificamos $p(x)$

$$p(x) = -\frac{1}{x}$$

El $p(x)$ y la solución $y_1 = xcos(\ln|x|)$ los reemplazamos en la ecuación $(E2)$ para hallar la segunda solución y_2

$$y_2 = xcos(\ln|x|)\int \frac{e^{\int \frac{1}{x}dx}}{[xcos(\ln|x|)]^2}dx$$

La integral queda de la forma

$$y_2 = xcos(\ln|x|)\int \frac{x}{x^2cos^2(\ln|x|)}dx$$

Simplificando y aplicando identidades

$$y_2 = xcos(\ln|x|)\int \frac{sec^2(\ln|x|)}{x}dx$$

Esta integral se resuelve por sustitución, siendo $u = (\ln|x|) \quad \wedge \quad du = \frac{1}{x}dx$

$$y_2 = xcos(\ln|x|)\int sec^2 u du$$

Integrando

$$y_2 = xcos(\ln|x|)tanu$$

Identidad

$$y_2 = xcos(\ln|x|)\left(\frac{senu}{cosu}\right)$$

Sustituyendo u

$$y_2 = xcos(\ln|x|)\left(\frac{sen(\ln|x|)}{cos(\ln|x|)}\right)$$

Simplificando obtenemos la segunda solución

$$y_2 = xsen(\ln|x|)$$

Solución general

$$y = c_1xcos(\ln|x|) + c_2xsen(\ln|x|)$$

En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de dependencia e independencia lineal.

En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de reducción de orden.

3.4.1 Ejercicios y respuestas de la sección 3.4

Ejercicios de repaso sección 3.4

La función indicada $y_1(x)$ es una solución de la ecuación diferencial dada. Use la reducción de orden para encontrar una segunda solución $y_2(x)$. Forme la solución General.

1. $y'' + 2y' + y = 0$ $\qquad y_1 = xe^{-x}$

2. $y'' + 16y = 0$ $\qquad y_1 = cos4x$

3. $6y'' + y' - y = 0$ $\qquad y_1 = e^{\frac{x}{3}}$

4. $y'' - 4y' + 4y = 0$ $\qquad y_1 = e^{2x}$

5. $xy'' + y' = 0$ $\qquad y_1 = \ln|x|$

6. $4x^2y'' + y = 0$ $\qquad y_1 = x^{\frac{1}{2}} \ln|x|$

7. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$ $\qquad y_1 = xsen(\ln|x|)$

Respuestas

3.5 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Se trata de determinar si existen soluciones exponenciales en $(-\infty, \infty)$ de las ecuaciones lineales homogéneas de orden superior del tipo

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son constantes reales $\wedge \; a_n \neq 0$

Método de solución: comenzamos para el caso especial de la ecuación de segundo orden

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

La única función elemental no trivial cuya derivada es una constante múltiple de sí misma es la función exponencial e^{mx}, entonces la solución es de la forma $y = e^{mx}$

Vamos a reemplazar la solución $y = e^{mx}$ y sus derivadas en la ED de segundo orden y vamos a cambiar a_2, a_1, a_0, por a, b, c puesto que sólo necesitamos tres constantes

$y = e^{mx} \qquad y' = me^{mx} \qquad y'' = m^2 e^{mx}$

$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$ Factor común

$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$ Simplificando

$$am^2 + bm + c = 0$$

Esta solución se conoce como **ecuación auxiliar** o ecuación característica. Existen tres formas de la solución general que corresponden a los tres casos:

Discriminante	Solución Ecuación Auxiliar	Solución Ecuación Diferencial
$b^2 - 4ac > 0$	$m_1 \neq m_2$	$y_1 = e^{m_1 x}$ $\quad y_2 = e^{m_2 x}$
$b^2 - 4ac = 0$	$m_1 = m_2$	$y_1 = e^{mx}$ $\quad y_2 = xe^{mx}$
$b^2 - 4ac < 0$	$m = a \pm bi$ Raíces complejas	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2 = e^{\alpha x} sen\beta x$

Tabla 4. Soluciones ED homogéneas

Ejemplo 1. Coeficientes constantes

Resolver la ED $2y'' - 5y' - 3y = 0$.

Solución

Primero se lleva la ED a la ecuación auxiliar

$2m^2 - 5m - 3 = 0$	Se determinan los coeficientes
$a = 2, \quad b = -5, \quad c = -3$	Se reemplazan en la ecuación cuadrática
$m = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$	Operando
$m = \dfrac{5 \pm \sqrt{49}}{4}$	Como el discriminante es $49 > 0$ obtenemos dos respuestas diferentes
$m = \dfrac{5+7}{4} \quad \wedge \quad m = \dfrac{5-7}{4}$	Simplificando
$m_1 = 3 \quad m_2 = -\dfrac{1}{2}$	Las dos soluciones se reemplazan en las soluciones de la ED de la tabla 4
$y_1 = e^{3x} \quad y_2 = e^{-\frac{1}{2}x}$	Solución general

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$$

Ejemplo 2. Coeficientes constantes

Resolver la ED $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Solución

Primero se lleva la ED a la ecuación auxiliar

$$m^2 + 6m + 9 = 0$$

Se factoriza

$$m = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

Operando

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2}$$

Como el discriminante es 0 obtenemos dos respuestas iguales

$$m_1 = -3 \quad m_2 = -3$$

Las dos soluciones son

$$y_1 = e^{-3x} \quad y_2 = xe^{-3x}$$

Solución general

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$$

Ejemplo 3. Coeficientes constantes

Resolver la ED $y'' + 4y' + 7y = 0$.

Solución

Primero se lleva la ED a la ecuación auxiliar

$$m^2 + 4m + 7 = 0$$

Se factoriza

$$m = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)}$$

Operando

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Como el discriminante es $-12 < 0$ Multiplicamos por $i^2 = -1$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{12i^2}}{2}$$

Obtenemos dos respuestas complejas

$$m = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$$

Obtenemos la solución de la ecuación auxiliar

$$m = -2 \pm \sqrt{3}i$$

Los valores de $\alpha \wedge \beta$ son

$\alpha = -2 \quad \beta = \sqrt{3}$

Las soluciones utilizando la tabla 4 son

$y_1 = e^{-2x} cos\sqrt{3}x$

Solución general

$y_2 = e^{-2x} sen\sqrt{3}x$

$$y = c_1 e^{-2x} cos\sqrt{3}x + c_2 e^{-2x} sen\sqrt{3}x$$

Cuando las respuestas son complejas no se tiene en cuenta los signos más y menos, pues la función $coseno$ es una función par y la función $seno$ es impar, por tanto, no se colocan los signos, quedan de forma implícita, tampoco se coloca la i que indica imaginarios y que la respuesta es compleja.

Para resolver la ecuación auxiliar no es necesario utilizar la ecuación cuadrática, se pueden usar todas las técnicas de factorización

Ejemplo 4. Coeficientes constantes

Resolver la ED $y'' - 25y = 0$.

Solución

Primero se lleva la ED a la ecuación auxiliar

$m^2 - 25 = 0$

Se factoriza como una diferencia de cuadrados

$(m+5)(m-5) = 0$

Obtenemos las soluciones de la ecuación auxiliar

$m_1 = 5 \quad m_2 = -5$

Las dos soluciones son

$y_1 = e^{5x} \quad y_2 = e^{-5x}$

Solución general

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-5x}$$

Ejemplo 5. Coeficientes constantes

Resolver la ED $y'' + 25y = 0$.

Solución

Primero se lleva la ED a la ecuación auxiliar

$m^2 + 25 = 0$

La suma de cuadrados no se puede factorizar, entonces despejamos la variable

$m = \pm\sqrt{-25}$ — Obtenemos la solución de la ecuación auxiliar

$m = 0 \pm 5i$ — Los valores de $\alpha \wedge \beta$ son

$\alpha = 0 \quad \beta = 5$ — Las dos soluciones son

$y_1 = e^0 cos5x \quad y_2 = e^0 sen5x$ — Solución general

$$y = c_1 cos5x + c_2 sen5x$$

Ejemplo 6. Resolver el PVI

Resolver la ED $y'' + y = 0$ Sujeta a $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \wedge$ $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$

Solución

Primero se lleva la ED a la ecuación auxiliar

$m^2 + 1 = 0$ — Despejamos la variable pues no es factorizable

$m = \pm\sqrt{-1}$ Obtenemos la solución de la ecuación auxiliar

$m = 0 \pm i$ Los valores de $\alpha \wedge \beta$ son

$\alpha = 0 \qquad \beta = 1$ Las dos soluciones son

$y_1 = e^0 cosx \qquad y_2 = e^0 senx$ Solución general

$$y = c_1 cosx + c_2 senx$$

Como la ED tiene condiciones iniciales, debemos pasar de la solución general a la solución particular, para esto, reemplazamos las condiciones iniciales en la solución general

$0 = c_1 cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + c_2 sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$ Evaluando obtenemos la ecuación (1)

$0 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2$ Derivamos la solución general

$y' = -c_1 senx + c_2 cosx$ Reemplazamos condiciones iniciales

$2 = -c_1 sen\left(\frac{\pi}{3}\right) + c_2 cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ Evaluando obtenemos la ecuación (2)

$$2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2$$

Tenemos un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{2}c_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}c_2 \\ 2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}c_1 + \dfrac{1}{2}c_2 \end{cases}$$

Multiplicamos la ecuación (1) por $\sqrt{3}$ y resolvemos el sistema de ecuaciones por eliminación.

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cancel{c_1} + \dfrac{3}{2}c_2 \\ 2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cancel{c_1} + \dfrac{1}{2}c_2 \end{cases}$$

$$2 = \quad 2c_2$$

Obtenemos $c_2 = 1$

Reemplazando este valor en la ecuación (1) llegamos a

$$0 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Despejando obtenemos $\quad c_1 = -\sqrt{3}$

Entonces la solución particular es

$$y = -\sqrt{3}cosx + senx$$

Ecuaciones de orden superior: para resolver una ecuación diferencial de n-ésimo orden de la forma

$$a_n m^{(n)} + a_{n-1} m^{(n-1)} + \ldots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$$

Si todas las raíces son reales y distintas, entonces se tiene la solución:

$$\boxed{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_c e^{m_n x}}$$

Si es de multiplicidad k, entonces se tiene la solución:

$$\boxed{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_2 x^2 e^{m_1 x} + \ldots + c_k x^{k-1} e^{m_1 x}}$$

Una ED de orden superior puede tener una combinación de soluciones diferentes, repetidas y complejas, para expresar la solución se utiliza la tabla 4

Ejemplo 7. Coeficientes constantes

Resolver la ED $y''' + 3y'' - 4y = 0$

Solución

Primero se lleva la ED a la ecuación auxiliar

$m^3 + 3m^2 - 4 = 0$

para factorizarla se hace división sintética

	1	3	0	−4
1		1	4	4
	1	4	4	0

Con la división sintética obtenemos una raíz $m = 1$ y con el residuo obtenemos una ecuación de segundo grado.

$(m-1)(m^2+4m+4)$

Factorizando el trinomio cuadrado perfecto

$(m-1)(m+2)^2$

Tenemos tres soluciones, una diferente y otra de multiplicidad dos.

$y_1 = e^x \qquad y_2 = e^{-2x} \qquad y_3 = xe^{-2x}$

Solución general

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3xe^{-2x}$$

Ejemplo 8. Coeficientes constantes

Resolver la ED $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

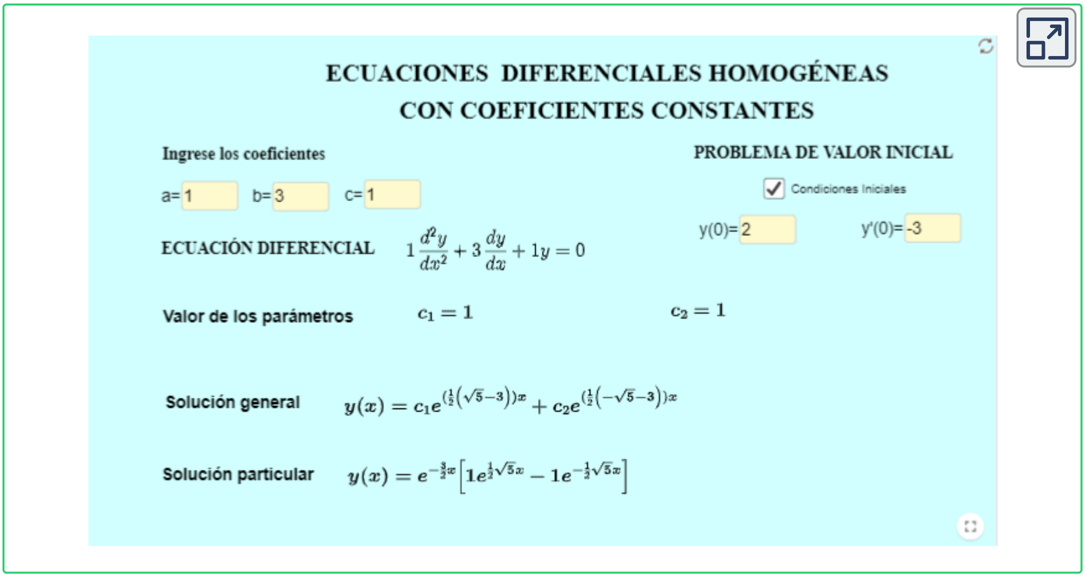
Solución

Primero se lleva la ED a la ecuación auxiliar

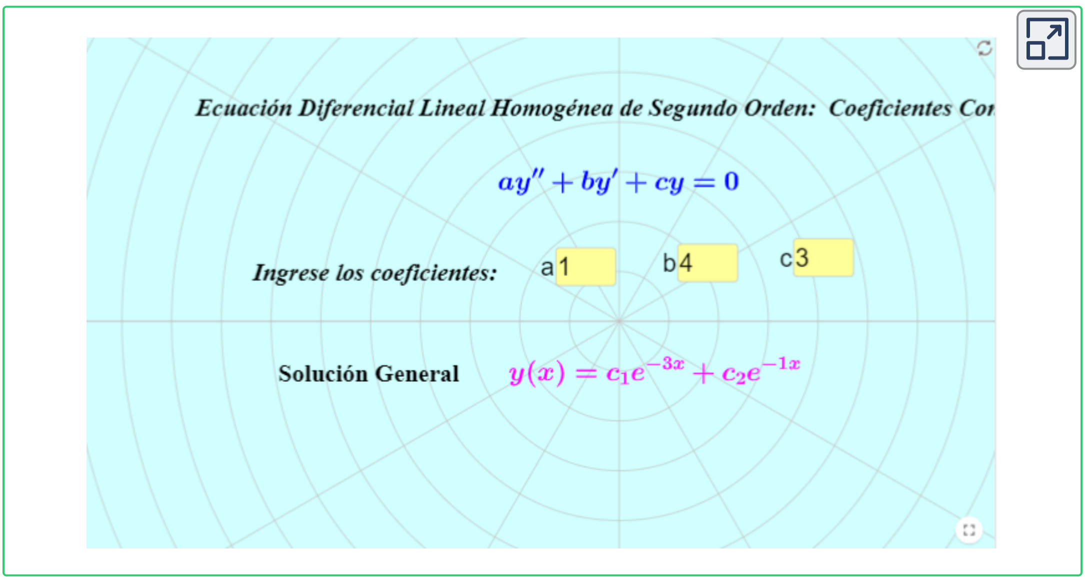
$m^4 + 2m^2 + 1 = 0$	Es un polinomio de cuarto grado y se factoriza como un trinomio cuadrado perfecto
$(m^2 + 1)^2 = 0$	El exponente indica que la solución es de multiplicidad dos. Se soluciona la ecuación de segundo grado
$m^2 + 1 = 0$	Al despejar y sacar raíz cuadrada obtenemos
$m = \pm\sqrt{-i} \quad \Rightarrow \quad m = \pm i$	Tenemos una raíz compleja, buscamos en la tabla 4 y obtenemos dos soluciones
$y_1 = e^0 cosx \quad y_2 = e^0 senx$	Como la solución es de multiplicidad dos
$y_1 = cosx \quad y_2 = senx$ $y_3 = xcosx \quad y_4 = xsenx$	Solución general

$$y = c_1 cosx + c_2 senx + c_3 xcosx + c_4 xsenx$$

En la siguiente escena interactiva, podrás resolver ED de segundo orden por medio de coeficientes constantes.



En la siguiente escena interactiva, diseñada por [Marco Peñaloza](), podrás resolver ED de segundo orden homogéneas.



En el siguiente video, realizado por [Jaime H. Ramírez Rios](), podrás observar un ejemplo de coeficientes constantes.

En el siguiente video, realizado por [Jaime H. Ramírez Rios](), podrás observar un ejemplo de coeficientes constantes.

3.5.1 Ejercicios y respuestas de la sección 3.5

Ejercicios de repaso sección 3.5

Determinar la solución general de la ecuación diferencial

1. $y'' - 10y' + 25y = 0$

2. $y'' + 3y' = 0$

3. $12y'' - 5y' - 2y = 0$

4. $y'' + 4y' - y = 0$

5. $3y'' + y = 0$

6. $y'' - 4y' + 5y = 0$

7. $2y'' - 3y' + 4y = 0$

8. $y''' - 4y'' - 5y' = 0$

9. $y''' - y'' - 11y' + 15y = 0$

10. $y''' - y'' - y' - 2y = 0$

11. $y^{(4)} - 2y'' - 3y' - 2y = 0$

12. $3y^{(4)} - y''' - 21y'' - 11y' + 6y = 0$

Respuestas

3.6 Ecuaciones lineales no homogéneas

Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

Se debe hacer dos cosas

- Encontrar la función complementaria y_c de la ecuación homogénea asociada

- Encontrar alguna solución particular y_p de la ecuación no homogénea asociada

3.7 Coeficientes indeterminados

Es un camino directo y sencillo para determinar una solución de una ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes. El método consiste en hacer una conjetura acerca de la forma del y_p, motivada por las clases de funciones que conforman $g(x)$. El método general se limita a ED lineales donde

- Los coeficientes $a_i, i = 0, 1, 2..., n$ son constantes y

- La función $g(x)$ es una constante k, una función polinomial, una función exponencial $e^{\alpha x}$ una función $seno$ o $coseno$ $sen\beta x, cos\beta x$ o combinaciones de estas funciones

El método de coeficientes indeterminados no es aplicable a ecuaciones cuando la función $g(x)$ corresponde a: $\ln|x|$, $\dfrac{1}{x}$, $tanx$, $sen^{-1}x$, etc. Las ecuaciones en las que $g(x)$ es una de estas funciones se consideran en la sección 3.8

$$

G(x)	Forma de y_p
1. K	A
2. $3x+2$	$Ax+B$
3. x^2-3	Ax^2+Bx+C
4. x^3+2x-4	Ax^3+Bx^2+Cx+E
5. $coskx$ o senkx	$Acoskx+Bsenkx$
6. e^{kx}	Ae^{kx}
7. xe^{kx}	$(Ax+B)e^{kx}$
8. x^2e^{kx}	$(Ax^2+Bx+C)e^{kx}$
9. $e^{kx}senkx$	$Ae^{kx}coskx+Be^{kx}senkx$
10. x^2senkx	$(Ax^2+Bx+C)coskx+(Ex^2+Fx+G)senkx$
11. $xe^{kx}coskx$	$(Ax+B)e^{kx}coskx+(Cx+E)e^{kx}senkx$

$$

Tabla 5. Soluciones particulares de prueba

Ejemplo 1. Coeficientes indeterminados

Resolver la ED $y''+4y'-2y=2x^2-3x+6$

Solución

Primero se debe resolver la ED homogénea

$y''+4y'-2y=0$

Se lleva a la ecuación auxiliar

$m^2+4m-2=0$ Se factoriza.

$m=\dfrac{-4\pm\sqrt{24}}{2}$ Obtenemos la solución de la ecuación auxiliar

$m=-2\pm\sqrt{6}$ La solución de la ecuación homogénea es

$y_c=c_1e^{(-2+\sqrt{6})x}+c_2e^{(-2-\sqrt{6})x}$ Factorizando

Ahora vamos a calcular y_p, para eso buscamos en la tabla de la página 243 el y_p de prueba para un polinomio de grado 2

$$y_p=Ax^2+Bx+C$$

Ahora vamos a reemplazar el y_p y sus derivadas en la ED para calcular las constantes

$$y_p'=2Ax+B$$

$$y_p''=2A$$

$$2A+4(2Ax+B)-2(Ax^2+Bx+C)=2x^2-3x+6$$

Se aplica propiedad distributiva

$$2A+8Ax+4B-2Ax^2-2Bx-2C=2x^2-3x+6$$

Con esta información vamos a construir un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$
\begin{cases}
2 = -2A \\
-3 = 8A - 2B \\
6 = 2A + 4B - 2C
\end{cases}
$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos los siguientes valores

$A = -1 \qquad B = -\frac{5}{2} \qquad c = -9$

La solución particular es:

$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9$

La solución general de la ED es:

$$y = c_1 e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

Ejemplo 2. Coeficientes indeterminados

Resolver la ED $y'' + 9y = 2sen3x$

Solución

Primero se debe resolver la ED homogénea

$y'' + 9y = 0$ Se lleva a la ecuación auxiliar

$m^2 + 9 = 0$ Despejamos la m

$m = \pm 3i$ La solución de la ecuación homogénea es

$y_c = c_1 cos3x + c_2 sen3x$ Para hallar el y_p, buscamos en la tabla de la página 250 para la función seno

$y_p = Acos3x + Bsen3x$

Derivamos y reemplazamos en la ED.

$y_p' = -3Asen3x + 3Bcos3x$

$y_p'' = -9Acos3x - 9Bsen3x$

$-9Acos3x - 9Bsen3x + 9(Acos3x + Bsen3x) = 2sen3x$

Se aplica propiedad distributiva

$-9Acos3x - 9Bsen3x + 9Acos3x + 9Bsen3x) = 2sen3x$

Agrupando términos semejantes obtenemos

$0 = 2sen3x$

El resultado es contradictorio, lo que demuestra que y_p no es el adecuado. Esto ocurre porque la solución complementaria y_c ya tiene $sen3x$, entonces para solucionar el problema se debe multiplicar todo el y_p por x

$y_p = Axcos3x + Bxsen3x$

Ahora vamos a reemplazar el y_p y sus derivadas en la ED para calcular las constantes

$y_p' = -3Axsen3x + Acos3x + 3Bxcos3x + Bsen3x$

$y_p'' = -9Axcos3x - 3Asen3x - 3Asen3x - 9Bxsen3x + 3Bcos3x + 3Bcos3x$

Agrupando términos semejantes obtenemos

$y_p'' = -9Axcos3x - 6Asen3x - 9Bxsen3x + 6Bcos3x$

Ahora reemplazamos la segunda derivada y el y_p en la ED

$-9Axcos3x - 6Asen3x - 9Bxsen3x + 6Bcos3x + 9(Axcos3x + Bxsen3x) = 2sen3x$

Se aplica propiedad distributiva

$-9Axcos3x - 6Asen3x - 9Bxsen3x + 6Bcos3x + 9Axcos3x + 9Bxsen3x = 2sen3x$

Agrupando términos semejantes obtenemos

$-6Asen3x + 6Bcos3x = 2sen3x$

Con esta información vamos a construir un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} 2 = -6A \\ 0 = 6B \end{cases}$$

Los valores de las incógnitas son:

$A = -\frac{1}{6} \qquad B = 0$

La solución particular es:

$y_p = -\frac{1}{6}xcos3x$

La solución general de la ED es:

$$y = c_1cos3x + c_2sen3x - \frac{1}{6}xcos3x$$

Ejemplo 3. Coeficientes indeterminados

Resolver la ED $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$

Solución

Primero se debe resolver la ED homogénea

$y'' - 2y' - 3y = 0$	Se lleva a la ecuación auxiliar

$m^2 - 2m - 3 = 0$	Se factoriza
$(m-3)(m+1)$	Las raíces del polinomio son
$m = 3 \qquad \wedge \qquad m = -1$	La solución de la ecuación homogénea es
$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$	Ahora vamos a calcular y_p

Es importante anotar que aparecen dos y_p, un y_{p_1} que corresponde a un polinomio de grado 1 y un y_{p_2} que corresponde a la función exponencial combinada con un polinomio de primer grado

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

$$y_p = Ax + B + (Cx + E)e^{2x}$$

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + Ee^{2x}$$

$$y_p' = A + 2Cxe^{2x} + Ce^{2x} + 2Ee^{2x}$$

$$y_p'' = 4Cxe^{2x} + 2Ce^{2x} + 2Ce^{2x} + 4Ee^{2x}$$

Agrupando términos semejantes

$$y_p'' = 4Cxe^{2x} + 4Ce^{2x} + 4Ee^{2x}$$

Se reemplaza en la ED

$$4Cxe^{2x} + 4Ce^{2x} + 4Ee^{2x} \color{red}{-2}(A + 2Cxe^{2x} + Ce^{2x} + 2Ee^{2x}) \color{red}{-3}(Ax + B + Cxe^{2x} + Ee^{2x}) = 4x - 5 + 6xe^{2x}$$

Se aplica propiedad distributiva

$$4Cxe^{2x} + 4Ce^{2x} + 4Ee^{2x} - 2A - 4Cxe^{2x} - 2Ce^{2x} - 4Ee^{2x} - 3Ax - 3B - 3Cxe^{2x} - 3Ee^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x}$$

Se agrupan términos semejantes

$$-3Cxe^{2x} + 2Ce^{2x} - 3Ee^{2x} - 2A - 3Ax - 3B = 4x - 5 + 6xe^{2x}$$

Con esta información vamos a construir un sistema de ecuaciones de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\begin{cases} 4 = -3A \\ -5 = -2A - 3B \\ 0 = 2C - 3E \\ 6 = -3C \end{cases}$$

Los valores de las incógnitas son:

$A = -\frac{4}{3}$ $\qquad B = \frac{23}{9}$ $\qquad C = -2$ $\qquad E = -\frac{4}{3}$

La solución particular es:

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}$$

La solución general de la ED es:

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}$$

Ejemplo 4. Coeficientes indeterminados

Resolver la ED $y'' + 9y = xsen3x$

Solución

Primero se debe resolver la ED homogénea

$y'' + 9y = 0$	Se lleva a la ecuación auxiliar
$m^2 + 9 = 0$	El término no es factorizable, entonces se despeja la m
$m^2 = -9$	Sacamos raíz a ambos lados.
$m = \pm\sqrt{-9}$	Obtenemos la solución
$m = 0 \pm 3i$	Los valores de $\alpha \wedge \beta$ son
$\alpha = 0 \qquad \beta = 3$	Solución complementaria

$y_c = c_1 cos3x + c_2 sen3x$ Ahora vamos a calcular y_p

$y_p = (Ax + B)cos3x + (Cx + E)sen3x$

Se puede observar que la solución complementaria ya tiene $sen3x \wedge cos3x$ entonces se debe multiplicar el y_p por x

$y_p = (Ax^2 + Bx)cos3x + (Cx^2 + Ex)sen3x$

Se puede derivar así como está o hacer distributiva antes de derivar

$y_p = Ax^2cos3x + Bxcos3x + Cx^2sen3x + Exsen3x$

$y_p' = -3Ax^2sen3x + 2Axcos3x - 3Bxsen3x + Bcos3x + 3Cx^2cos3x + 2Cxsen3x + 3Excos3x + Esen3x$

$y_p'' = -9Ax^2cos3x - 6Axsen3x - 6Axsen3x + 2Acos3x - 9Bxcos3x - 3Bsen3x - 3Bsen3x - 9Cx^2sen3x + 6Cxcos3x + 6Cxcos3x + 2Csen3x - 9Exsen3x + 3Ecos3x + 3Ecos3x$

Se agrupan términos semejantes y se reemplaza y_p y sus derivadas en la ED

$-9Ax^2cos3x - 12Axsen3x + 2Acos3x - 9Bxcos3x - 6Bsen3x - 9Cx^2sen3x + 12Cxcos3x + 2Csen3x - 9Exsen3x + 6Ecos3x + 9(Ax^2cos3x + Bxcos3x + Cx^2sen3x + Exsen3x) = xsen3x$

Se aplica propiedad distributiva

$$-9Ax^2cos3x - 12Axsen3x + 2Acos3x - 9Bxcos3x - 6Bsen3x - 9Cx^2sen3x + 12Cxcos3x + 2Csen3x - 9Exsen3x + 6Ecos3x + 9Ax^2cos3x + 9Bxcos3x + 9Cx^2sen3x + 9Exsen3x = xsen3x$$

Se agrupan términos semejantes

$$-12Axsen3x + 2Acos3x - 6Bsen3x + 12Cxcos3x + 2Csen3x + 6Ecos3x = xsen3x$$

Con esta información vamos a construir un sistema de ecuaciones de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\begin{cases} 1 = -12A \\ 0 = 2A + 6E \\ 0 = -6B + 2C \\ 0 = 12C \end{cases}$$

Los valores de las incógnitas son:

$A = -\frac{1}{12}$ $\qquad B = 0$ $\qquad C = 0$ $\qquad E = \frac{1}{36}$

La solución particular es:

$$y_p = -\frac{1}{12}x^2cos3x + \frac{1}{36}xsen3x$$

La solución general de la ED es:

$$y = c_1cos3x + c_2sen3x - \frac{1}{12}x^2cos3x + \frac{1}{36}xsen3x$$

Ejemplo 5. Coeficientes indeterminados

Determine la forma de la solución particular de $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x} + 2cos2x - 3sen2x$

Solución

Al término x^2e^{-x} le corresponde $(Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$

Al término $2cos2x - 3sen2x$ le corresponde

$(Ex + F)cos2x + (Gx + H)sen2x$

El y_{p1} es equivalente a los términos de

$y_c = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$

Los términos se repiten dos veces, entonces se multiplica por x^2

$y_{p1} = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)e^{-x}$

Entonces la solución particular es la suma de las dos soluciones particulares:

$$\begin{aligned} y_p = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)e^{-x} + \\ (Ex + F)cos2x + (Gx + H)sen2x \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Coeficientes indeterminados

Determine la forma de la solución particular de

$y'' + 5y' + 4y = 5xe^{-7x} - 4x^2 + 3sen2x$

Solución

Al término $5xe^{7x}$ le corresponde $(Ax + B)e^{-7x}$

Al término $4x^2$ le corresponde $(Cx^2 + Ex + F)$

Al término $3sen2x$ le corresponde

$(Gx + H)cos2x + (Ix + J)sen2x$ La solución es:

$$y_p = (Ax + B)e^{-7x} + (Cx^2 + Ex + F) + (Gx + H)cos2x + (Ix + J)sen2x$$

Ejemplo 5. Resolver el PVI.

Resolver la ED $y'' + 25y = 4sen5x$ Sujeta a $y\left(\frac{\pi}{5}\right) = 3$

Solución

Primero se debe resolver la ED homogénea

$y'' + 25y = 0$	Se lleva a la ecuación auxiliar
$m^2 + 25 = 0$	Como no se puede factorizar, se despeja
$m^2 = -25$	Sacamos raíz a ambos lados.
$m = \pm\sqrt{-25}$	Obtenemos la solución de la ecuación auxiliar
$m = 0 \pm 5i$	La solución complementaria es:
$y_c = c_1 cos5x + c_2 sen5x$	Ahora vamos a calcular y_p

$$y_p = Acos5x + Bsen5x$$

Se puede observar que la solución complementaria ya tiene $sen5x \wedge cos5x$ entonces se debe multiplicar el y_p por x

$$y_p = Axcos5x + Bxsen5x$$

Derivamos el y_p dos veces para reemplazar en la ED y calcular los valores de las constantes

$y_p' = -5Axsen5x + Acos5x + 5Bcos5x + Bcos5x$

$y_p'' = -25Axsen5x - 5Asen5x - 5Asen5x - 25Bxsen5x + 5Bcos5x + 5Bcos5x$

Se reemplaza y_p y sus derivadas en la ED

$-25Axsen5x - 10Asen5x - 25Bxsen5x + 10Bcos5x + 25(Axcos5x + Bxsen5x) = 4xsen5x$

Se aplica propiedad distributiva

$-25Axsen5x - 10Asen5x - 25Bxsen5x + 10Bcos5x + 25Axcos5x + 25Bxsen5x = 4xsen5x$

Se agrupan términos semejantes

$-10Asen5x + 10Bcos5x = 4sen5x$

Los valores de las incógnitas son:

$A = -\frac{2}{5} \qquad B = 0$

La solución particular es:

$y_p = -\frac{2}{5}xcos5x$

La solución general de la ED es:

$$\boxed{y = c_1cos5x + c_2sen5x - \frac{2}{5}xcos5x}$$

Ejemplo 6. ED de tercer orden

Determine la forma de la solución particular de $y''' - 2y'' - y' + 2y = -8e^{x} + 6e^{-x}$

Solución

Primero se debe resolver la ED homogénea

$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$	Se lleva a la ecuación auxiliar
$m^3 - 2m^2 - m + 2 = 0$	Se saca factor común por agrupación
$m^2(m-2) - (m-2) = 0$	Obtenemos dos paréntesis.
$(m^2 - 1)(m-2) = 0$	Factorizando el primer paréntesis
$(m+1)(m-1)(m-2) = 0$	Tenemos tres raíces diferentes
$m = -1 \quad m = 1 \quad m = 2$	La solución complementaria es

$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$

Ahora vamos a calcular y_p. Tenemos dos y_p diferentes

$y_{p1} = Ae^x \qquad \wedge \qquad y_{p2} = Be^{-x}$

La solución complementaria ya tiene $e^x \quad \wedge \quad e^{-x}$ entonces se multiplican cada y_p por x y se suman para derivar más fácil y rápido.

$y_p = Axe^x + Bxe^{-x}$

Se deriva tres veces la solución particular

$y_p' = Axe^x + Ae^x - Bxe^{-x} + Be^{-x}$

$y_p'' = Axe^x + 2Ae^x + Bxe^{-x} - 2Be^{-x}$

$y_p''' = Axe^x + 3Ae^x - Bxe^{-x} + 3Be^{-x}$

Se reemplaza y_p y sus derivadas en la ED

$Axe^x + 3Ae^x - Bxe^{-x} + 3Be^{-x} - 2(Axe^x + 2Ae^x + Bxe^{-x} - 2Be^{-x}) - (Axe^x + Ae^x - Bxe^{-x} + Be^{-x}) + 2(Axe^x + Bxe^{-x}) = -8e^x + 6e^{-x}$

Se aplica propiedad distributiva

$Axe^x + 3Ae^x - Bxe^{-x} + 3Be^{-x} - 2Axe^x - 4Ae^x - 2Bxe^{-x} + 4Be^{-x} - Axe^x - Ae^x + Bxe^{-x} - Be^{-x} + 2Axe^x + 2Bxe^{-x} = -8e^x + 6e^{-x}$

Se agrupan términos semejantes

$$-2Ae^{x} + 6Be^{-x} = -8e^{x} + 6e^{-x}$$

Los valores de las incógnitas son:

$$A = 4 \qquad B = 1$$

La solución particular es:

$$y_p = 4xe^{x} + xe^{-x}$$

La solución general de la ED es:

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + 4xe^{x} + xe^{-x}$$

En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de coeficientes indeterminados.

3.7.1 Ejercicios y respuestas de la sección 3.7

Ejercicios de repaso sección 3.7

Resolver la ED de orden superior por el método de superposición.

1. $y'' + 3y' + 2y = 6$

2. $4y'' + 9y = 15$

3. $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$

4. $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$

5. $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$

6. $4y'' - 4y' - 3y = cos2x$

7. $y'' + 4y = 3sen2x$

8. $y'' - 5y' = 2x^3 - 4x^2 - x + 6$

9. $y'' + 4y = (x^2 - 3)sen2x$

10. $y''' - 6y'' = 3 - cosx$

Respuestas

3.8 Método del anulador

Operador anulador Si L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes y f es una función suficientemente derivable tal que

$$L\left(f\left(x\right)\right)=0$$

Entonces se dice que L es un anulador de la función

El operador diferencial

$$\boxed{D^n}$$

Anula cada una de las funciones $1, x, x^2, ..., x^{n-1}$

El operador diferencial

$$\boxed{(D-\alpha)^n}$$

Anula cada una de las funciones $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, ..., x^{n-1}e^{\alpha x}$

El operador diferencial

$$\boxed{\left[D^2-2\alpha D+\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right]^n}$$

Anula cada una de las funciones

$e^{\alpha x} cos\beta x, xe^{\alpha x} cos\beta x, x^2 e^{\alpha x} cos\beta x, ..., x^{n-1} e^{\alpha x} cos\beta x$

$e^{\alpha x} sen\beta x, xe^{\alpha x} sen\beta x, x^2 e^{\alpha x} sen\beta x, ..., x^{n-1} e^{\alpha x} sen\beta x$

Ejemplo 1. Método del anulador

Encuentre un operador diferencial que anule la función

$6 - 3x - 7x^3$

Solución

Para anular x^3 se debe derivar cuatro veces, entonces el operador diferencial que anula la función es:

$$D^4(6 - 3x - 7x^3) = 0$$

Ejemplo 2. Método del anulador

Encuentre un operador diferencial que anule la función

e^{-5x}

Solución

Como $\alpha = -5 \quad \wedge \quad n = 1$ se anula la función con el operador diferencial:

$$(D+5)(e^{-5x}) = 0$$

Ejemplo 3. Método del anulador

Encuentre un operador diferencial que anule la función

$6e^{2x} + 2xe^{2x}$

Solución

Como $\alpha = 2 \quad \wedge \quad n = 2$ se anula la función con el operador diferencial:

$$(D-2)^2(6e^{2x} + 2xe^{2x}) = 0$$

Ejemplo 4. Método del anulador

Encuentre un operador diferencial que anule la función

Solución

Como $\alpha = -1 \;\; \beta = 2 \quad \wedge \quad n = 1$ se anula la función con el operador diferencial:

$$D^2 + 2D + 5 = 0$$

Ejemplo 5. Método del anulador

Resolver la ED $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$ por el método del anulador

Solución

La ecuación auxiliar es $\quad m^2 + 3m + 2 = 0$

Factorizando $\quad (m+2)(m+1) = 0$

Las raíces son $\quad m = -2 \quad \wedge \quad m = -1$

Solución complementaria $y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$

Como $4x^2$ se anula con el operador D^3

Se puede appreciar que $D^3(D^2 + 3D + 2)y = 4x^2$ es similar que $D^3(D^2 + 3D + 2)y = 0$

La ecuación auxiliar queda de la forma $\quad m^3(m^2 + 3m + 2) = 0$

Factorizando $\quad m^3(m+2)(m+1)=0$

Las raíces son $\quad m_1=m_2=m_3=0, \quad m=-2, \quad m=-1$

La solución general es $\quad y=c_1+c_2x+c_ex^2+c_4e^{-2x}+c_5e^{-x}$

La parte en marrón es la solución complementaria $\quad y_c$, entonces $y_p=c_1+c_2x+c_ex^2$

Que corresponde a $\quad y_p=A+Bx+Cx^2 \quad$ se deriva y se sustituye en la ED

$y_p=A+Bx+Cx^2$

$y_p'=B+2Cx$

$y_p''=2C$

Se reemplaza y_p y sus derivadas en la ED

$2c+3(B+2Cx)+2(A+Bx+Cx^2)=4x^2$

Se aplica propiedad distributiva

$2c+3B+6Cx+2A+2Bx+2Cx^2=4x^2$

Los valores de las incógnitas son:

$A=7 \qquad B=-6 \qquad \wedge \qquad c=2$

La solución particular es:

$y_p=7-6x+2x^2$

La solución general de la ED es:

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + 7 - 6x + 2x^2$$

Ejemplo 6. Método del anulador

Resolver la ED $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4senx$ por el método del anulador

Solución

La ecuación auxiliar es $\quad m^2 - 3m = 0$

Factorizando $\quad m(m-3) = 0$

Las raíces son $\quad m = 0 \quad \wedge \quad m = 3$

Solución complementaria $y_c = c_1 + c_2e^{3x}$

Como $\alpha = 3 \quad \wedge \quad n = 1$ se anula con los operadores

$(D-3)e^{3x} = 0 \quad \wedge \quad (D^2+1)senx = 0$

Entonces el anulador queda de la forma

$(D-3)(D^2+1)(D^2-3D) = 0$

La ecuación auxiliar queda de la forma

$(m-3)(m^2+1)(m^2-3m)=0$

Factorizando $\quad (m-3)(m^2+1)(m(m-3))=0$

Las raíces son $\quad m_1=0 \;\; m_2=m_3=3, \;\; m_4=i, \;\; m_5=-i$

La solución general es

$y=c_1+c_2e^{3x}+c_3xe^{3x}+c_4cosx+c_5senx$

La parte marrón es la solución complementaria $\quad y_c$

Entonces $y_p=c_3xe^{3x}+c_4cosx+c_5senx$

Que corresponde a $\quad y_p=Axe^{3x}+Bcosx+Csenx \quad$ se deriva y se sustituye en la ED

$y_p'=3Axe^{3x}+Ae^{3x}-Bsenx+Ccosx$

$y_p''=9Axe^{3x}+6Ae^{3x}-Bcosx-Csenx$

Se reemplaza y_p y sus derivadas en la ED

$9Axe^{3x}+6Ae^{3x}-Bcosx-Csenx-3(3Axe^{3x}+Ae^{3x}-Bsenx+Ccosx)=8e^{3x}+4senx$

Se aplica propiedad distributiva

$9Axe^{3x}+6Ae^{3x}-Bcosx-Csenx-9Axe^{3x}-3Ae^{3x}+3Bsenx-3Ccosx=8e^{3x}+4senx$

Se agrupan términos semejantes

$$3Ae^{3x} - Bcosx - Csenx + 3Bsenx - 3Ccosx = 8e^{3x} + 4senx$$

Los valores de las incógnitas son:

$$A = \frac{8}{3} \qquad B = \frac{6}{5} \qquad \wedge \qquad c = -\frac{2}{5}$$

La solución particular es:

$$y_p = \frac{6}{5}xe^{3x} + \frac{6}{5}cosx - \frac{2}{5}senx$$

$$y = c_1 + c_2e^{3x} + \frac{6}{5}xe^{3x} + \frac{6}{5}cosx - \frac{2}{5}senx$$

Ejemplo 7. Método del anulador

Resolver la ED $y'' + y = xcosx - cosx$ por el método del anulador

Solución

La ecuación auxiliar es $\quad m^2 + 1 = 0$

Despejando $\quad m^2 = -1$

Las raíces son $\quad m = i \quad \wedge \quad m = -i$

Solución complementaria $y_c = c_1cosx + c_2senx$

Como $\alpha = 0 \quad \wedge \quad n = 2$ se anula con el operador

$(D^2 + 1)^2 = 0$

Entonces el anulador queda de la forma

$(D^2 + 1)^2(D^2 + 1)y = 0$

La ecuación auxiliar queda de la forma

$(m^2 + 1)^2(m^2 + 1) = 0$

Operando

$(m^2 + 1)^3 = 0$

Las raíces son $\quad m = 0 \pm i \quad$ de multiplicidad tres

La solución general es

$y = c_1 cosx + c_2 senx + c_3 xcosx + c_4 xsenx + c_5 x^2 cosx + c_6 x^2 senx$

La parte marrón es la solución complementaria $\quad y_c$

Entonces $y_p = c_3 xcosx + c_4 xsenx + c_5 x^2 cosx + c_6 x^2 senx$

Construimos la solución particular

$y_p = Axcosx + Bxsenx + Cx^2 cosx + Ex^2 senx$

Se deriva y se sustituye en la ED

$y_p = Axcosx + Bxsenx + Cx^2 cosx + Ex^2 senx$

$y_p' = -Axsenx + Acosx + Bxcosx + Bsenx - Cx^2senx + 2Cxcosx + Ex^2cosx + 2Exsenx$

$y_p'' = -Axcosx - 2Asenx - Bxsenx + 2Bcosx - Cx^2cosx - 4Cxsenx + 2Ccosx - Ex^2senx + 4Excosx + 2Esenx$

Se reemplaza y_p y sus derivadas en la ED

$-Axcosx - 2Asenx - Bxsenx + 2Bcosx - Cx^2cosx - 4Cxsenx + 2Ccosx - Ex^2senx + 4Excosx + 2Esenx + Axcosx + Bxsenx + Cx^2cosx + Ex^2senx = 8e^{3x} + 4senx = xcosx - cosx$

Se agrupan términos semejantes

$-2Asenx + 2Bcosx - 4Cxsenx + 2Ccosx + 4Excosx + 2Esenx = 8e^{3x} + 4senx = xcosx - cosx$

Los valores de las incógnitas son:

$$A = \frac{1}{4} \qquad B = -\frac{1}{2} \qquad C = 0 \qquad \wedge \qquad E = \frac{1}{4}$$

La solución particular es:

$$y_p = \frac{1}{4}xcosx - \frac{1}{2}xsenx + \frac{1}{4}x^2senx$$

$$y = c_1cosx + c_2senx + \frac{1}{4}xcosx - \frac{1}{2}xsenx + \frac{1}{4}x^2senx$$

3.8.1 Ejercicios y respuestas de la sección 3.8

Ejercicios de repaso sección 3.8

Resolver la ED de orden superior por el método del anulador.

1. $y'' - 9y = 54$

2. $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

3. $y'' - y' - 12y = e^{4x}$

4. $y'' - 2y' - 3y = 4e^{x} - 9$

5. $y'' + 25y = 6senx$

6. $y'' + 2y' + y = x^2e^{x}$

7. $y'' - 2y' + 5y = e^{x}senx$

8. $y'' + 25y = 20sen5x$

9. $y'' + y' + y = xsenx$

10. $y'' + y = 4cosx - senx$

Respuestas

3.9 Variación de parámetros

El procedimiento utilizado para resolver una E.D. lineal de primer orden es también aplicable para resolver una E.D. de orden superior. Para adaptar el método de variación de parámetros a una ecuación diferencial de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

Se debe llevar la ecuación a la forma estándar

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)}$$

$P(x)\ \ Q(x)\ \ \wedge\ \ f(x)$ con continuas en I. Se halla y_c, la solución general de la ecuación homogénea. La solución particular para la ecuación lineal de segundo orden tiene la forma

$$\boxed{y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)}$$

Donde $y_1 \ \wedge\ y_2$ forman un conjunto fundamental de soluciones en I de la forma homogénea. Como la ecuación busca determinar dos funciones desconocidas $u_1 \ \wedge\ u_2$ y se cuenta con una sola ecuación, se deriva dos veces y_p y se sustituye en la ecuación en forma estándar obteniendo las ecuaciones:

$$y_1 u_1 + y_2 u_2 = 0$$

$$y_1' u_1 + y_2' u_2 = f(x)$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede resolver por la regla de Cramer

$$\boxed{u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f(x)}{W}} \quad \wedge \quad \boxed{u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f(x)}{W}}$$

De donde:

$$W = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{bmatrix} \quad \wedge \quad W_2 = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{bmatrix}$$

Las funciones $u_1 \wedge u_2$ se obtienen integrando $u_1' \wedge u_2'$.

Ejemplo 1. Variación de parámetros

Resolver la ED $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}$ por variación de parámetros

Solución

La ecuación auxiliar es $m^2 + 2m + 1 = 0$

Factorizando $(m+1)^2 = 0$

Las raíces son $m = -1$ raíz de multiplicidad dos

Solución complementaria $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

Calculamos el Wronskiano $W = \begin{bmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & -xe^{-x} + e^{-x} \end{bmatrix}$

$$W = -xe^{-2x} + e^{-2x} - (-xe^{-2x}) = -xe^{-2x} + e^{-2x} + -xe^{-2x}$$

$$W = e^{-2x}$$

Ahora calculamos $W_1 = \begin{bmatrix} 0 & x^2e^{-x} \\ x^2e^{-x} & -xe^{-x} + e^{-x} \end{bmatrix}$

$W_1 = 0 - (x^3e^{-2x}) = -x^3e^{-2x}$

Ahora calculamos $W_2 = \begin{bmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & x^2e^{-x} \end{bmatrix}$

$W_2 = x^2e^{-2x} - 0 = x^2e^{-2x}$

Entonces $u_1' = \dfrac{-x^3e^{-2x}}{e^{-2x}}$ para calcular u_1 se integra

$\int -x^3dx \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\dfrac{x^4}{4}$

$u_2' = \dfrac{x^2e^{-2x}}{e^{-2x}}$ para calcular u_2 se integra

$\int x^2dx \quad \Rightarrow \quad u_2 = \dfrac{x^3}{3}$ Recuerde que

$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$

Entonces $y_p = -\dfrac{x^4}{4}e^{-x} + \dfrac{x^3}{3}xe^{-x}$

Operando $y_p = -\dfrac{x^4e^{-x}}{4} + \dfrac{x^4e^{-x}}{3} = \dfrac{x^4e^{-x}}{12}$

$$\boxed{y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{x^4e^{-x}}{12}}$$

No es necesario verificar si hay respuestas repetidas, el método le coloca el exponente a las respuestas repetidas. Observe que la respuesta del y_p tiene exponente x^4, significa que estaba repetida.

Ejemplo 2. Variación de parámetros

Resolver la ED $y'' + 25y = sen5x$ por variación de parámetros.

Solución

La ecuación auxiliar es $m^2 + 25 = 0$

Como no se puede factorizar, se despeja $m^2 = -25$

Las raíces son $m = \pm 5i$ raíz compleja

Solución complementaria $y_c = c_1 cos5x + c_2 sen5x$

Calculamos el Wronskiano $W = \begin{bmatrix} cos5x & sen5x \\ -5sen5x & 5cos5x \end{bmatrix}$

$$W = 5cos^5x - (-5sen^5x) = 5cos^5x + 5sen^5x$$

$$W = 5$$

Ahora calculamos $W_1 = \begin{bmatrix} 0 & sen5x \\ sen5x & 5cos5x \end{bmatrix}$

$$W_1 = 0 - (sen^2 5x) = -sen^2 5x$$

Ahora calculamos $W_2 = \begin{bmatrix} cos5x & 0 \\ -5sen5x & sen5x \end{bmatrix}$

$W_2 = cos5xsen5x - 0 = sen5xcos5x$

Entonces $u_1' = \dfrac{-sen^2 5x}{5}$ para calcular u_1 se integra

Recuerde la identidad $sen^2 x = \dfrac{1 - sen(2x)}{2}$

$$-\frac{1}{5}\int \frac{1 - sen(10x)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad u_1 = -\frac{x}{10} + \frac{1}{100}cos10x$$

$u_2' = \dfrac{sen5xcos5x}{5}$ para calcular u_2 se integra por sustitución

$$\frac{1}{5}\int sen5xcos5xdx \quad \Rightarrow \quad u = cos5x \quad du = -5sen5xdx$$

$$\frac{1}{5}\int sen5xcos5xdx \quad \Rightarrow \quad u_2 = -\frac{1}{50}cos^2 5x$$

$$y_p = -\frac{x}{10}cos5x + \frac{1}{100}cos5xcos10x - \frac{1}{50}sen5xcos^2 5x$$

$$y = c_1 cos5x + c_2 sen5x - \frac{x}{10}cos5x + \frac{1}{100}cos5xcos10x - \frac{1}{50}sen5xcos^2 5x$$

Ejemplo 3. Variación de parámetros

Resolver la ED $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - x$ por variación de parámetros

Solución

La ecuación auxiliar es $\frac{1}{4}m^2 + m + 1 = 0$

Se factoriza $\left(\frac{1}{2}m + 1\right)^2 = 0$

Las raíces son $m = -2$ raíz de multiplicidad dos

Solución complementaria $y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$

Calculamos el Wronskiano $W = \begin{bmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & -2xe^{-2x} + e^{-2x} \end{bmatrix}$

$$W = -2xe^{-4x} + e^{-4x} - (-2xe^{-4x}) = -2xe^{-4x} + e^{-4x} + 2xe^{-4x}$$

$$W = e^{-4x}$$

$f(x)$ se lee cuando la ED esté en forma estándar

Ahora calculamos $W_1 = \begin{bmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ 4x^2 - 4x & -2xe^{-2x} + e^{-2x} \end{bmatrix}$

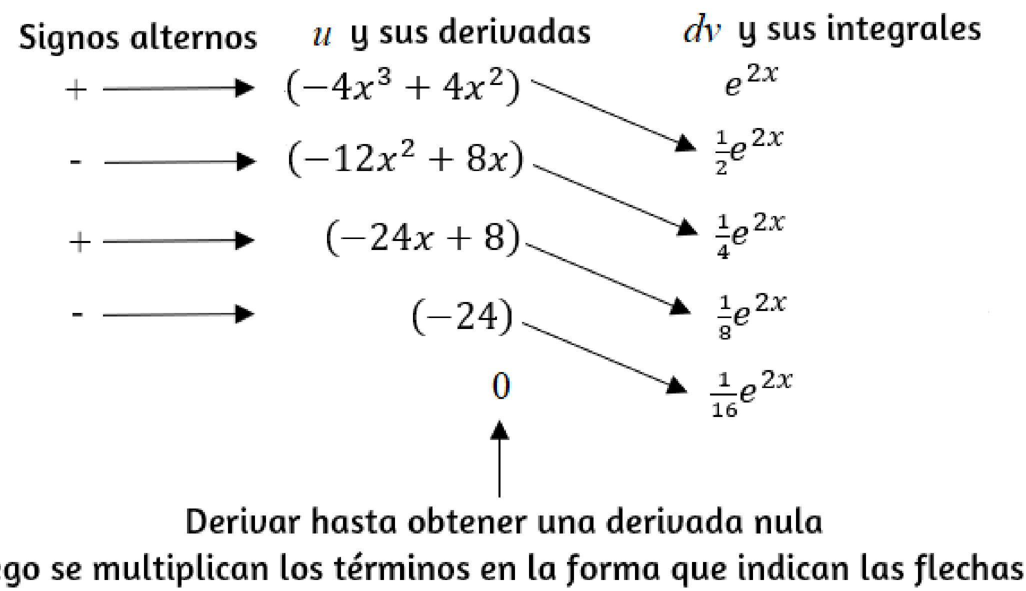
$$W_1 = 0 - 4(x^3 - x^2)e^{-2x} = -4(x^3 - x^2)e^{-2x}$$

Ahora calculamos $W_2 = \begin{bmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & 4x^2 - 4x \end{bmatrix}$

$$W_2 = 4(x^2 - x)e^{-2x} - 0 = 4(x^2 - x)e^{-2x}$$

Entonces $u_1' = \dfrac{-4(x^3 - x^2)e^{-2x}}{e^{-4x}}$ para calcular u_1 se integra

$\int(-4x^3 + 4x^2)e^{2x}dx \quad \Rightarrow \quad$ se integra por partes



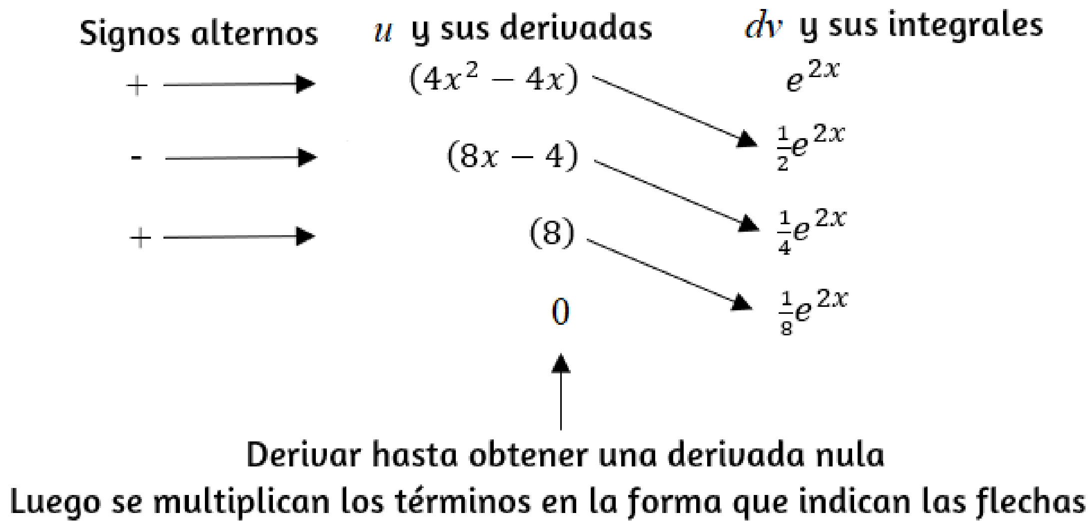
$$u_1 = -2x^3e^{2x} + 2x^2e^{2x} + 3x^2e^{2x} - 2xe^{2x} - 3xe^{2x} + e^{2x} + \frac{3}{2}e^{2x}$$

Agrupando términos semejantes

$$u_1 = -2x^3e^{2x} + 5x^2e^{2x} - 5xe^{2x} + \frac{5}{2}e^{2x}$$

$$u_2' = \frac{4(x^2 - x)e^{-2x}}{e^{-4x}}$$ para calcular u_2 se integra

$$\int (4x^2 - 4x)e^{2x}dx \quad \Rightarrow$$ se integra por partes



$$u_2 = 2x^2e^{2x} - 2xe^{2x} - 2xe^{2x} + e^{2x} + e^{2x}$$

Agrupando términos semejantes

$$u_2 = 2x^2e^{2x} - 4xe^{2x} + 2e^{2x}$$

Entonces $y_p = -2x^3 + 5x^2 - 5x + \dfrac{5}{2} + 2x^2 - 4x + 2$

Operando $y_p = -2x^3 + 7x^2 - 9x + \dfrac{9}{2}$

$$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - 2x^3 + 7x^2 - 9x + \frac{9}{2}$$

Ejemplo 2. Variación de parámetros

Resolver la ED $y'' + y = sec^2x$ por variación de parámetros.

Sujeta a la condición $y(0) = 2 \quad \wedge \quad y'(0) = 5$

Solución

Se resuelve la ED, luego se hallan los valores de las constantes

La ecuación auxiliar es $\quad m^2 + 1 = 0$

Como no se puede factorizar, se despeja $\quad m^2 = -1$

Las raíces son $\quad m = \pm i \quad$ raíz compleja

Solución complementaria $y_c = c_1cosx + c_2senx$

Calculamos el Wronskiano $\quad W = \begin{bmatrix} cosx & senx \\ -senx & cosx \end{bmatrix}$

$$W = cos^2x - (-sen^2x) = cos^2x + sen^2x = 1$$

Ahora calculamos $\quad W_1 = \begin{bmatrix} 0 & senx \\ sec^2x & cosx \end{bmatrix}$

$$W_1 = 0 - (sec^2xsenx) = -sec^2xsenx$$

Ahora calculamos $\quad W_2 = \begin{bmatrix} cosx & 0 \\ -senx & sec^2x \end{bmatrix}$

$W_2 = cosxsec^2x - 0 = cosxsec^2x$

Entonces $u_1' = \dfrac{-sec^2xsenx}{1}$ para calcular u_1 se integra

Recuerde la identidad $secxsenx = tanx$

$\int -secxtanxdx \quad \Rightarrow \quad u_1 = -secx$

$u_2' = \dfrac{cosxsec^2x}{1}$ para calcular u_2 se integra

Recuerde la identidad $secxcosx = 1$

$\int secxdx \quad \Rightarrow \quad u_2 = \ln|secx + tanx|$

Recuerde que $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$

Entonces $y_p = -secxcosx + \ln|secx + tanx|\, senx$

Operando $y_p = -1 + senx \ln|secx + tanx|$

$y = c_1cosx + c_2senx - 1 + senx \ln|secx + tanx|$

Reemplazamos la condición $y(0) = 2$

$2 = c_1cos0 + c_2sen0 - 1 + sen0 \ln|sec0 + tan0|$

$2 = c_1 - 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 3$

$y' = -c_1senx + c_2cosx + senx.\dfrac{1}{secx + tanx}(secxtanx +$
$sec^2x) + cosx \ln|secx + tanx|$

$$y' = -c_1 senx + c_2 cosx + senx secx + cosx \ln |secx + tanx|$$

Reemplazamos la condición $y'(0) = 5$

$$5 = -c_1 sen0 + c_2 cos0 + sen0 sec0 + cos0 \ln |sec0 + tan0|$$

$$c_2 = 5$$

Reemplazando el valor de las constantes en la solución general, obtenemos la solución particular

$$y = 3cosx + 5senx - 1 + senx \ln |secxtanx|$$

En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de variación de parámetros.

3.9.1 Ejercicios y respuestas de la sección 3.9

Ejercicios de repaso sección 3.9

Resolver la ED de orden superior por variación de parámetros.

1. $y'' + y = secx$

2. $y'' + y = tanx$

3. $y'' + y = senx$

4. $y'' + y = sec^2x$

5. $y'' + y = \sec\theta\tan\theta$

6. $y'' + y = cos^2x$

7. $y'' - 9y = \dfrac{9x}{e^{3x}}$

8. $y'' - y = coshx$

9. $y'' - y = senh2x$

10. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$

Respuestas

3.10 Ecuación de Cauchy Euler

Una ecuación diferencial de la forma

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$$

Donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son constantes se conoce como ecuación de Cauchy-Euler. Tiene como característica que el grado de los coeficientes nominales coincide con el orden de la ecuación. La ecuación de segundo orden tiene la forma:

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$$

Método de solución: La función elemental no trivial cuya derivada es una constante múltiple de sí misma es la función exponencial x^m, entonces la solución es de la forma $y = x^m$

Discriminante	Solución Ecuación Auxiliar	Solución Ecuación Diferencial
$b^2 - 4ac > 0$	$m_1 \neq m_2$	$y_1 = x^{m_1}$ $y_2 = x^{m_2}$
$b^2 - 4ac = 0$	$m_1 = m_2$	$y_1 = x^m$ $y_2 = x^m ln\|x\|$
$b^2 - 4ac < 0$	$m = a \pm bi$ Raíces complejas	$y_1 = x^{\alpha}\cos(\beta ln\|x\|)$ $y_2 = x^{\alpha} sen(\beta ln\|x\|)$

Tabla 6. Soluciones ecuación de Cauchy homogéneas

Ejemplo 1. ecuación homogénea

Resolver la ecuación de Cauchy Euler $x^2y'' + xy' - y = 0$

Solución

Vamos a reemplazar la solución $y = x^m$ y sus derivadas en la ED de segundo orden

$y = x^m \qquad y' = mx^{m-1} \qquad y'' = m(m-1)x^{m-2}$

$x^2 m(m-1)x^{m-2} + xmx^{m-1} - x^m = 0$

Agrupamos las x aplicando propiedades de potenciación

$m(m-1)x^m + mx^m - x^m = 0$	Factor común
$x^m\left(m(m-1) + m - 1\right) = 0$	Propiedad distributiva
$m^2 - m + m - 1 = 0$	Agrupando términos semejantes
$m^2 - 1 = 0$	Factorizando obtenemos
$m_1 = 1 \quad \wedge \quad m_2 = -1$	La solución general es

$$y = c_1 x + c_2 x^{-1}$$

Ejemplo 2. ecuación homogénea

Resolver la ecuación de Cauchy Euler $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$

Solución

Vamos a reemplazar la solución $y = x^m$ y sus derivadas en la ED de segundo orden

$$y = x^m \qquad y' = m x^{m-1} \qquad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + 3xmx^{m-1} + x^m = 0$$

Agrupamos las x aplicando propiedades de potenciación

$m(m-1)x^m + 3mx^m + x^m = 0$	Factor común
$x^m\big(m(m-1) + 3m + 1\big) = 0$	Se pasa x^m a dividir al lado derecho y se aplica propiedad distributiva
$m^2 + 2m + 1 = 0$	Factorizando

$(m+1)^2 = 0$ Tenemos dos raíces iguales. $m = -1$. La solución general es

$$y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-1} \ln |x|$$

Ejemplo 3. ecuación homogénea

Resolver la ecuación de Cauchy Euler $x^2 y'' - xy' + 2y = 0$

Solución

Vamos a reemplazar la solución $y = x^m$ y sus derivadas en la ED de segundo orden

$y = x^m \qquad y' = mx^{m-1} \qquad y'' = m(m-1)x^{m-2}$

$x^2 m(m-1)x^{m-2} - xmx^{m-1} + 2x^m = 0$

Agrupamos las x aplicando propiedades de potenciación

$m(m-1)x^m - mx^m + 2x^m = 0$ Factor común

$x^m(m(m-1) - m + 2) = 0$

Se pasa x^m a dividir al lado derecho y se aplica propiedad distributiva

$m^2 - 2m + 2 = 0$

Como el polinomio no es factorizable, usamos la ecuación cuadrática

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

Obtenemos la solución de la ecuación auxiliar

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Raíz negativa, entonces obtenemos solución compleja

$m = 1 \pm i$

Solución general

$$y = c_1 x cos(\ln|x|) + c_2 x sen(\ln|x|)$$

Ejemplo 4. ecuación homogénea

Resolver la ecuación de Cauchy Euler $x^3y''' - 6y = 0$

Solución

Vamos a reemplazar la solución $y = x^m$ y sus derivadas en la ED de segundo orden

$y = x^m \qquad y' = mx^{m-1} \qquad y'' = m(m-1)x^{m-2}$

$y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$

$x^3 m(m-1)(m-2)x^{m-3} - 6x^m = 0$

Agrupamos las x aplicando propiedades de potenciación

$m(m-1)(m-2)x^m - 6x^m = 0$ Factor común

$x^m(m(m-1)(m-2) - 6) = 0$

Se pasa x^m a dividir al lado derecho, se aplica propiedad distributiva y se agrupan términos semejantes

$m^3 - 3m^2 + 2m - 6 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 2 & -6 \\ 3 & & 3 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Con la división sintética obtenemos una raíz $m = 3$ y con el residuo obtenemos una ecuación de segundo grado.

$(m-3)(m^2+2) = 0$

Se despeja el segundo término para hallar las tres raíces de la ecuación auxiliar

$m = 3 \quad \wedge \quad m = \pm\sqrt{2}$ Solución general

$$y = c_1 x^3 + c_2 cos(\sqrt{2}\ln|x|) + c_3 sen(\sqrt{2}\ln|x|)$$

Ejemplo 5. ecuación no homogénea

Resolver la ecuación de Cauchy Euler $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4e^x$

Solución

Vamos a reemplazar la solución $y = x^m$ y sus derivadas en la ED de segundo orden

$y = x^m \qquad y' = mx^{m-1} \qquad y'' = m(m-1)x^{m-2}$

$x^2m(m-1)x^{m-2} - 3xmx^{m-1} + 3x^m = 0$

Agrupamos las x aplicando propiedades de potenciación

$m(m-1)x^m - 3mx^m + 3x^m = 0$ Factor común

$x^m(m(m-1) - 3m + 3) = 0$ Se pasa x^m a dividir al lado derecho y se aplica distributiva

$m^2 - 4m + 3 = 0$ Factorizando

$(m-3)(m-1) = 0$ Las dos raíces son

$m = 3 \quad \wedge \quad m = 1$ La solución complementaria es:

$$y_c = c_1 x^3 + c_2 x$$

Calculamos el Wronskiano $W = \begin{bmatrix} x^3 & x \\ 3x^2 & 1 \end{bmatrix}$

$$W = x^3 - 3x^3$$

$$W = -2x^3$$

para calcular $W_1 \quad \wedge \quad W_2$ debemos llevar la ED a la forma estándar

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2e^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2x^2e^x$$

Ahora calculamos $W_1 = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 2x^2e^x & 1 \end{bmatrix}$

$$W_1 = 0 - (2x^3e^x) = -2x^3e^x$$

Ahora calculamos $W_2 = \begin{bmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2 & 2x^2e^x \end{bmatrix}$

$$W_2 = 2x^5e^x - 0 = 2x^5e^x$$

Entonces $u_1' = \dfrac{-2x^3e^x}{-2x^3}$ para calcular u_1 se integra

$\int e^x dx \quad \Rightarrow \quad u_1 = e^x$

$u_2' = \dfrac{2x^5e^x}{-2x^3}$ para calcular u_2 se integra

$\int -x^2e^2dx \quad \Rightarrow$ Se integra por partes

Hacemos $u = -x^2 \quad \wedge \quad dv = e^x$

Signos alternos	u y sus derivadas	dv y sus integrales
+	$-x^2$	e^x
-	$-2x$	e^x
+	-2	e^x
	0	e^x

$$u_2 = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x$$

Recuerde que $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$

Entonces $y_p = (e^x)(x^3) + (-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x)(x)$

$$y_p = x^3e^x - x^3e^x + 2x^2e^x - 2xe^x$$

Agrupando términos semejantes obtenemos

$$y_p = 2x^2e^x - 2xe^x$$

La solución general es:

$$y = c_1x^3 + c_2x + 2x^2e^x - 2xe^x$$

Ejemplo 6. ecuación no homogénea

Resolver la ecuación de Cauchy Euler $x^2y'' + 8xy' + 10y = x^{-1}\ln|x|$

Solución

Vamos a reemplazar la solución $y = x^m$ y sus derivadas en la ED de segundo orden

$y = x^m \qquad y' = mx^{m-1} \qquad y'' = m(m-1)x^{m-2}$

$x^2m(m-1)x^{m-2} + 8xmx^{m-1} + 10x^m = 0$

Agrupamos las x aplicando propiedades de potenciación

$m(m-1)x^m + 8mx^m + 10x^m = 0$ Factor común

$x^m(m(m-1) + 8m + 10) = 0$ Se pasa x^m a dividir al lado derecho y se aplica distributiva

$m^2 + 7m + 10 = 0$ Factorizando

$(m+5)(m+2)=0$ Las dos raíces son

$m=-5 \quad \wedge \quad m=-2$ La solución complementaria es:

$$y_c = c_1 x^{-5} + c_2 x^{-2}$$

Calculamos el Wronskiano $W = \begin{bmatrix} x^{-5} & x^{-2} \\ -5x^{-6} & -2x^{-3} \end{bmatrix}$

$$W = -2x^{-8} + 5x^{-8}$$

$$W = 3x^{-8}$$

para calcular $W_1 \quad \wedge \quad W_2$ debemos llevar la ED a la forma estándar

$$y'' + \frac{8}{x}y' + \frac{10}{x^2}y = \frac{x^{-1}\ln|x|}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = x^{-3}\ln|x|$$

Ahora calculamos $W_1 = \begin{bmatrix} 0 & x^{-2} \\ x^{-3}\ln|x| & -2x^{-3} \end{bmatrix}$

$$W_1 = 0 - (x^{-5}\ln|x|) = -x^{-5}\ln|x|$$

Ahora calculamos $W_2 = \begin{bmatrix} x^{-5} & 0 \\ -5x^{-6} & x^{-3}\ln|x| \end{bmatrix}$

$$W_2 = x^{-8}\ln|x| - 0 = x^{-8}\ln|x|$$

Entonces $u_1' = \dfrac{-x^{-5}\ln|x|}{3x^{-8}}$ para calcular u_1 se integra

$$\int \frac{-x^3 \ln|x|}{3} dx$$

Se integra por partes

$$u = \ln|x| \qquad dv = -\frac{x^3}{3} dx$$

Aplicando la fórmula de integración por partes

$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = -\frac{x^4}{12}$$

$$u_1 = -\frac{x^4 \ln|x|}{12} + \frac{1}{12} \int x^3 dx$$

u_1 es

$$u_1 = -\frac{x^4 \ln|x|}{12} + \frac{1}{48} x^4$$

Ahora calculamos u_2

$$u_2' = \frac{x^{-8} \ln|x|}{3x^{-8}}$$ para calcular u_2 se integra

$$\int \frac{\ln|x|}{3} dx$$

Se integra por partes

$$u = \frac{\ln|x|}{3} \qquad dv = dx$$

Aplicando la fórmula de integración por partes

$$du = \frac{1}{3x} dx \qquad v = x$$

$$u_2 = \frac{x \ln|x|}{3} - \frac{1}{3} \int dx$$

$$u_2 = \frac{x \ln|x|}{3} - \frac{x}{3}$$

Ahora calculamos y_p

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$y_p = \left(-\frac{x^4 \ln|x|}{12} + \frac{x^4}{48}\right) x^{-5} + \left(\frac{x \ln|x|}{3} - \frac{x}{3}\right) x^{-2}$$

Aplicando distributiva

$$y_p = -\frac{x^{-1} \ln|x|}{12} + \frac{x^{-1}}{48} + \frac{x^{-1} \ln|x|}{3} - \frac{x^{-1}}{3}$$

Agrupando términos semejantes obtenemos

$$y_p = -\frac{x^{-1} \ln|x|}{4} - \frac{5x^{-1}}{16}$$

La solución general es:

$$y = c_1 x^{-5} + c_2 x^{-2} - \frac{x^{-1} \ln|x|}{4} - \frac{5x^{-1}}{16}$$

Ahora vamos a resolver una ED de Cauchy Euler con valores iniciales

Ejemplo 7. Ecuación no homogénea

Resolver la ecuación de Cauchy Euler $x^2y'' - 5xy' + 8y = 8x^6$

Sujeta a la condición $y\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \wedge \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Solución

Reemplazamos la solución $y = x^m$ y sus derivadas en la ED.

$$y = x^m \qquad y' = mx^{m-1} \qquad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

$$x^2m(m-1)x^{m-2} - 5xmx^{m-1} + 8x^m = 0$$

Agrupamos las x aplicando propiedades de potenciación

$$m(m-1)x^m - 5mx^m + 8x^m = 0$$

Factor común

$$x^m(m(m-1) - 5m + 8) = 0$$

Se pasa x^m a dividir al lado derecho y se aplica distributiva

$$m^2 - 6m + 8 = 0$$

Factorizando

$$(m-2)(m-4) = 0$$

Las dos raíces son

$m = 2 \quad \wedge \quad m = 4$ La solución complementaria es:

$y_c = c_1 x^2 + c_2 x^4$

Calculamos el Wronskiano $W = \begin{bmatrix} x^2 & x^4 \\ 2x & 4x^3 \end{bmatrix}$

$W = 4x^5 - 2x^5$

$W = 2x^5$

para calcular $W_1 \quad \wedge \quad W_2$ debemos llevar la ED a la forma estándar

$y'' - \frac{5}{x} y' + \frac{8}{x^2} y = 8x^4 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 8x^4$

Ahora calculamos $W_1 = \begin{bmatrix} 0 & x^4 \\ 8x^4 & 4x^3 \end{bmatrix}$

$W_1 = 0 - (8x^8) = -8x^8$

Ahora calculamos $W_2 = \begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 8x^4 \end{bmatrix}$

$W_2 = 8x^6 - 0 = 8x^6$

Entonces $u_1' = \frac{-8x^8}{2x^5}$ para calcular u_1 se integra

$\int -4x^3 dx$

$u_1 = -x^4$

Ahora calculamos u_2

$u_2' = \dfrac{8x^6}{2x^5}$ para calcular u_2 se integra

$\int 4x dx$

$u_2 = 2x^2$

Ahora calculamos y_p

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$y_p = (-x^4)(x^2) + (2x^2)(x^4)$

$y_p = -x^6 + 2x^6$

Agrupando términos semejantes obtenemos

$y_p = x^6$

La solución general es:

$y = c_1 x^2 + c_2 x^4 + x^6$

Reemplazamos las condiciones iniciales en la solución general

$0 = \dfrac{1}{4}c_1 + \dfrac{1}{16}c_2 + \dfrac{1}{64}$ ecuación (1)

Derivamos la solución general para reemplazar la otra condición

$$y' = 2c_1x + 4c_2x^3 + 6x^5$$

Reemplazamos C.I

$$0 = c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{3}{16}$$

ecuación (2). Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{4}c_1 + \dfrac{1}{16}c_2 + \dfrac{1}{64} \\ 0 = c_1 + \dfrac{1}{2}c_2 + \dfrac{3}{16} \end{cases}$$

Multiplicamos la ecuación (2) por $-\dfrac{1}{4}$ y resolvemos el sistema de ecuaciones por eliminación.

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{64} = \dfrac{1}{4}\cancel{c_1} + \dfrac{1}{16}c_2 \\ \dfrac{3}{64} = -\dfrac{1}{4}\cancel{c_1} - \dfrac{1}{8}c_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{32} = -\frac{1}{16}c_2$$

Obtenemos $c_2 = -\dfrac{1}{2}$

Reemplazando en la ecuación (1) obtenemos $c_1 = \dfrac{1}{16}$

La solución particular es:

$$\boxed{y = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + x^6}$$

En el siguiente video, realizado por [Jaime H. Ramírez Rios](), podrás observar un ejemplo de Cauchy Euler homogénea.

En el siguiente video, realizado por [Jaime H. Ramírez Rios](), podrás observar un ejemplo de Cauchy Euler no homogénea.

3.10.1 Ejercicios y respuestas de la sección 3.10

Ejercicios de repaso sección 3.9

Resolver la ED de orden superior por Cauchy Euler.

1. $x^2y'' - 2y = 0$
2. $xy'' - 3y' = 0$
3. $x^2y'' + xy' + 4y = 0$
4. $x^2y'' - 3xy' - 2y = 0$
5. $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$
6. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$
7. $x^2y'' - 7xy' + 41y = 0$
8. $x^3y''' - 6y = 0$
9. $x^3y''' + xy' - y = 0$
10. $xy^{(4)} + 6y''' = 0$
11. $xy'' - 4y' = x^4$

Respuestas

Capítulo 4

TRANSFORMADA DE LAPLACE

4.1 Transformada Integral

En este capítulo se examina un tipo especial de transformada integral llamada transformada de Laplace. Además de tener la propiedad de linealidad, la transformada de Laplace tiene muchas otras propiedades interesantes que la hacen muy útil para resolver problemas lineales con valores iniciales.

La Transformada de Laplace corresponde a un operador $T(f)$ definido por la integral

$$f\left(t\right)=\int_{0}^{\infty}k\left(s,t\right)f\left(t\right)dt \tag{E1}$$

Con $f(t)$ definido para $T\geq 0$

Transforma una función f de la variable t en una función F de la variable s.

La integral $(E1)$ se define como un límite

$$\int_{0}^{\infty}k\left(s,t\right)f\left(t\right)dt=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}k\left(s,t\right)f\left(t\right)dt$$

Si el límite existe se dice que la integral converge, en caso contrario diverge. En general el límite existirá sólo para ciertos valores de la variable s.

La función $k\left(s,t\right)$ en la ecuación $(E1)$ se llama **Kernel** o **Núcleo** de la transformada. La elección de $k\left(s,t\right)=e^{-st}$ como el núcleo nos proporciona una integral especialmente importante, la cual vamos a definir a continuación.

Definición: sea f una función definida por $t \geq 0$ entonces se dice que la integral

$$\mathscr{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f\left(t\right) dt \qquad \text{(E2)}$$

Es la transformada de Laplace de f, siempre que la integral converja.

Cuando la integral de la ecuación $(E2)$ converge el resultado es una función de s. En el análisis general se usa una letra minúscula para denotar la función que se transforma y la letra mayúscula correspondiente para denotar su transformada, por ejemplo:

$$\mathscr{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = F(s) \quad \mathscr{L}\left\{g\left(t\right)\right\} = G(s) \quad \mathscr{L}\left\{y\left(t\right)\right\} = Y(s)$$

Ejemplo 1. Transformada de Laplace

Evaluar la Transformada de Laplace de k

Solución

$\mathscr{L}\left\{k\right\} = \int_0^\infty ke^{-st} dt$

Como no se puede evaluar una integral con un integrando infinito, transformamos la integral en un límite

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b ke^{-st}dt$$

Sacamos la constante k

$$\lim_{b\to\infty} k\int_0^b e^{-st}dt$$

Se integra por sustitución

$$\lim_{b\to\infty} -\left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^b$$

Evaluamos la integral

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-sb}}{s}+\frac{e^0}{s}$$

Evaluamos el límite

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-sb}}{s}+\frac{e^0}{s}=\frac{1}{s}$$

Concluimos que la Transformada de Laplace de la función constante k es:

$$\frac{1}{s}$$

Este resultado es válido para $s > 0$

Ahora vamos a evaluar la Transformada de Laplace de la función identidad t

Ejemplo 2. Transformada de Laplace

Evaluar la Transformada de Laplace de t

Solución

$\mathscr{L}\left\{t\right\} = \int_0^{\infty} te^{-st}dt$

Como no se puede evaluar una integral con un integrando infinito, transformamos la integral en un límite. También se debe tener en cuenta que esta integral es diferente a la anterior porque la t es una variable

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^t te^{-st}dt$$

Se integra por partes

$$u = t \qquad dv = e^{-st}$$

$$du = dt \qquad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes

$$\lim_{b \to \infty} -\frac{te^{-st}}{s} + \frac{1}{s}\int_0^t e^{-st}dt$$

Se integra por sustitución

$$\lim_{b \to \infty} \left[-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^b$$

Evaluamos la integral

$$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{be^{-sb}}{s}-\frac{1}{s^2}e^{-sb}\right]-\left[-\frac{0e^{0}}{s}-\frac{1}{s^2}e^{0}\right]$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{be^{-sb}}{s}-\frac{1}{s^2}e^{-sb}\right]+\frac{1}{s^2}$$

Evaluamos el límite. Se debe notar que el primer término es una indeterminación, pues multiplicamos ∞ por 0. Por tanto, debemos aplicar el teorema de L´H$\hat{o}$pital.

Recuerde que para aplicar el teorema debemos tener un cociente.

$$\lim_{b\to\infty}-\frac{b}{e^{sb}}=-\frac{1}{s^2e^{sb}}=0$$

Al evaluar el límite nos da 0

Concluimos que la Transformada de Laplace de la función identidad t es:

$$\frac{1}{s^2}$$

Este resultado es válido para $s>0$

Con los dos ejemplos anteriores se establece la generalización de la Transformada de Laplace mediante el siguiente teorema llamado transformadas básicas. Se sobreentiende la restricción de s para la convergencia de cada Transformada de Laplace.

Teorema 1. Transformadas de algunas funciones básicas	
1. $£\{k\} = \frac{k}{s}$	2. $£\{t\} = \frac{1}{s^2}$
3. $£\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $£\left\{e^{\mathrm{kt}}\right\} = \frac{1}{s-k}$
5. $£\{\mathrm{senkt}\} = \frac{k}{s^2+k^2}$	6. $£\{\mathrm{coskt}\} = \frac{s}{s^2+k^2}$
7. $£\{\mathrm{senhkt}\} = \frac{k}{s^2-k^2}$	8. $£\{\mathrm{coshkt}\} = \frac{s}{s^2-k^2}$

Tabla 7. Transformada de funciones básicas

Mediante integrales básicas como sustitución y partes vistas en cálculo integral el estudiante puede verificar las transformadas básicas que están en la tabla 7

La transformada de Laplace corresponde a un operador lineal.

$$\mathscr{L}\left\{\alpha f\left(t\right) \pm \beta g\left(t\right)\right\}$$

Podemos aplicar las mismas propiedades de las integrales porque la transformada de Laplace es una integral, entonces podemos dividir la función anterior en dos transformadas

$$\mathscr{L}\left\{\alpha f\left(t\right)\right\} \pm \mathscr{L}\left\{\beta g\left(t\right)\right\}$$

Ahora sacamos las constantes de las transformadas

$$\alpha\ \mathscr{L}\left\{f\left(t\right)\right\} \pm \beta\ \mathscr{L}\left\{g\left(t\right)\right\}$$

Ejemplo 3. Transformada básica

Evaluar la Transformada $\mathscr{L}\left\{5t+2-4sen5t\right\}$

Solución

Como la transformada de Laplace es un operador lineal podemos separar la función en tres transformadas.

$$\mathscr{L}\left\{5t\right\}+\mathscr{L}\left\{2\right\}-\mathscr{L}\left\{4sen5t\right\}$$

Sacamos las constantes de cada transformada

$$5\mathscr{L}\left\{t\right\}+2\mathscr{L}\left\{1\right\}-4\mathscr{L}\left\{sen5t\right\}$$

Ahora aplicamos las transformadas básicas del teorema 1, aplicamos las propiedades 2, 1 y 5

$$5\frac{1}{s^2}+2\frac{1}{s}-4\frac{5}{s^2+5^2}$$

Operando los términos obtenemos:

$$\frac{5}{s^2}+\frac{2}{s}-\frac{20}{s^2+25}$$

Estos resultados también se pueden obtener integrando cada término

Ejemplo 4. Transformada básica

Evaluar la Transformada $\mathscr{L}\left\{3t^4+3cos4t-8e^{-3t}+2senh5t\right\}$

Solución

Separamos la función en cuatro transformadas, esto se puede hacer cuando los términos estén separados por sumas o restas

$$\mathscr{L}\left\{3t^4\right\}+\mathscr{L}\left\{3cos4t\right\}-\mathscr{L}\left\{8e^{-3t}\right\}+\mathscr{L}\left\{2senh5t\right\}$$

Ahora sacamos la constante de cada transformadas

$$3\mathscr{L}\left\{t^4\right\}+3\mathscr{L}\left\{cos4t\right\}-8\mathscr{L}\left\{e^{-3t}\right\}+2\mathscr{L}\left\{senh5t\right\}$$

Ahora aplicamos las transformadas básicas del teorema 1, aplicamos las propiedades 3, 4, 6 y 8

$$3\frac{4!}{s^{4+1}}+3\frac{s}{s^2+4^2}-8\frac{1}{s-(-3)}+2\frac{5}{s^2-5^2}$$

Operando los términos obtenemos:

$$\frac{74}{s^5}+\frac{3s}{s^2+16}-\frac{8}{s+3}+\frac{10}{s^2-25}$$

Ejemplo 5. Transformada básica

Evaluar la Transformada $\mathscr{L}\left\{cos^2 t\right\}$

Solución

La transformada de Laplace de $cos^2 t$ no está en las transformadas básicas, entonces es necesario aplicar identidades para transformar la función

Recuerde la identidad $cos^2 t = \dfrac{1 + cos2t}{2}$

$$\mathscr{L}\left\{cos^2 t\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{1 + cos2t}{2}\right\} =$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}\left\{cos2t\right\}$$

Ahora aplicamos las transformadas básicas del teorema 1, aplicamos las propiedades 1, y 6

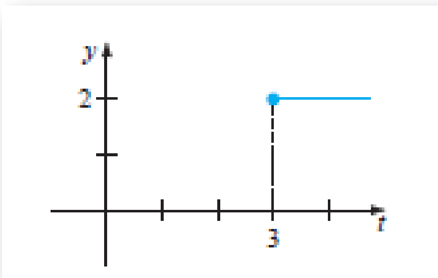
Operando los términos obtenemos:

$$\frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2 + 4)}$$

Ejemplo 6. Transformada de una función continua por tramos

Evalúe $\mathscr{L}\{f(t)\}$ donde $f(t)=\begin{cases}0 & \quad 0\leq t=3\\ 2 & \quad \quad t\geq 3\end{cases}$

Solución



La función que se muestra en la figura, es continua por tramos y de orden exponencial para $t>0$, la función f se define en dos tramos, la $\mathscr{L}\{f(t)\}$ se expresa como la suma de dos integrales

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^3 0e^{-st}dt+\int_3^\infty 2e^{-st}dt$$

Sólo se evalua la segunda integral, la primera es 0

$$\lim_{b\to\infty}\int_3^b 2e^{-st}dt$$

Se saca la constante de la integral

$$\lim_{b\to\infty} 2\int_3^b e^{-st}dt$$

Integrando

$$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2e^{-st}}{s}\right]_3^b$$

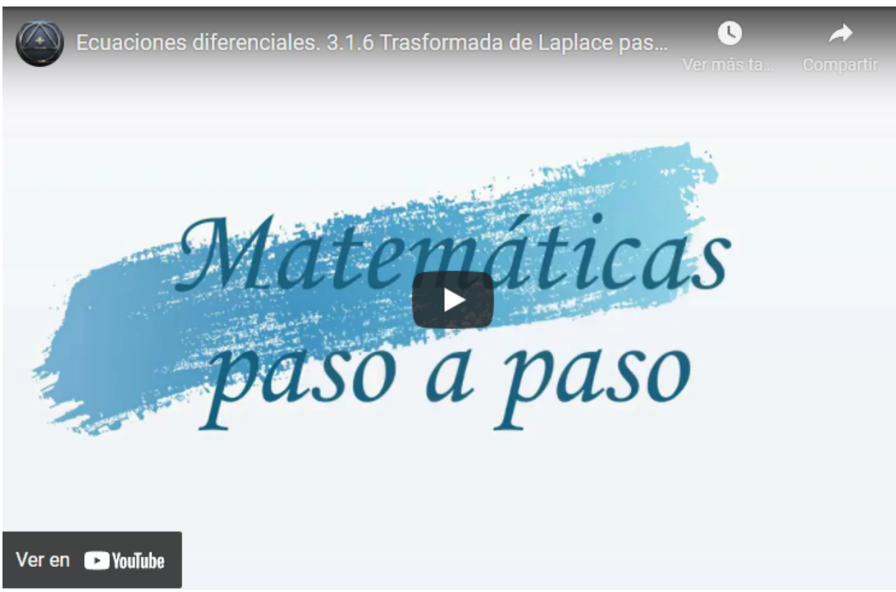
Evaluamos la integral

$$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2e^{-sb}}{s}\right]-\left[-\frac{2e^{-3s}}{s}\right]$$

Evaluando el límite obtenemos

$$\frac{2e^{-3s}}{s}$$

En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de Transformada de Laplace por tramos.



4.1.1 Ejercicios y respuestas de la sección 4.1

Ejercicios de repaso sección 4.1

Evaluar las transformadas de Laplace.

1. $f(t) = 2t^4$

2. $f(t) = t^2 + 6t - 3$

3. $f(t) = t^2 - e^{-9t} + cosh5t$

4. $f(t) = (t+1)^3$

5. $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$

6. $f(t) = (1 + e^{2t})^2$

7. $f(t) = (2t-1)^3$

8. $f(t) = 2sen2tcos2t$

9. $f(t) = e^t cosht$

10. $f(t) = e^t senht$

11. $f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$

Respuestas

4.2 Transformada Inversa

El problema inverso:

Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(s)$, es decir, $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$. Se dice entonces que $f(t)$ es la transformada de Laplace inversa de $F(s)$ y se escribe:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{f(s)\}$$

Al igual que la transformada de Laplace básica, existe un teorema para generalizar las transformadas básicas inversas

Teorema 2. Algunas transformadas inversas	
1. $£^{-1}\left\{\frac{k}{s}\right\} = k$	2. $£^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$
3. $£^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$	4. $£^{-1}\left\{\frac{1}{s-k}\right\} = e^{\text{kt}}$
5. $£^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \text{senkt}$	6. $£^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \text{coskt}$
7. $£^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\} = \text{senhkt}$	8. $£^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\} = \text{coshkt}$

Tabla 8. Transformada de funciones inversas

La transformada de Laplace inversa corresponde a un operador lineal.

$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha f(t) \pm \beta g(t)\}$

Podemos aplicar las mismas propiedades de las integrales porque la transformada de Laplace es una integral, entonces podemos dividir la función anterior en dos transformadas

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\alpha f\left(t\right)\right\} \pm \mathscr{L}^{-1}\left\{\beta g\left(t\right)\right\}$$

Ahora sacamos las constantes de las transformadas

$$\alpha\ \mathscr{L}^{-1}\left\{f\left(t\right)\right\} \pm \beta\ \mathscr{L}^{-1}\left\{g\left(t\right)\right\}$$

Ejemplo 1. Transformada inversa

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s}{s^2-16}\right\}$

Solución

Como la transformada inversa es un operador lineal, primero se debe sacar la constante de la transformada y descomponer el 16

$$3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-(4)^2}\right\}$$

La función corresponde a la propiedad 8 de la tabla 8, donde $k=4$

$$cosh 4t$$

En ocasiones se debe ajustar la función

Ejemplo 2. Transformada inversa

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^5}\right\}$

Solución

Corresponde a la propiedad 3 de la tabla 8, pero se debe ajustar.

$n+1=5$, entonces $n=4$, por tanto, la función se debe multiplicar y dividir por $4!$

$$\frac{1}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}$$

$$\frac{1}{24}t^4$$

Ejemplo 3. Transformada inversa

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+7}\right\}$

Solución

Corresponde a la propiedad 5 de la tabla 8, pero se debe ajustar.

$k^2 = 7$, entonces $k = \sqrt{7}$, por tanto, la función se debe multiplicar y dividir por $\sqrt{7}$

$$\frac{1}{\sqrt{7}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}} sen\sqrt{7}t$$

Ejemplo 4. Transformada inversa

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^2+5}\right\}$

Solución

Se debe separar en dos transformadas y sacar la constante

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\} + 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+5}\right\}$$

Corresponde a las propiedades 6 y 5 respectivamente pero se debe ajustar el segundo término´para que coincida con la propiedad 5. Se puede apreciar que $k^2 = 5$, por tanto, $k = \sqrt{5}$. Se debe ajustar multiplicando y dividiendo por $\sqrt{5}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\}+\frac{4}{\sqrt{5}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{5}}{s^2+5}\right\}$$

$$cos\sqrt{5}t+\frac{4\sqrt{5}}{5}sen\sqrt{5}t$$

Ejemplo 4. Transformada inversa

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+2s-1}{2s^3+3s^2-2s}\right\}$

Solución

La función no corresponde a ninguna de las propiedades de la tabla 8, se debe separar el denominador

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s-1}{s(2s-1)(s+2)}\right\}$$

Se aplica fracciones parciales. Se factoriza el denominador.

$$\frac{s^2+2s-1}{s(2s-1)(s+2)}$$

El denominador tiene tres factores lineales distintos, por lo cual corresponde al caso 1 de fracciones parciales y se organiza de la siguiente manera:

El denominador tiene tres factores lineales distintos, por lo cual corresponde al caso 1 de fracciones parciales.

$$\frac{s^2+2s-1}{s(2s-1)(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{2s-1}+\frac{C}{s+2}$$

Esta identidad es válida para todos los valores de s excepto $s=0, s=1/2 \wedge s=-2$. Para hallar los valores de A, $B \ \wedge \ C$, multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $s(2s-1)(s+2)$

$$s^2+2s-1=A(2s-1)(s+2)+Bs(s+2)+Cs(2s-1)$$

Ahora reemplazamos esos valores en la ecuación para hallar A, $B \ \wedge \ C$

Cuando $s=0$

$$-1=A(-1)(2)$$

$$A=\frac{1}{2}$$

Cuando $s=1/2$

$$\frac{1}{4}=B\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$B=\frac{1}{5}$$

Cuando $s=-2$

$$-1=C(-2)(-5) \qquad C=-\frac{1}{10}$$

Con los valores de la constante procedemos a evaluar la transformada inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s-1}{s(2s-1)(s+2)}\right\}=$$

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(2s-1)}\right\}-\frac{1}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}$$

Las transformadas corresponden a la propiedad 1 y 4 de la tabla 8, pero el segundo término hay que ajustarlo antes de aplicar las propiedades

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{2s}{2}-\frac{1}{2})}\right\}-\frac{1}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}$$

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-\frac{1}{2})}\right\}-\frac{1}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}e^{\frac{1}{2}t}-\frac{1}{10}e^{-2t}$$

Ejemplo 5. Transformada inversa

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+5s}\right\}$

Solución

La función no corresponde a ninguna de las propiedades de la tabla 8, se debe hacer fracciones parciales para separar el denominador.

$$\frac{1}{s(s^2+5)}$$

El denominador tiene dos factores, uno lineal y uno cuadrático distintos, por lo cual corresponde al caso 3 de fracciones parciales y se organiza de la siguiente manera:

$$\frac{1}{s(s^2+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+5}$$

Esta identidad es válida para todos los valores de s excepto $s=0$. Para hallar los valores de A, $B \quad \wedge \quad C$, multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $s(s^2+5)$ y obtenemos

$$1 = A(s^2+5) + (Bs+C)(s)$$

Para hallar los valores de las constantes debemos hacer distributiva y armar un sistema de ecuaciones

$$1 = As^2 + 5A + Bs^2 + Cs$$

Con esta información vamos a construir un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 0 = C \\ 1 = 5A \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos los siguientes valores

$$A = \frac{1}{5} \qquad B = -\tfrac{1}{5} \qquad c = 0$$

Con los valores de la constante procedemos a evaluar la transformada inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+5s}\right\} = \frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\}$$

Las transformadas corresponden a la propiedad 1 y 6 de la tabla 8

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{5}cos\sqrt{5}t$$

En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de Transformada de Laplace inversa.

4.2.1 Repasando fracciones parciales

En la escena interactiva que aparece a continuación se explica, el caso 1 de fracciones parcielas. Es importante que repase el concepto antes de resolver ejercicios.

Caso 1. Fracción propia con factores lineales

Este caso es aquel donde tienes en el denominador factores de la forma (x - r).

Por ejemplo, la fracción $\frac{7x-1}{x^2-x-6}$, ¿qué tipo de denominador tiene?

—Cuadrático profe

Es cierto, pero si lo factorizas te quedaría así $\frac{7x-1}{(x-3)(x+2)}$ ¡Factores lineales!

El método de descomposición parte del supuesto de que la expresión tuvo su origen en la suma de fracciones simples o parciales cuyos denominadores son (x – 3) y (x + 2). Es decir:

$$\frac{7x-1}{x^2-x-6}=\frac{7x-1}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$$

Donde A y B son dos números reales. Si logramos encontrar esos numeradores, resolvemos el problema. Si sumamos las dos fracciones de la derecha, obtendríamos:

$$\frac{7x-1}{(x-3)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

Sabemos que en ambos miembros de esta ecuación los denominadores son iguales, por lo que los numeradores ha de serlo: $7x - 1 = A(x + 2) + B(x – 3)$
Hay dos métodos de encontrar estos dos números:

Método 1 Método 2 Siguiente caso

4.2.2 Ejercicios y respuestas de la sección 4.2

Ejercicios de repaso sección 4.2

Evaluar las transformadas inversas.

1. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{48}{s^5}\right\}$

2. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)^2}{s^3}\right\}$

3. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s}+\frac{6}{s^5}-\frac{1}{s+8}\right\}$

4. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s+1}\right\}$

5. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$

6. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2}\right\}$

7. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2+9}\right\}$

8. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{s}-\frac{1}{s^3}\right)^2\right\}$

Respuestas

4.3 Transformada de derivadas

TEOREMA 3. Transformada de una derivada: Si $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0, \infty)$ y son de orden exponencial y si $f^{(n)}(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, entonces

$$\mathscr{L} f^{n}(t) = s^{n} F(s) - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Donde $F(s) = \mathscr{L} f(t)$

Solución de problemas con valores iniciales

Para resolver una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes sujeta a condiciones iniciales se utiliza:

$$\mathscr{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathscr{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathscr{L}\{y'''\} = s^3 Y(s) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)$$

la transformada de Laplace de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes se convierte en una ecuación algebraica en Y(s).

En el ejemplo siguiente se ilustra el método para resolver una ED, así como la descomposición en fracciones parciales.

Ejemplo 1. Resolver el PVI

Resolver la Ed $y' + 2y = t$ sujeta a la condición inicial $y(0) = -1$

Solución

Para resolver la ED se reemplaza el teorema tres al lado izquierdo y el teorema uno al lado derecho

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

Se reemplazan las condiciones iniciales

$$sY(s) - (-1) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

Se saca factor común $Y(s)$

$$Y(s)(s+2) + 1 = \frac{1}{s^2}$$

Se despeja el factor común

$$Y(s)(s+2) = \frac{1}{s^2} - 1$$

Se opera el lado derecho

$$Y(s)(s+2) = \frac{1 - s^2}{s^2}$$

Se despeja $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{1 - s^2}{s^2(s+2)}$$

La solución $y(t)$ del PVI original es $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$, donde la transformada inversa se hace término a término, por tanto, es necesario descomponer la expresión del lado derecho en fracciones parciales para poder aplicar el teorema dos.

$$\frac{1 - s^2}{s^2(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2}$$

Esta identidad es válida para todos los valores de s excepto $s = 0 \wedge s = -2$. Para hallar los valores de $A, B \quad \wedge \quad C$, multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $s^2(s+2)$ y obtenemos

$$1 - s^2 = As(s+2) + B(s+2) + C(s^2)$$

Para hallar los valores de las constantes debemos hacer distributiva y armar un sistema de ecuaciones

$$1 - s^2 = As^2 + 2As + Bs + 2B + Cs^2$$

Con esta información vamos a construir un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} -1 = A + C \\ 2A + B = 0 \\ 1 = 2B \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos los siguientes valores

$$A = -\frac{1}{4} \qquad B = \frac{1}{2} \qquad c = -\frac{3}{4}$$

Con los valores de la constante procedemos a evaluar la transformada inversa

$$Y(s) = -\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

Aplicando la transformada inversa obtenemos la solución de la ED

$$y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}e^{-2t}$$

Ejemplo 2. Resolver el PVI

Resolver la ED $y'' + 3y' = 0$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 1 \quad \wedge$ $y'(0) = -1$

Solución

Para resolver la ED se reemplaza el teorema tres al lado izquierdo

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) = 0$$

Se reemplazan las condiciones iniciales

$s^2Y(s) - s + 1 + 3sY(s) - 3 = 0$

Se saca factor común $Y(s)$

$Y(s)(s^2 + 3s) - s - 2 = 0$

Se despeja el factor común

$Y(s)(s^2 + 3s) = s + 2$

Se despeja $Y(s)$ y se saca factor común

$$Y(s) = \frac{s+2}{s(s+3)}$$

La solución $y(t)$ del PVI original es $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$, donde la transformada inversa se hace término a término, por tanto, es necesario descomponer la expresión del lado derecho en fracciones parciales para poder aplicar el teorema dos.

$$\frac{s+2}{s(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3}$$

Esta identidad es válida para todos los valores de s excepto $s = 0 \wedge s = -3$. Para hallar los valores de $A \wedge B$, multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $s(s+3)$ y obtenemos

$s + 2 = A(s+3) + Bs$

Ahora reemplazamos esos valores en la ecuación para hallar $A \wedge B$

Cuando $s = 0$

$2 = A(3)$

$A = \frac{2}{3}$

Cuando $s = -3$

$-1 = B(-3)$

$B = \frac{1}{3}$

Con los valores de la constante procedemos a evaluar la transformada inversa

$$Y(s) = \frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

Aplicando la transformada inversa obtenemos la solución de la ED

$$y(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t}$$

Ejemplo 3. Resolver el PVI

Resolver la ED $y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 1 \quad \wedge \quad y'(0) = 5$

Solución

Para resolver la ED se reemplaza el teorema tres al lado izquierdo y el teorema uno al lado derecho

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3sY(s) + 3y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s+4}$$

Se reemplazan las condiciones iniciales

$$s^2Y(s) - s - 5 - 3sY(s) + 3 + 2Y(s) = \frac{1}{s+4}$$

Se saca factor común $Y(s)$

$$Y(s)(s^2 - 3s + 2) - s - 2 = \frac{1}{s+4}$$

Se despeja el factor común

$$Y(s)(s^2 - 3s + 2) = \frac{1}{s+4} + s + 2$$

Se opera el lado derecho

$$Y(s)(s^2 - 3s + 2) = \frac{s^2 + 6s + 9}{s+4}$$

Se despeja $Y(s)$ y se factoriza el trinomio

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s+4)(s-2)(s-1)}$$

Se descompone el lado derecho en fracciones parciales para poder aplicar el teorema dos.

$$\frac{s^2+6s+9}{(s+4)(s-2)(s-1)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1}$$

Esta identidad es válida para todos los valores de s excepto $s = -4, s = 2 \wedge s = 1$. Para hallar los valores de A, $B \wedge C$, multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $(s+4)(s-2)(s-1)$ y obtenemos

$s^2 + 6s + 9 = A(s-2)(s-1) + B(s+4)(s-1) + C(s+4)(s-2)$

Cuando $s = -4$

$1 = A(-6)(-5)$

$A = \frac{1}{30}$

Cuando $s = 2$

$25 = B(6)(1)$

$B = \frac{25}{6}$

Cuando $s = 1$

$16 = C(5)(-1)$

$C = -\frac{16}{5}$

Con los valores de la constante procedemos a evaluar la transformada inversa

$$Y(s) = \frac{1}{30}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} + \frac{25}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$-\frac{16}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

Aplicando la transformada inversa obtenemos la solución de la ED

$$y(t) = \frac{1}{30}e^{-4t} + \frac{25}{6}e^{2t} - \frac{16}{5}e^{t}$$

Ejemplo 4. Resolver el PVI

Resolver la Ed $2y'' + y' - y = t + 1$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 1 \quad \wedge \quad y'(0) = 0$

Solución

Para resolver la ED se reemplaza el teorema tres al lado izquierdo y el teorema uno al lado derecho

$$2s^2Y(s) - 2sy(0) - 2y'(0) + sY(s) - y(0) - Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

Se reemplazan las condiciones iniciales

$$2s^2Y(s) - 2s(1) - 2(0) + sY(s) - (1) - Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

$$2s^2Y(s)-2s+sY(s)-1-Y(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}$$

Se saca factor común $Y(s)$

$$Y(s)\left(2s^2+s-1\right)-2s-1=\frac{1+s}{s^2}$$

Se pasan al lado derecho el término que no dependen de $Y(s)$

$$Y(s)\left(2s^2+s-1\right)=\frac{1+s}{s^2}+2s+1$$

Se opera el lado derecho

$$Y(s)\left(2s^2+s-1\right)=\frac{2s^3+s^2+s+1}{s^2}$$

Se despeja $Y(s)$ y se factoriza el trinomio

$$Y(s)=\frac{2s^3+s^2+s+1}{s^2(2s-1)(s+1)}$$

Se descompone el lado derecho en fracciones parciales

$$\frac{2s^3+s^2+s+1}{s^2(2s-1)(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{2s-1}+\frac{D}{s+1}$$

Esta identidad es válida para todos los valores de s excepto $s=-\frac{1}{2},0,1$. Para hallar los valores de $A,B,\ C\ \wedge\ D$, multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $s^2(2s-1)(s+1)$ y obtenemos

$$2s^3+s^2+s+1=As(2s-1)(s+1)+B(2s-1)(s+1)+Cs^2(s+1)+Ds^2(2s-1)$$

Hacemos distributiva y armamos un sistema de ecuaciones

$$2s^3 + s^2 + s + 1 = 2As^3 + As^2 - As + 2Bs^2 + Bs - B + Cs^3 + Cs^2 + 2Ds^3 - Ds^2$$

$$\begin{array}{rcl} 2A + C + 2D & = & 2 \\ A + 2B + C - D & = & 1 \\ -A + B & = & 1 \\ -B & = & 1 \end{array}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos los siguientes valores

$$A = -2 \qquad B = -1 \qquad C = \frac{16}{3} \qquad D = \frac{1}{3}$$

Con los valores de la constante procedemos a evaluar la transformada inversa

$$Y(s) = -2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{16}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s-1}\right\} + \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

El tercer término es necesario ajustarlo antes de aplicar el teorema inverso, por tanto, dividimos todos por 2

$$Y(s) = -2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{16}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s-\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

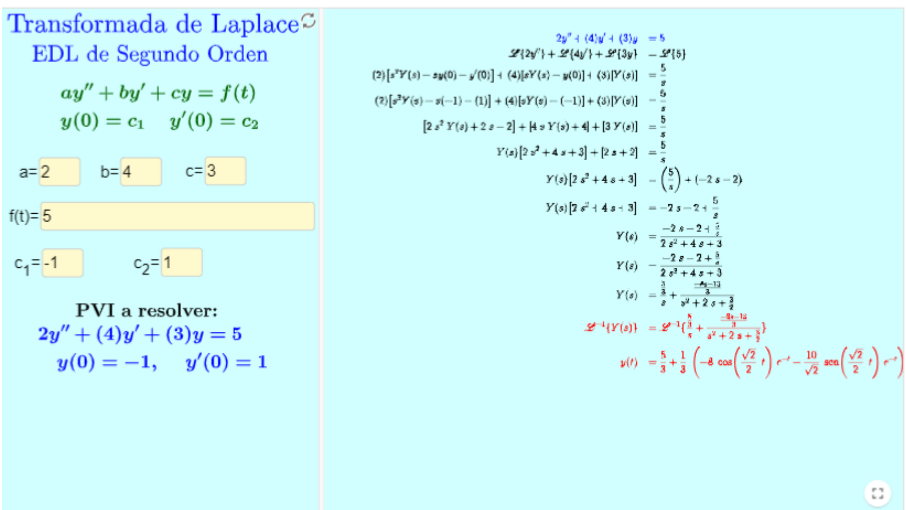
Ahora sacamos la constante

$$Y(s) = -2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{8}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

Aplicando la transformada inversa obtenemos la solución de la ED

$$y(t) = -2 - t + \frac{8}{3}e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{3}e^{-t}$$

En la siguiente escena interactiva, diseñada por [Carlos Olvera](), podrás resolver ED usando la Transofrmada de Laplace.



En el siguiente video, realizado por [Jaime H. Ramírez Rios](), podrás observar un ejemplo de Transformada de derivada.

4.3.1 Ejercicios y respuestas de la sección 4.3

Ejercicios de repaso sección 4.3

Resolver los PVI.

1. $y' - y = 1$ sujeta a la condición $y(0) = 0$

2. $2y' + y = 0$ sujeta a la condición $y(0) = -3$

3. $y' - y = 2cos5t$ sujeta a la condición $y(0) = 0$

4. $y' + 6y = e^{4t}$ sujeta a la condición $y(0) = 2$

5. $y'' + 2y' - 8y = 2e - 2t - e - t$ sujeta a la condición $y(0) = 1 \ \wedge \ y'(0) = 0$

6. $y'' + 16y = 4$ sujeta a la condición $y(0) = 1 \ \wedge \ y'(0) = 0$

7. $y'' + 25y = 3$ sujeta a la condición $y(0) = 1 \ \wedge \ y'(0) = 5$

8. $y'' + 5y' + 4y = 0$ sujeta a la condición $y(0) = 1 \ \wedge \ y'(0) = 0$

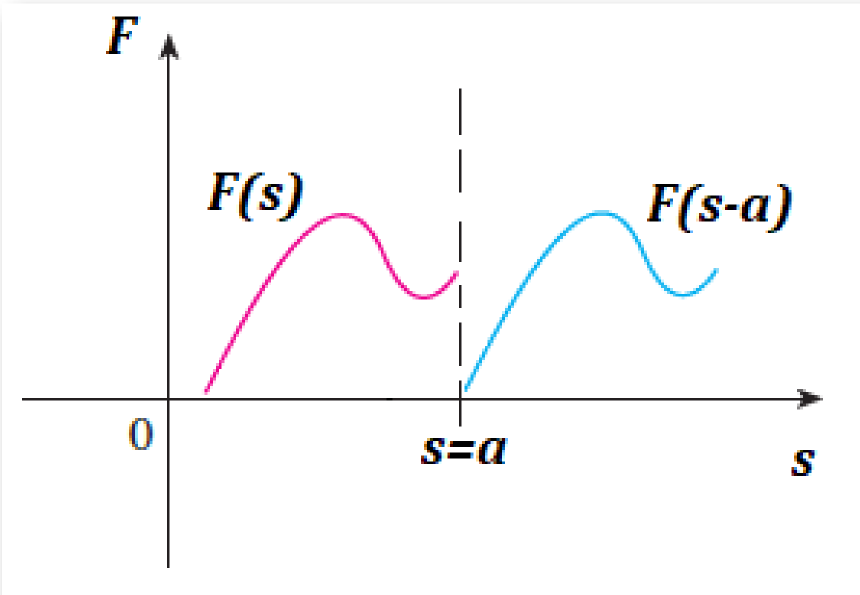
9. $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e - t$ sujeta a la condición $y(0) = 0 \ y'(0) = 0 \ \wedge$ $y'(0) = 1$

10. $y''' + 2y'' - y' - 2y = sen3t$ sujeta a la condición $y(0) = 0 \ y'(0) = 0 \ \wedge$ $y'(0) = 1$

Respuestas

4.4 Traslación en el eje "s"

Este teorema facilita encontrar transformadas sin resolver la integral, basta con recorrer la función. Gráficamente se vería así:



Si se considera s una variable real, entonces la gráfica de $F(s-a)$ es la gráfica de $F(s)$ desplazada en el eje s por la cantidad $|a|$. Si $a>0$, la gráfica de $F(s)$ se desplaza a unidades a la derecha, mientras que si $a<0$, la gráfica se desplaza a unidades a la izquierda.

Evaluar transformadas tales como $\left\{e^{-2t}t^4\right\}$ o $\left\{e^{3t}\cosh 5\mathrm{t}\right\}$ se puede hacer de forma directa siempre que se conozca $\left\{t^4\right\}$ o $\{\cosh 5\mathrm{t}\}$. si se conoce la Transformada de Laplace de una función $f(t)$, es posible calcular la Transformada de Laplace de un múltiplo exponencial de f, es decir, $\{e^{-at}f(t)\}$, sólo con trasladar o desplazar, $F(s)$ a $F(s-a)$. El resultado se conoce como primer teorema de traslación.

Primer teorema de traslación: Si $\mathscr{L} f(t) = F(s)$ y a es cualquier número real, entonces

$$\mathscr{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a)$$

Ejemplo 1. Uso del primer teorema de traslación

Evalúe $\mathscr{L}\left\{e^{-2t} t^4\right\}$

Solución

Se utiliza la transformada básica (teorema 1)

El denominador de la transformada de Euler se coloca a la derecha

$\mathscr{L}\left\{e^{-2t} t^4\right\} = \mathscr{L}\left\{t^4|_{s \to s+2}\right\}$

Luego se aplica el teorema 1 a la función y donde va la s se coloca la traslación

$$\frac{4!}{(s+2)^5}$$

Ejemplo 2. Uso del primer teorema de traslación

Evalúe $\mathscr{L}\left\{e^{3t}cosh5t\right\}$

Solución

Se utiliza la transformada básica (teorema 1)

El denominador de la transformada de Euler se coloca a la derecha

$$\mathscr{L}\left\{e^{3t}cosh5t\right\}=\mathscr{L}\left\{cosh5t|_{s\to s-3}\right\}$$

Luego se aplica el teorema 1 a la función, $cosh5t$

$$\mathscr{L}\left\{e^{3t}cosh5t\right\}=\mathscr{L}\left\{\frac{s}{s^2-25}|_{s\to s-3}\right\}$$

Para terminar se debe colocar la traslación que está al lado derecho, en la función, donde esté la s, tanto en el numerador como en el denominador

$$\frac{s-3}{(\mathrm{s}-3)^2-25}$$

Ejemplo 3. Uso del primer teorema de traslación

Evalúe $\mathscr{L}\left\{e^{-4t} sen3t\right\}$

Solución

Se utiliza la transformada básica (teorema 1)

El denominador de la transformada de Euler se coloca a la derecha

$$\mathscr{L}\left\{e^{-4t} sen3t\right\} = \mathscr{L}\left\{sen3t|_{s \to s+4}\right\}$$

Luego se aplica el teorema 1 a la función $sen3t$

$$\mathscr{L}\left\{e^{-4t} sen3t\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{3}{s^2+9}|_{s \to s+4}\right\}$$

Donde está la s se coloca la traslación

$$\frac{3}{(\mathrm{s}+4)^2+9}$$

Forma inversa del teorema:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s-a)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)|_{s \to s-a}\right\}$$

Ejemplo 1. Forma inversa del teorema

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s-3)^2}\right\}$

Solución

Se utiliza la transformada inversa (teorema 2)

Se saca la constante de la transformada y la traslación se coloca a un lado

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s-3)^2}\right\}=5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}|s\rightarrow s-3\right\}$$

Se aplica el teorema 2 a la función y a la traslación

$$5e^{3t}t$$

Ejemplo 2. Forma inversa del teorema

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2+16}\right\}$

Solución

Antes de aplicar el teorema dos se debe ajustar el numerador, se busca que la traslación del denominador también esté en el numerador, por ese motivo se suma y se resta 6

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-6+6+5}{(s-3)^2+16}\right\}$$

Luego se saca factor común y se suma el 6 y el 5

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2(s-3)+11}{(s-3)^2+16}\right\}$$

Se separan las dos traslaciones y se sacan las constantes

$$2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s-3)}{(s-3)^2+16}\right\}+11\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2+16}\right\}$$

La traslación se coloca a un lado

$$2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}|s\to s-3\right\}+11\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+16}|s\to s-3\right\}$$

Antes de aplicar el teorema 2 se debe ajustar el segundo termino.

$$2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}|s\to s-3\right\}+\frac{11}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}|s\to s-3\right\}$$

Se aplica el teorema 2 a la función y a la traslación

$$2e^{3t}cos4t+\frac{11}{4}e^{3t}sen4t$$

Ejemplo 3. Resolver el PVI

Resolver la Ed $y'' - y' = e^{-2t}cos2t$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 0 \quad \wedge \quad y'(0) = 1$

Solución

Se utiliza la transformada de la primera derivada (teorema 3) para el lado izquierdo y la transformada básica (teorema 1) para el lado derecho como sigue

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - sY(s) + y(0) = \frac{s+2}{(s+2)^2+4}$$

Se reemplazan las condiciones iníciales

$$s^2Y(s) - s - sY(s) + 1 = \frac{s+2}{(s+2)^2+4}$$

factor común $Y(s)$ y se opera el denominador del lado derecho

$$Y(s)\left(s^2 - s\right) - s + 1 = \frac{s+2}{s^2+4s+8}$$

Se pasan los terminos que no están en el factor comun al lado derecho

$$Y(s)\left(s^2 - s\right) = \frac{s+2}{s^2+4s+8} + s - 1$$

Se operan los fraccionarios del lado derecho

$$Y\left(s\right)\left(s^2-s\right)=\frac{s^3+3s^2+5s-6}{s^2+4s+8}$$

Se despeja $Y\left(s\right)$

$$Y\left(s\right)=\frac{s^3+3s^2+5s-6}{s(s-1)(s^2+4s+8)}$$

Se descompone el lado derecho en fracciones parciales

$$\frac{s^3+3s^2+5s-6}{s(s-1)(s^2+4s+8)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{Cs+D}{s^2+4s+8}$$

Esta identidad es válida para todos los valores de s excepto $s=0,1$. Para hallar los valores de $A, B,\ C\ \wedge\ D$, multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $s(s-1)(s^2+4s+8)$ y obtenemos

$$s^3+3s^2+5s-6=A(s-1)(s^2+4s+8)+Bs(s^2+4s+$$

$$8)+\left(Cs+D\right)s(s-1)$$

Propiedad distributiva y se construye un sistema de ecuaciones

$$s^3+3s^2+5s-6=As^3+3As^2+4As-8A+Bs^3+4Bs^2+$$

$$8Bs+Cs^3-Cs^2+Ds^2-Ds$$

$$\begin{array}{ccc} A+B+C & = & 1 \\ 3A+4B-C+D & = & 3 \\ 4A+8B-D & = & 5 \\ -8A & = & -6 \end{array}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$A = \frac{3}{4} \qquad B = \frac{3}{13} \qquad C = \frac{1}{52} \qquad D = \frac{2}{13}$$

Con los valores de la constante procedemos a evaluar la transformada inversa

$$Y(s) = \frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{13}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} +$$

$$\frac{1}{52}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+8}{s^2+4s+8}\right\}$$

El tercer término es necesario factorizar el denominador, se ajusta el trinomio cuadrado perfecto y luego se factoriza

$$Y(s) = \frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{13}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} +$$

$$\frac{1}{52}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+8}{(s+2)^2+4}\right\}$$

Ahora se ajusta el numerador

$$Y(s) = \frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{13}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} +$$

$$\frac{1}{52}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2+6}{(s+2)^2+4}\right\}$$

Se divide el tercer término en dos y se sacan las constantes

$$Y(s)=\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{3}{13}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+$$

$$\frac{1}{52}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+4}\right\}+\frac{6}{52}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+4}\right\}$$

Se coloca la traslación a un lado

$$Y(s)=\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{3}{13}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+$$

$$\frac{1}{52}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}|s\rightarrow s+2\right\}+\frac{3}{26}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}|s\rightarrow s+2\right\}$$

Antes de aplicar el teorema 2 se debe ajustar el último término.

$$Y(s)=\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{3}{13}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+$$

$$\frac{1}{52}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}|s\rightarrow s+2\right\}+\frac{3}{(26)2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}|s\rightarrow s+2\right\}$$

Se aplica el teorema 2 a la función y a la traslación

$$y(t)=\frac{3}{4}+\frac{3}{13}e^{t}+\frac{1}{52}e^{-2t}cos2t+\frac{3}{52}e^{-2t}sen2t$$

En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de Traslación en el eje s.

En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de Traslación en el eje s.

4.4.1 Ejercicios y respuestas de la sección 4.4

Ejercicios de repaso sección 4.4

Evaluar las transformadas

1. $\mathscr{L}\left\{te^{10t}\right\}$

2. $\mathscr{L}\left\{\mathrm{te}^{-6\mathrm{t}}\right\}$

3. $\mathscr{L}\left\{t^3e^{-2\mathrm{t}}\right\}$

4. $\mathscr{L}\left\{t^{10}e^{-7\mathrm{t}}\right\}$

5. $\mathscr{L}\left\{t\left(e^t+e^{2\mathrm{t}}\right)^2\right\}$

En los ejercicios 6 a 10, evalúe la transformada inversa

6. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)^3}\right\}$

7. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)^4}\right\}$

8. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-6s+10}\right\}$

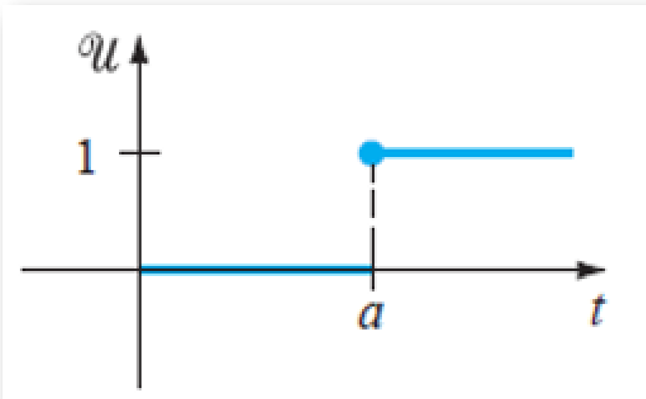
Respuestas

4.5 Traslación en el eje "t"

Definición: Función escalón unitario La función escalón unitario $\mu\left(t-a\right)$ se define como:

$$\mu\left(t-a\right)=\begin{cases}0, & 0\leq t<a\\ 1, & t\geq a\end{cases}$$

La función escalón unitario es útil para representar funciones definidas a trozos. Gráficamente se vería así:



Ejemplo 1. Función escalón

suponer $f(t)=\begin{cases}g(t), & 0\leq t<a\\ h(t), & t\geq a\end{cases}$ escribir como escalones unitarios

Solución

La función escalón está dada por:

$$f(t) = g\left(t\right) + \left[h\left(t\right) - g\left(t\right)\right] \mu\left(t - a\right)$$

Aplicando propiedad distributiva queda de la forma:

$$f(t) = g\left(t\right) + h\left(t\right) \mu\left(t - a\right) - g\left(t\right) \mu\left(t - a\right)$$

Ejemplo 2. Función escalón

suponer $f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & a \leq t < b \\ 0, & t \geq b \end{cases}$ escribir como escalones unitarios

Solución

La función escalón está dada por:

$$f\left(t\right) = g\left(t\right) + \left[h\left(t\right) - g\left(t\right)\right] \mu\left(t - a\right) + \left[0 - h\left(t\right)\right] \mu\left(t - b\right)$$

Aplicando propiedad distributiva queda de la forma:

$$f(t) = g\left(t\right) + h\left(t\right) \mu\left(t - a\right) - g\left(t\right) \mu\left(t - a\right) - h\left(t\right) \mu\left(t - b\right)$$

Ejemplo 3. Función escalón

Exprese $f\left(t\right)=\begin{pmatrix} 20t & Si & 0\leq t<5 \\ 0 & Si & t\geq 5 \end{pmatrix}$ en términos de la función escalón unitario

Solución

La función escalón está dada por:

$$f\left(t\right)=20t+\left[0-20t\right]\mu\left(t-5\right)$$

Aplicando propiedad distributiva queda de la forma:

$$f(t)=20t-20t\,\mu\left(t-5\right)$$

Teorema: Segundo teorema de traslación. Si $F(s)=\mathscr{L}f(t)$ y $a>0$ entonces

$$\mathscr{L}\left\{f\left(\mathrm{t-a}\right)\mu\left(t-a\right)\right.=e^{-as}F(s)$$

Ahora vamos a evaluar la transformada de Laplace con traslación en el eje t. es importante recordar que se utilizan los tres teoremas vistos desde el comienzo de la unidad

Ejemplo 4

evaluar $\mathscr{L}\left\{(t-1)\,\mu\,(t-1)\right\}$

Solución

La función cumple con el segundo teorema, entonces se aplica la transformada de Laplace básica

$$\frac{1}{s^2}e^{-s}$$

Ejemplo 5

evaluar $\mathscr{L}\left\{(3t+1)\,\mu\,(t-2)\right\}$

Solución

se debe ajustar la función para que cumpla el segundo teorema de traslación

$$\mathscr{L}\left\{(3t-6+6+1)\,\mu\,(t-2)\right\}$$

$$\mathscr{L}\left\{(3t-6+7)\,\mu\,(t-2)\right\}$$

Factor común y propiedad distributiva

$\mathscr{L}\left\{3\left(t-2\right)\mu\left(t-2\right)+7\mu\left(t-2\right)\right\}$

Ahora se aplica la transformada de Laplace básica

$$\frac{3}{s^2}e^{-2s}+\frac{7}{s}e^{-2s}$$

Ejemplo 6

evaluar $\mathscr{L}\left\{cost\ \ \mu\left(t-\pi\right)\right\}$

Solución

se debe ajustar la función para que cumpla el segundo teorema de traslación

$\mathscr{L}\left\{cos(t-\pi)\mu\left(t-\pi\right)\right\}$

Como no se puede restar y sumar dentro del ángulo porque vuelve a dar lo mismo, se aplica la identidad de suma y resta de ángulos del coseno

$\mathscr{L}\left\{\left(costcos\pi+sentsen\pi\right)\mu\left(t-\pi\right)\right\}$

Evaluando obtenemos

$\mathscr{L}\left\{-cost\ \mu\left(t-\pi\right)\right\}$

Ahora se aplica la transformada de Laplace básica

$$-\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}$$

Forma inversa del teorema: Si $f(t) = \mathscr{L}^{-1}F(s)$ la forma inversa del teorema anterior con $a > 0$, es

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = f\left(\mathrm{t}-\mathrm{a}\right)\mu\left(t-a\right)$$

Ejemplo 7

evaluar $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\}$

Solución

Se resuelve con la tranformada de laplace inversa para

$$\left\{\frac{1}{s-4}\right\} = e^{4t}$$

Ahora donde está la t se debe colocar la traslación

$$e^{-4(t-2)}\mu\left(t-2\right)$$

Ejemplo 8

evaluar $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+9}e^{-\frac{\pi}{2}s}\right\}$

Solución

Tranformada de laplace inversa para $\left\{\dfrac{s}{s^2+9}\right\} = cos3t$

Ahora donde está la t se debe colocar la traslación

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\frac{\pi}{2}s}\right\} = cos3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mu\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

Aplicando la identidad para el coseno

$$cos3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mu\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = cos3tcos3\frac{\pi}{2} + sen3tsen3\frac{\pi}{2}$$

Evaluando obtenemos

$$cos3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mu\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = cos3t(0) + sen3t(-1)$$

La solución es:

$$-sen3t\mu\left(t-\tfrac{\pi}{2}\right)$$

Ejemplo 9

Evalúe la función $f(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t < 3 \\ -2 & t \geq 3 \end{cases}$

Solución

se escribe $f(t)$ como función escalón unitario

$$f(t) = 2 + [-2 - 2]\,\mu(t-3)$$

$$f(t) = 2 - 4\,\mu(t-3)$$

Se aplica la transformada de Laplace básica

$$\frac{2}{s} - \frac{4}{s}e^{-3s}$$

Ejemplo 10

Evalúe la función $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \dfrac{3\pi}{2} \\ sent, & t \geq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

Solución

Se escribe $f(t)$ como función escalón unitario

$$f\left(t\right)=0+\left[sent-0\right]\mu\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$$

Propiedad distributiva

$$f\left(t\right)=sen\,t\;\mu\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$$

Se ajusta el ángulo

$$f\left(t\right)=sen\;\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)\;\;\mu\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$$

Aplicando la identidad para el seno

$$sen\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)\mu\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)=sen\;tcos\frac{3\pi}{2}-sen\frac{3\pi}{2}cost$$

Evaluando

$$sen\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)\mu\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)=cos\;t\mu\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$$

Se aplica la transformada de Laplace básica

$$\frac{s}{s^2+1}e^{-\frac{3\pi s}{2}}$$

Ejemplo 11

Resolver el PVI $y'' - 5y' + 6y = f(t)$ sujeta a la condición inicial

$y(0) = 0 \quad \wedge \quad y'(0) = 1$ donde $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$

Solución

se escribe $f(t)$ como función escalón unitario

$$f(t) = 1 - \mu(t-1)$$

Vamos a resolver el PVI

$$y'' - 5y' + 6y = 1 - \mu(t-1)$$

Se utiliza la transformada de la primera derivada (teorema 3) para el lado izquierdo y la transformada básica (teorema 1) para el lado derecho como sigue

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5sY(s) + 5y(0) + 6Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}$$

Se reemplazan las condiciones iníciales

$$s^2Y(s) - s - 1 - 5sY(s) + 5 + 6Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}$$

factor común $Y(s)$ y se despeja

$$Y(s)\left(s^2-5s+6\right)=\frac{1}{s}+s-4-\frac{1}{s}e^{-s}$$

Se operan los términos semejantes al lado derecho

$$Y(s)\left(s^2-5s+6\right)=\frac{s^2-4s+1}{s}-\frac{1}{s}e^{-s}$$

Se despeja $Y(s)$ y se factoriza el termino del lado izquierdo

$$Y(s)=\frac{s^2-4s+1}{s(s-2)(s-3)}-\frac{1}{s(s-2)(s-3)}e^{-s}$$

Para aplicar la transformada inversa se debe hacer fracciones parciales a los dos terminos por separado.

Se descompone el primer término en fracciones parciales

$$\frac{s^2-4s+1}{s(s-2)(s-3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s-2)}+\frac{C}{(s-3)}$$

Esta identidad es válida para todos los valores de s excepto $s=0,2\wedge 3$

Para hallar los valores de $A,B\wedge C$, multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $s(s-2)(s-3)$ y obtenemos

$$s^2-4s+1=A(s-2)(s-3)+Bs(s-3)+Cs(s-2)$$

Reemplazando las restricciones del dominio en la ecuación y obtenemos los valores de las constantes

$$A=\frac{1}{6}\qquad B=\frac{3}{2}\qquad C=-\frac{2}{3}$$

Se descompone el segundo término en fracciones parciales, no vamos a tener en cuenta el signo menos y e^{-s} para hacer la fracción parcial, sólo se vuelven a utilizar en la respuesta

$$\frac{1}{s\left(s-2\right)\left(s-3\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{\left(s-2\right)}+\frac{C}{\left(s-3\right)}$$

Esta identidad es válida para todos los valores de s excepto $s=0,2\wedge 3$

Para hallar los valores de $A,B\wedge C$, multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $s\left(s-2\right)\left(s-3\right)$ y obtenemos

$$1=A\left(s-2\right)\left(s-3\right)+Bs\left(s-3\right)+Cs\left(s-2\right)$$

Reemplazando las restricciones en la ecuación obtenemos:

$$A=\frac{1}{6}\qquad B=-\frac{1}{2}\qquad C=\frac{1}{3}$$

$$Y\left(s\right)=\frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-\frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}-$$

$$\left(\frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}\right)e^{-s}$$

Aplicando la transformada inversa obtenemos:

$$y(t)=\frac{1}{6}+\frac{3}{2}e^{2t}-\frac{2}{3}e^{3t}-$$
$$\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{2(t-1)}+\frac{1}{3}e^{3(t-1)}\right)\mu\left(t-1\right)$$

Ejemplo 12

Resolver el PVI $y'' + 4y = sent\mu(t - 2\pi)$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 1 \quad \wedge \quad y'(0) = 0$

Solución

Antes de evaluar el escalón se debe ajustar el ángulo

$$\mathscr{L}\left\{sent\ \mu(t - 2\pi)\right\} = \mathscr{L}\left\{sen(t - 2\pi)\mu\left(t - 2\pi\right)\right\}$$

Se aplica la identidad de suma y resta de ángulos del seno

$$\mathscr{L}\left\{\left(sentcos2\pi - costsen\pi\right)\mu\left(t - \pi\right)\right\} = \mathscr{L}\left\{sent\ \mu(t - 2\pi)\right\}$$

$$\mathscr{L}\left\{sent\ \mu(t - 2\pi)\right\} = \frac{1}{s^2 + 1}e^{-2\pi s}$$

Se utiliza la transformada básica (teorema 1) para el lado derecho y se iguala al resultado que obtuvimos del escalón

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}e^{-2\pi s}$$

Se reemplazan las condiciones iníciales

$$s^2Y(s) - s + 4Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}e^{-2\pi s}$$

Se saca factor común $Y(s)$ y se despeja

$$Y(s)\left(s^2+4\right)=s+\frac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s}$$

Se despeja $Y(s)$

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}e^{-2\pi s}$$

Se descompone el último término en fracciones parciales

$$\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}=\frac{As+B}{s^2+4}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$

Para hallar los valores de $A, B \wedge C$, multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)$ y obtenemos

$$1=(As+B)\left(s^2+1\right)+(Cs+D)\left(s^2+4\right)$$

Aplicamos propiedad sitributiva

$$1=As^3+As+Bs^2+B+Cs^3+4Cs+Ds^2+4D$$

Construimos un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} A+C & = & 0 \\ B+D & = & 0 \\ A+4C & = & 0 \\ B+4D & = & 1 \end{array}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones se puede igualar la ecuación 1 con la 3 y la ecuación 2 con la 4 y hacerlo por el método de eliminación.

Se multiplica la ecuación 1 por (-1) y la sumamos a la ecuación 3

$$\cancel{-A} - \quad C = 0$$

$$\underline{\cancel{A} + 4C = 0}$$

$$3C = 0$$

Obtenemos el valor de la C $\qquad C = 0$

Reemplazando en la ecuación 4 obtenemos $\qquad A = 0$

Ahora se multiplica la ecuación 2 por (-1) y la sumamos a la ecuación 4

$$\cancel{-B} - \quad D = 0$$

$$\underline{\cancel{B} + 4D = 1}$$

$$3D = 1$$

Obtenemos el valor de la D $\qquad D = \dfrac{1}{3}$

Reemplazando en la ecuación 1 obtenemos $\qquad B = -\dfrac{1}{3}$

Con los valores de la constante procedemos a evaluar la transformada inversa

$$Y(s) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} +$$

$$\left(-\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} + \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\right)e^{-2\pi s}$$

Antes de aplicar el teorema 2$$ se debe ajustar el término de la mitad.

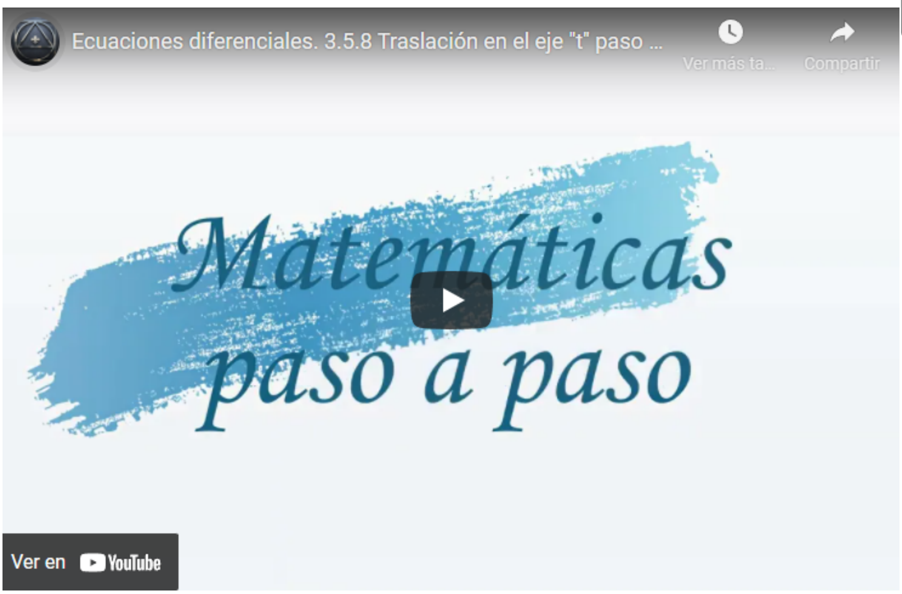
$$Y(s) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} +$$

$$\left(-\frac{1}{(3)2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} + \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\right)e^{-2\pi s}$$

Aplicando la transformada inversa obtenemos:

$$y(t) = cos2t + \left[-\tfrac{1}{6}sen2\left(t-2\pi\right) + \tfrac{1}{3}sen\left(t-2\pi\right)\right]\mu\left(t-2\pi\right)$$

En el siguiente video, realizado por Jaime H. Ramírez Rios, podrás observar un ejemplo de Traslación en el eje t.



4.5.1 Ejercicios y respuestas de la sección 4.5

Ejercicios de repaso sección 4.5

Encuentre $f(t) = \mathscr{L}^{-1}F(s)$ o $F(s) = \mathscr{L}f(t)$

1. $\mathscr{L}\{(t-4)\,\mu\,(t-4)$

2. $\mathscr{L}\{e^{2-t}\mu\,(t-2)$

3. $\mathscr{L}\{cos2t\mu\,(t-\pi)$

4. $\mathscr{L}\left\{sent\mu\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right.$

5. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^3}\right\}$

6. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$

7. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+4}\right\}$

8. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s\,(s+1)}\right\}$

9. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2\,(s-1)}\right\}$

Respuestas

4.6 Derivada de una transformada

Teorema: Derivadas de transformadas

Si $F(s) = \mathscr{L} f(t) \wedge n = 1, 2, 3, \ldots$ entonces

$$\mathscr{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Ejemplo 1

Evaluar $\mathscr{L}\left\{t\mathrm{cosh2t})\right\}$

Solución

Para aplicar derivada de una transformada debe estar la variable "t" multiplicando cualquier función. Se determina el valor de la n para saber cuántas veces se debe derivar. En este caso $n = 1$

$$\mathscr{L}\left\{\mathrm{tcosh2t})\right\} = (-1)\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2 - 4}$$

$$\mathscr{L}\left\{\mathrm{tcosh2t})\right\} = (-1) \cdot \frac{\left(s^2 - 4\right)(1) - (s)(2s)}{\left(s^2 - 4\right)^2}$$

Propiedad distributiva

$$\mathscr{L}\left\{\text{tcosh2t})\right\} = (-1)\cdot\frac{s^2-4-2s^2}{\left(s^2-4\right)^2}$$

Agrupando términos semejantes

$$\frac{s^2+4}{\left(s^2-4\right)^2}$$

Ejemplo 2

Evaluar $\mathscr{L}\left\{t^2 sen3t)\right\}$

Solución

$n=2$ se debe derivar dos veces

$$\mathscr{L}\left\{t^2 sen3t)\right\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\frac{3}{s^2+9}$$

Se realiza la primer derivada y se escribe de la siguiente forma

$$\mathscr{L}\left\{t^2 sen3t)\right\} = \frac{d}{ds}\frac{\left(s^2+9\right)(0)-(3)(2s)}{\left(s^2+9\right)^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{t^2 sen3t)\right\} = \frac{d}{ds}\frac{-6s}{\left(s^2+9\right)^2}$$

Se realiza la última derivada

$$\mathscr{L}\left\{t^2 sen3t)\right\} = \frac{\left(s^2+9\right)^2(-6)-(-6s)\left[2\left(s^2+9\right)(2s)\right]}{\left(s^2+9\right)^4}$$

Factor común

$$\mathscr{L}\left\{t^2 sen3t)\right\} = \frac{\left(s^2+9\right)\left[\left(s^2+9\right)(-6)-\left(-24s^2\right)\right]}{\left(s^2+9\right)^4}$$

$$\mathscr{L}\left\{t^2 sen3t)\right\} = \frac{-6s^2-54+24s^2}{\left(s^2+9\right)^3}$$

Agrupando términos semejantes

$$\frac{18s^2-54}{\left(s^2+9\right)^3}$$

Ejemplo 3

Evaluar $\mathscr{L}\left\{t^3 \mathrm{e}^{-5t}\right\}$

Solución

$n=3$ se debe derivar tres veces

$$\mathscr{L}\left\{t^3 e^{-5t}\right\} = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3}\,\frac{1}{s+5}$$

Primera derivada

$$\mathscr{L}\left\{t^3e^{-5t}\right\} = -\frac{d^2}{ds^2}\frac{-1}{(s+5)^2}$$

Ahora se realiza la segunda derivada

$$\mathscr{L}\left\{t^3e^{-5t}\right\} = -\frac{d}{ds}\frac{2(s+5)}{(s+5)^4}$$

Simplificando

$$\mathscr{L}\left\{t^3e^{-5t}\right\} = -\frac{d}{ds}\frac{2}{(s+5)^3}$$

Tercera derivada

$$\mathscr{L}\left\{t^3e^{-5t}\right\} = -\frac{-2\left[3(s+5)^2\right]}{(s+5)^6}$$

Simplificando obtenemos la solución

$$\frac{6}{(s+5)^4}$$

Como hay un producto y aparece Euler también lo podemos resolver como traslación en el eje s

$$\mathscr{L}\left\{e^{-5t}t^3\right\} = \mathscr{L}\left\{t^3|_{s\to s+5}\right\}$$

$$\mathscr{L}\left\{e^{-5t}t^3\right\} = \frac{6}{(s+5)^4}$$

Ejemplo 4

Evaluar $\mathscr{L}\left\{te^{2t}sen6t\right\}$

Solución

$n=1$ se debe derivar una vez y se hace traslación en el eje s

$$\mathscr{L}\left\{te^{2t}sen6t\right\}=(-1)\frac{d}{ds}\ \frac{6}{(s-2)^2+36}$$

$$\mathscr{L}\left\{te^{2t}sen6t\right\}=-\ \frac{-6\left[2\left(s-2\right)\right]}{\left[(s-2)^2+36\right]^2}$$

La solución es:

$$\frac{12\left(s-2\right)}{\left[(s-2)^2+36\right]^2}$$

Ejemplo 5

Evaluar $\mathscr{L}\left\{tsenkt\right\}$

Solución

$n = 1$ se debe derivar una vez y se hace traslación en el eje s

$$\mathscr{L}\left\{tsenkt\right\} = (-1)^1 \frac{d}{ds}\ \frac{k}{s^2 + k^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{tsenkt\right\} = -\frac{-k(2s)}{\left(s^2 + k^2\right)^2}$$

La solución es:

$$\frac{2ks}{\left(s^2 + k^2\right)^2}$$

Ejemplo 6

Resolver el PVI $y'' + 16y = cos4t$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 0 \quad \wedge \quad y'(0) = 1$

Solución

Se utiliza la transformada de la segunda derivada (teorema 3) al lado izquierdo y la transformada básica (teorema 1) al lado derecho

$$s^2Y(s) - sy(0) - y\prime(0) + 16Y(s) = \frac{s}{s^2 + 16}$$

Se reemplazan las condiciones iniciales

$$s^2Y(s) - 1 + 16Y(s) = \frac{s}{s^2+16}$$

Factor común $Y(s)$ y se despeja

$$Y(s)\left(s^2+16\right) = \frac{s}{s^2+16} + 1$$

Se opera el lado derecho

$$Y(s)\left(s^2+16\right) = \frac{s^2+s+16}{s^2+16}$$

Se despeja $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{s^2+s+16}{\left(s^2+16\right)^2}$$

Se descompone el lado derecho en fracciones parciales

$$\frac{s^2+s+16}{\left(s^2+16\right)^2} = \frac{As+B}{s^2+16} + \frac{Cs+D}{\left(s^2+16\right)^2}$$

Se multiplica ambos lados de la ecuación por $\left(s^2+16\right)^2$ para quitar denominadores

$$s^2+s+16 = \ (As+B)\left(s^2+16\right) + Cs + D$$

Propiedad distributiva

$$s^2+s+16 = As^3 + 16As + Bs^2 + 16B + Cs + D$$

Se arma un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas para hallar el valor de las constantes

$$\begin{aligned}
A &= 0\\
B &= 1\\
16A + C &= 1\\
16B + D &= 16
\end{aligned}$$

Los valores de las constantes son:

$$A = 0 \qquad B = 1 \qquad C = 1 \qquad D = 0$$

$$Y(s) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+16}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+16\right)^2}\right\}$$

Se debe ajustar el primer término y el segundo término antes de aplicar la transformada inversa, para eso se utiliza el resultado del ejemplo 5 para ajustar el segundo término

$$Y(s) = \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\} + \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{\left(s^2+16\right)^2}\right\}$$

Aplicando la transformada inversa obtenemos la solución

$$y(t) = \frac{1}{4}sen4t + \frac{1}{8}\,tsen4t$$

Ejemplo 7

Resolver el PVI $y' + y = tsent$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 0$

Solución

Al lado derecho hay una traslación en el eje s

$$tsent = (-1)^1 \frac{d}{ds}\ \frac{1}{s^2+1}$$

$$tsent = -\frac{-2s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

$$tsent = \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Se utiliza la transformada de la segunda derivada (teorema 3) al lado izquierdo y se iguala con el resultado de la traslación

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Se reemplazan las condiciones iniciales y se saca factor común

$$Y(s)\,(s+1) = \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Se despeja $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{2s}{(s+1)\left(s^2+1\right)^2}$$

Se descompone el lado derecho en fracciones parciales

$$\frac{2s}{(s+1)\left(s^2+1\right)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} + \frac{Ds+E}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Se multiplica ambos lados de la ecuación por $(s+1)\left(s^2+1\right)^2$ para quitar denominadores

$$2s = A\left(s^2+1\right)^2 + (Bs+C)(s+1)\left(s^2+1\right) + (Ds+E)(s+1)$$

Propiedad distributiva

$$2s = As^4 + 2As^2 + A + Bs^4 + Bs^2 + Bs^3 + Bs + Cs^3 + Cs + Cs^2 + C + Ds^2 + Ds + Es + E$$

Se arma un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas para hallar el valor de las constantes

$$\begin{array}{ccc} A+B & = & 0 \\ B+C & = & 0 \\ 2A+B+C+D & = & 0 \\ B+C+D+E & = & 2 \\ A+C+E & = & 0 \end{array}$$

Los valores de las constantes son:

$$A = -\frac{1}{2} \qquad B = \frac{1}{2} \qquad C = -\frac{1}{2} \qquad D = 1 \qquad E = 1$$

$$Y(s) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}$$

Para el último término no hay ninguna transformada en las tablas, entonces lo unimos con el tercer término

$$\frac{-\frac{1}{2}}{s^2+1}+\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}=\frac{-\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}+1}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Agrupando términos semejantes

$$\frac{-\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Factor común

$$\frac{-\frac{1}{2}\left(s^2-1\right)}{\left(s^2+1\right)^2}$$

$$Y(s)=-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}$$

Se ajusta el tercer término

$$Y(s)=-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+$$
$$\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}$$

Aplicando la transformada inversa obtenemos la solución

$$y(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}cost+\frac{1}{2}tsent-\frac{1}{2}tcost$$

4.6.1 Ejercicios y respuestas de la sección 4.6

Ejercicios de repaso sección 4.6

Evaluar las tranformadas

1. $\mathscr{L}\left\{tcos2t\right\}$

2. $\mathscr{L}\left\{\text{tsenh3t}\right\}$

3. $\mathscr{L}\left\{t^2\text{senht}\right\}$

4. $\mathscr{L}\left\{t^2\text{cost}\right\}$

5. $\mathscr{L}\left\{\text{te}^{2t}\text{sen6t}\right\}$

6. $\mathscr{L}\left\{\text{te}^{-3t}\text{cos3t}\right\}$

En los ejercicios 7 a 10 resolver el PVI

7. $y\prime + y = tsent$ sujeta a la condición $y(0) = 0$

8. $y\prime - y = te^t sent$ sujeta a la condición $y(0) = 0$

9. $y\prime\prime + 9y = cos3t$ sujeta a la condición $y(0) = 2 \quad \wedge \quad y\acute{}(0) = 5$

10. $y\prime\prime + y = sent$ sujeta a la condición $y(0) = 1 \quad \wedge \quad y\acute{}(0) = -1$


Respuestas

4.7 Transformada de integrales

La transformada de Laplace de una solución desconocida de una ED, puede reconocerse algunas veces como el producto de las transformadas de dos funciones conocidas.

Ejemplo 1

resolver el PVI $y\prime\prime + y = cost$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 0$ $\wedge \quad y'(0) = 0$

Solución

Reemplazando el teorema 1 y el teorema 2

$$s^2Y(s) - sy(0) - y\prime(0) + Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

Se reemplazan las condiciones iniciales

$$s^2Y(s) + Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

Factor común $Y(s)$

$$Y(s)\left(s^2+1\right) = \frac{s}{s^2+1}$$

Se despeja $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Se descompone el lado derecho en fracciones parciales

$$\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Se multiplica ambos lados de la ecuación por $\left(s^2+1\right)^2$ para quitar denominadores

$$s= \ (As+B)\left(s^2+1\right)+Cs+D$$

Propiedad distributiva

$$s=As^3+As+Bs^2+B+Cs+D$$

Se arma un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas para hallar el valor de las constantes

$$\begin{array}{ccc} A & = & 0 \\ B & = & 0 \\ A+C & = & 1 \\ B+D & = & 0 \end{array}$$

Los valores de las constantes son:

$$A=0 \qquad B=0 \qquad C=1 \qquad D=0 \qquad E=1$$

$$Y(s)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}$$

No hay una transformada que nos ayude a resolver el ejercicio. Debe haber una forma de combinar las 2 funciones $sent \ \wedge \ cos\, t$ para obtener $y(t)$ cuya transformada sea el producto de sus transformadas.

Pero $y(t)$ no es el producto de $cos\ t$ por $sent$ debido a que:

$$\mathscr{L}\left\{cos\ t\ sent\right\}\mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}\ sen2t\right\}$$

Evaluando la transformada

$$\frac{1}{s^2+4} \neq \frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Se puede concluir que:

$$\mathscr{L}\left\{cos\ t\ sent\right\} \neq \mathscr{L}\left\{\ cos\ t\right\}\mathscr{L}\left\{\ sent\right\}$$

El teorema que nos ayuda a resolver el problema indica que la función:

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Tiene la propiedad

$$\mathscr{L}\left\{\mathrm{h}\left(t\right)\right\} = H(s) = F(s)\cdot G(s)$$

La función de t definida como la integral

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Depende sólo de $f \quad \wedge \ g$, y se conoce como la convolución de $f \quad \wedge \ g$.

Se representa como $f * g$, de tal forma que su transformada es el producto de las transformadas de $f \quad \wedge \ g$.

Convolución:

si las funciones $f \wedge g$ son continuas por tramos en el intervalo $[0,\infty)$ entonces un producto especial, denotado por $f * g$ se define mediante la integral

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Y se llama convolución de $f \wedge g$. La convención de $f * g$ es una función de t

Teorema de convolución

si $f(t) \wedge g(t)$ son funciones continuas por tramos en el intervalo $[0,\infty)$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathscr{L}\{\mathrm{f} \ \ * \ \mathrm{g}\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

Para terminar el ejemplo 1 debemos tener en cuenta que:

La convolución de $sent \ \wedge \ \ cos\, t$ es

$$sent * cos\ t \ = \int_0^t sen\ \tau\ cos\,(\ t-\tau)\, d\tau$$

Aplicando la identidad de producto a suma

$$senmx.cosnx = \frac{1}{2}\left(sen\left[(m-n)\,x\right] + sen\left[(m+n)\,x\right]\right)$$

$\int_0^t sen\, \tau\; cos\,(\,t-\tau)\, d\tau\;\; =$
$\frac{1}{2}\int_0^t sen\,(\,\tau-t+\tau)+sen\,(\tau+\;t-\tau)\,d\tau$

Agrupando términos semejantes

$$\frac{1}{2}\int_0^t sen\,(\,2\tau-t)+sen\,(\,t)\,d\tau$$

Integrando obtenemos

$$\frac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{2}cos\,(\,2\tau-t)+sen\,(\,t)\,\tau\right]_0^t$$

Reemplazando los límites de integración

$$\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}cos\,(\,t)+sen\,(\,t)\,t\right)-\left(-\frac{1}{2}cos\,(\,-t)+sen\,(\,t)\,0\right)\right]$$

Ahora evaluamos

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}cos\,(\,t)+t\;sen\;t+\frac{1}{2}cos\,(\,t)\right]$$

Agrupando términos semejantes obtenemos la solución

$$\frac{1}{2}t\;sen\;t$$

La solución del ejemplo 1 es:

$$y(t)=\frac{1}{2}t\;sen\;t$$

Ejemplo 2

Evaluar $\mathscr{L}\left\{2 * t^2\right\}$

Solución

$$\mathscr{L}\left\{2 * t^2\right\} = \frac{2}{s} \cdot \frac{2!}{s^3}$$

$$\frac{4}{s^4}$$

Ejemplo 3

Evaluar $\mathscr{L}\left\{e^{-2t} * senh3t\right\}$

Solución

$$\mathscr{L}\left\{e^{-2t} * senh3t\right\} = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{3}{s^2-9}$$

$$\frac{3}{(s+2)\left(s^2-9\right)}$$

Ejemplo 4

Evaluar $\mathscr{L}\left\{\int_0^t cos\tau d\tau\right\}$

Solución

La función $f(\tau)=1$ y la función $g(t-\tau)=cos\tau$ por tanto, se aplica el teorema de convolución

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t cos\tau d\tau\right\}=\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

Al multiplicar los dos resultados obtenemos la solución:

$$\frac{1}{s^2+1}$$

Ejemplo 5

Evaluar $\mathscr{L}\left\{t\int_0^t sen\tau d\tau\right\}$

Solución

La función $f(\tau)=1$ y la función $g(t-\tau)=sen\tau$, se aplica el teorema de convolución, pero afuera de la integral hay una t, por tanto, también se debe aplicar la derivada de una transformada

$$\mathscr{L}\left\{t\int_0^t sen\tau d\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot(-1)\,\frac{d}{ds}\,\frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathscr{L}\left\{t\int_0^t sen\tau d\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot(-1)\cdot\frac{-2s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Al multiplicar signos y simplificar obtenemos:

$$\frac{2}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Ejemplo 6

Hallar la convolución de $f(t) = sen\ 2t \quad \wedge \quad g(t) = e^t$

Solución

Para resolver el ejercicio debemos aplicar el teorema de convolución integrando las dos funciones

$$sen\ 2t * e^t = \int_0^t e^{t-\tau}\ sen\ 2\tau\ d\tau$$

Aplicando propiedades de potenciación

$$\int_0^t e^t\cdot\ e^{-\tau} sen\ 2\tau\ d\tau = e^t\int_0^t\ e^{-\tau} sen\ 2\tau\ d\tau$$

Recuerde la integral

$$cos^2t = \int e^{ax} senbxdx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(asenbx - bcosbx) + c$$

Reemplazamos los valores teniendo en cuenta que: $a = -1 \wedge b = 2$, obtenemos:

$$e^t \int_0^t \; e^{-\tau} sen\; 2\tau \; d\tau = e^t \left(\frac{e^{-\tau}}{5}(-sen\; 2\tau - 2cos2\tau) \right]_0^t$$

Ahora debemos evaluar la integral reemplazando los límites de integración

$$e^t \left[\left(\frac{e^{-t}}{5}(-sen\; 2t - 2cos2t) \right) - \left(\frac{e^0}{5}(-sen\; 0 - 2cos0) \right) \right]$$

Evaluando obtenemos

$$e^t \left[\left(\frac{e^{-t}}{5}(-sen\; 2t - 2cos2t) \right) - \left(\frac{1}{5}(-2) \right) \right]$$

Operando el último término

$$e^t \left[\left(\frac{e^{-t}}{5}(-sen\; 2t - 2cos2t) \right) + \frac{2}{5} \right]$$

Aplicando la propiedad distributiva obtenemos la solución

$$\frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}sen\; 2t - \frac{2}{5}cos2t$$

4.7.1 Ejercicios y respuestas de la sección 4.7

Ejercicios de repaso sección 4.7

Resolver la transformada de integrales

1. $\mathscr{L}\left\{1 * t^3\right\}$

2. $\mathscr{L}\left\{t^2 * te^t\right\}$

3. $\mathscr{L}\left\{e^{-t} * e^t cost\right\}$

4. $\mathscr{L}\left\{e^{2t} * sent\right\}$

5. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^\tau d\tau\right\}$

6. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t cos\tau d\tau\right\}$

7. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau} cos\tau d\tau\right\}$

8. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \tau sen\tau d\tau\right\}$

9. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau\right\}$

10. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t sen\tau cos(t-\tau) d\tau\right\}$

Respuestas

4.7.2 Ejercicios y respuestas del capítulo 4

Ejercicios de repaso Capítulo 4

Resuelva la ED dada.

1. $y'' - 4y' = 6e^{3t} - 3e^{-t}$ sujeta a la condición $y(0) = 1 \quad \wedge \quad y'(0) = -1$
2. $y'' + y = \sqrt{2}sen\sqrt{2}t$ sujeta a la condición $y(0) = 10 \quad \wedge \quad y'(0) = 0$
3. $y'' + 9y = e^{t}$ sujeta a la condición $y(0) = 1 \quad \wedge \quad y'(0) = 0$
4. $y'' - 4y' + 4y = t^{3}$ sujeta a la condición $y(0) = 1 \quad \wedge \quad y'(0) = 0$
5. $y'' - 6y' + 13y = 0$ sujeta a la condición $y(0) = 0 \quad \wedge \quad y'(0) = -3$
6. $2y'' + 20y' + 51y = 0$ sujeta a la condición $y(0) = 2 \quad \wedge \quad y'(0) = 0$
7. $y'' - y' = e^{t}cost$ sujeta a la condición $y(0) = 0 \quad \wedge \quad y'(0) = 0$
8. $y'' - 2y' + 5y = 1 + t$ sujeta a la condición $y(0) = 0 \quad \wedge \quad y'(0) = 4$
9. $y' + y = f(t)$ sujeta a la condición $y(0) = 0$ donde $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & t \geq 1 \end{cases}$
10. $y' + 2y = f(t)$ sujeta a la condición $y(0) = 0$ donde $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$

Respuestas

Capítulo 5

SERIES DE FOURIER

5.1 Funciones ortogonales

Las series e integrales de Fourier establecen un tema clásico del análisis matemático. Aparecen en el siglo XVIII como resultado del estudio de las vibraciones de una cuerda, las series de Fourier han contribuido al desarrollo de los conceptos básicos del análisis – función, integral, serie, convergencia y se han obtenido por los trabajos de varios matemáticos sobre series trigonométricas.

Las series de Fourier son series de términos coseno y seno y surgen en la tarea práctica de representar funciones periódicas generales. Como aplicación constituyen una herramienta muy importante en la solución de problemas en los que intervienen ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

Otra propiedad esencial de las funciones es generalizar el concepto de ortogonalidad, el concepto de producto interno de vectores pierde su interpretación geométrica en las funciones. Pero dicho concepto se ha generalizado y es común considerar una función como un vector. Entonces se puede decir que dos funciones distintas son ortogonales cuando su producto interno es cero, este producto interno es en realidad una integral definida. Este concepto se aplica en movimientos amortiguados de una masa “m” en un resorte y en oscilaciones amortiguadas forzadas.

Producto interno de funciones:

El producto interno de dos funciones $f_1 \quad \wedge \quad f_2$ en un intervalo $[a, b]$ es el número.

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$$

Dos funciones $f_1 \quad \wedge \quad f_2$ son ortogonales en un intervalo $[a, b]$ sí.

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0$$

Un conjunto de funciones de valor real $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots\}$ se dice que es ortogonal en un intervalo $[a, b]$ si

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$$

Ejemplo 1

demostrar que las funciones $f_1(x) = x^2 \quad \wedge \quad f_2(x) = x^3$ son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$

Solución

Se debe demostrar que el producto interno entre las dos funciones es cero

$(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} x^2 x^3 dx$

Obtenemos la integral

$$\int_{-1}^{1} x^5 dx = \left.\frac{x^6}{6}\right|_{-1}^{1}$$

Evaluando los límites

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

Como el producto interno de las funciones es cero, queda demostrado que las funciones son ortogonales

Ejemplo 2

demostrar que las funciones $f_1(x) = cosx \quad \wedge \quad f_2(x) = sen^2x$ son ortogonales en el intervalo $[0, \pi]$

Solución

$(f_1, f_2) = \int_{0}^{\pi} cosxsen^2xdx$

Se integra por sustitución

$u = senx \qquad\qquad du = cosxdx$

$$\int_0^{\pi} cosxsen^2xdx = \int_0^{\pi} u^2du = \frac{u^3}{3} = \left.\frac{sen^3x}{3}\right|_0^{\pi}$$

Evaluando obtenemos

$$\frac{sen^3\pi}{3} - \frac{sen^3 0}{3} = 0 - 0 = 0$$

Las funciones son ortogonales

Conjuntos ortonormales: la norma o longitud $\|u\|$ de un vector u, se puede expresar en términos del producto interno. La expresión $(u,u) = \|u^2\|$ se llama norma cuadrada, por lo que la norma es $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$. De igual modo la norma cuadrada de una función φ_0 es $\|\varphi(x)\|^2 = (\varphi_n, \varphi_n)$ y así la norma o su longitud generalizada es $\|\varphi(x)\| = \sqrt{(\varphi_n, \varphi_n)}$. En otras palabras, la norma cuadrada y la norma de una función φ_n en un conjunto ortogonal $\{\varphi_n(x)\}$ son, respectivamente

$$\|\varphi(x)\|^2 = \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx$$

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx}$$

Ejemplo 3

Demuestre que el conjunto $\{1, cosx, cos2x, \ldots\}$ es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y encuentre las normas de cada función.

Solución

Se debe demostrar que el producto interno de las funciones $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)...\}$ es cero, donde:

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = cosx,\ \varphi_2(x) = cos2x,\ \varphi_n(x) = cosnx...$$

Primero se demuestra que $\varphi_0(x), \varphi_n(x) = 0$, es decir, el 1 con todos los cosenos

$$(\varphi_0(x), \varphi_n(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} 1.cos(nx)dx = -\frac{1}{n}sen(nx)\bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$-\frac{1}{n}sen\pi x + \tfrac{1}{n}sen\left(-\pi x\right)$$

Recuerde que: $sen\left(-x\right) = -senx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1.cos(nx)dx = -\frac{1}{n}sen(\pi x) - \frac{1}{n}sen(\pi x) = 0$$

Ahora se debe demostrar que cada coseno es ortogonal con los otros cosenos, es decir, $m \neq n$

$$(\varphi_m(x), \varphi_n(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} cos(mx)cos(nx)dx$$

Recuerde que: $cosAcosB = \dfrac{1}{2}\left[cos(A+B) + cos(A-B)\right]$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[cos(m+n)x + cos(m-n)x\right]dx$$

$$\frac{1}{2\left(m+n\right)}sen\left(m+n\right)x + \frac{1}{2\left(m-n\right)}sen\left(m-n\right)x\bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\frac{1}{2(m+n)} sen(m+n)\pi + \frac{1}{2(m-n)} sen(m-n)\pi -$$
$$\frac{1}{2(m+n)} sen(m+n)\pi + \frac{1}{2(m-n)} sen(m-n)\pi = 0$$

Queda demostrado que el conjundo de funciones es ortogonal. Ahora se deben hallar las normas de $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)...\}$

Primero se halla la norma de $\varphi_0(x)$ donde

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0^2(x)\, dx}$$

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx} = \sqrt{x|_{-\pi}^{\pi}} = \sqrt{\pi - (-\pi)} = \sqrt{2\pi}$$

Sólo falta hallar las normas de los cosenos. Para hacer todas las combinaciones asumimos $m = n$

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n^2(x)\, dx}$$ Reemplazando obtenemos

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} cos^2(nx)\, dx}$$

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - cos(2nx)}{2} dx}$$

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\frac{x}{2} - \frac{sen(2nx)}{4}\Big|_{-\pi}^{\pi}}$$

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{sen 2n\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{sen 2n\pi}{4}\right)}$$

$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi}$

La norma de $\|1\| = \sqrt{2\pi}$ y la norma de $\|cos(nx)\| = \sqrt{\pi}$

Ejemplo 4

Demuestre que el conjunto $\left\{sen\frac{n\pi}{p}x\right\}$ con $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ es ortogonal en el intervalo $[0, p]$ y encuentre las normas de cada función.

Solución

Se debe demostrar que el producto interno de las funciones $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x) \ldots\}$ es cero, donde:

$$\varphi_1(x) = \left\{sen\frac{\pi}{p}x\right\},\ \varphi_2(x) = \left\{sen\frac{2\pi}{p}x\right\},$$

$$\varphi_3(x) = \left\{sen\frac{3\pi}{p}x\right\},\ \varphi_n(x) = \left\{sen\frac{n\pi}{p}x\right\} \ldots$$

Se debe demostrar que cada $seno$ es ortogonal con los otros $senos$, es decir, $m \neq n$

$(\varphi_0(x), \varphi_n(x))$

$$(\varphi_m(x), \varphi_n(x)) = \int_0^p sen\frac{m\pi}{p}x \;\; sen\frac{m\pi}{p}x \;\; dx$$

para integrar se aplica la identidad de producto a suma

$$sen(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}\left[cos(m-n)\,x + cos(m+n)\,x\right]$$

$$\frac{1}{2}\int_0^p \left[cos\frac{(m-n)\,\pi}{p}x + cos\frac{(m+n)\,\pi}{p}x\right] dx =$$

$$\left.\frac{p}{2\,(m-n)\,\pi}sen\frac{(m-n)\,\pi}{p}x - \frac{p}{2\,(m+n)\,\pi}sen\frac{(m+n)\,\pi}{p}x\right|_0^p =$$

$$\frac{p}{2\,(m-n)\,\pi}sen(m-n)\pi - \frac{p}{2\,(m+n)\,\pi}sen(m+n)\pi$$

$$\frac{p}{2\,(m-n)\,\pi}sen\;0 + \frac{p}{2\,(m+n)\,\pi}sen\;0 = 0$$

Normas de los senos. Para hacer todas las combinaciones asumimos $m = n$

$$\|\varphi_n\,(x)\| = \sqrt{\int_0^p sen^2\frac{n\pi}{p}\;xdx} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^p \left(1 - cos2\frac{n\pi}{p}x\right) dx}$$

$$\sqrt{\left.\frac{x}{2} - \frac{psen2\frac{n\pi}{p}x}{4n\pi}\right|_0^p} = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - \frac{psen(2n\pi)}{4n\pi}\right) - \left(0 - \frac{psen0}{4n\pi}\right)}$$

La norma es $\sqrt{\frac{p}{2}}$

5.1.1 Ejercicios y respuestas de la sección 5.1

Ejercicios de repaso sección 5.1

Demuestre que las funciones son ortogonales en el intervalo indicado

1. $f_1(x) = x \quad f_2(x) = x^2 \quad [-2, 2]$

2. $f_1(x) = x^3 \quad f_2(x) = x^2 + 1 \quad [-1, 1]$

3. $f_1(x) = e^x \quad f_2(x) = xe^{-x} - e^{-x} \quad [0, 2]$

4. $f_1(x) = cosx \quad f_2(x) = sen^2x \quad [0, \pi]$

5. $f_1(x) = x \quad f_2(x) = cos2x \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

6. $f_1(x) = e^x \quad f_2(x) = senx \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$

En los ejercicios 7 a 12 demuestre que el conjunto dado de funciones es ortogonal en el intervalo indicado. Encuentre la norma de cada función en el conjunto

7. $\{senx, sen3x, sen5x, ...\} \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

8. $\{cosx, cos3x, cos5x, ...\} \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Respuestas

5.2 Series de Fourier

La serie de Fourier de una función f definida en el intervalo $[-p,p]$ está dada por

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi}{p}x+b_n sen\frac{n\pi}{p}x\right)$$

Donde

$$a_o=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)cos\frac{n\pi}{p}xdx$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)sen\frac{n\pi}{p}xdx$$

Ejemplo 1

Desarrolle la serie de Fourier $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ \pi-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$

Solución

Para desarrollar la serie de Fourier debemos encontrar los coeficientes $a_o, a_n \wedge b_n$, teniendo en cuenta que la serie está definida por tramos

$$a_o = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{o} 0dx + \int_0^{\pi} (\pi - x)\, dx\right)$$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi x - \tfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\left[\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) - 0\right] = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}\right)$$

$$a_o = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0cos\frac{n\pi}{\pi}xdx + \int_0^{\pi} (\pi - x)\, cos\frac{n\pi}{\pi}xdx\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\, cos(nx)dx$$

Se integra por partes

$$u = (\pi - x) \qquad dv = cos(nx)dx$$

$$du = -dx \qquad v = \frac{sen(nx)}{n}$$

$$a_n = \frac{(\pi - x)\, sen(nx)}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} sen(nx)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(\pi - x)\, sen(nx)}{n} - \frac{cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right]$$

Reemplazando los límites de integración

$$\left(\frac{(\pi-\pi)\,sen(n\pi)}{n\pi}-\frac{cos(n\pi)}{n^2\pi}\right)-\left(\frac{(\pi-0)\,sen0}{n\pi}-\frac{cos0}{n^2\pi}\right)$$

Recuerde que $cos(n\pi)$ es -1 cuando n es impar, es decir $n = 1,3,5,7,\ldots$ y es igual a 1 cuando n es par, es decir, $n = 2,4,6,8,\ldots$ y $sen(n\pi) = 0$

Evaluando obtenemos

$$a_n = -\frac{(-1)^n}{n^2\pi}+\frac{1}{n^2\pi}$$

$$a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0sen\frac{n\pi}{\pi}xdx+\int_0^{\pi}(\pi-x)\,sen\frac{n\pi}{\pi}xdx\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\,sen(nx)dx$$

Se integra por partes

$$u = (\pi-x) \qquad dv = sen(nx)dx$$

$$du = -dx \qquad v = -\frac{cos(nx)}{n}$$

$$b_n = \frac{-(\pi-x)\,cos(nx)}{n}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-(\pi-x)\,cosnx}{n}-\frac{sen(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right]$$

Reemplazando los límites de integración

$$b_n = \left(\frac{-(\pi - \pi)\, cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{sen(n\pi)}{n^2\pi}\right) - \left(\frac{-\pi cos(0)}{n\pi} - \frac{sen(0)}{n^2\pi}\right)$$

Evaluando obtenemos

$$b_n = \frac{\pi}{n\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

La serie de Fourier es:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} cos(nx) + \frac{1}{n} sen(nx)$$

Ejemplo 2

Desarrolle la serie de Fourier $f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Solución

Para desarrollar la serie de Fourier debemos encontrar $a_o, a_n \wedge b_n$, teniendo en cuenta que la serie está definida por tramos

$$a_o = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{-\pi}{2}}^{o} 0dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\ x\ dx\right)$$

$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\ x\ dx = \frac{2}{\pi}\left(sen\ x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$a_o = \frac{2}{\pi}\left[\left(sen\tfrac{\pi}{2} - sen\ 0\right) - 0\right] = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\ x\ cos\ \frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}}\ dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)cos\left(2nx\right) dx$$

Recuerde que: $cosAcosB = \frac{1}{2}\left[cos(A-B) + cos(A+B)\right]$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos[\left(1-2n\right)x] + cos[\left(1+2n\right)x]\right) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{sen\left(1-2n\right)x}{1-2n} + \frac{sen\left(1+2n\right)x}{1+2n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{sen\left(1-2n\right)\frac{\pi}{2}}{1-2n} + \frac{sen\left(1+2n\right)\frac{\pi}{2}}{1+2n}\right) - \left(\frac{sen\left(0\right)}{1-2n} + \frac{sen\left(0\right)}{1+2n}\right)\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{(-1)^n}{1-2n} + \frac{(-1)}{1+2n}\right) - 0\right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi\left(1-4n^2\right)}$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\ x\ sen\ \frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}}\ dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x) sen\,(2nx)\,dx$$

Recuerde que: $senA.cosB = \frac{1}{2}\left(sen\left[(A-B)\right] + sen\left[(A+B)\right]\right)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(sen[(2n-1)\,x] + sen[(2n+1)\,x]\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[- \frac{cos\,(2n-1)\,x}{2n-1} - \frac{cos\,(2n+1)\,x}{2n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{cos\,(2n-1)\,\frac{\pi}{2}}{2n-1} - \frac{cos\,(2n+1)\,\frac{\pi}{2}}{2n+1}\right) - \left(\frac{cos\,(0)}{2n-1} - \frac{cos\,(0)}{2n+1}\right)\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[0 - \left(-\frac{1}{2n-1} - \frac{(-1)}{2n+1}\right) - 0\right]$$

$$b_n = \frac{4n}{\pi\,(4n^2-1)}$$

La serie de Fourier es:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi\,(1-4n^2)} cos(nx) + \frac{4n}{\pi\,(4n^2-1)} sen(nx)$$

5.2.1 Ejercicios y respuestas de la sección 5.2

Ejercicios de repaso sección 5.2

Encuentre la serie de Fourier de f en el intervalo dado

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

5. $f(x) = x + \pi, \qquad -\pi < x < \pi$

Respuestas

5.3 Series de Fourier de senos y de cosenos

Series de Fourier de senos y de cosenos

1. La serie de Fourier de una función par en el intervalo $[-p, p]$ es la serie de cosenos.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos \frac{n\pi}{p} x$$

Donde

$$a_o = \frac{2}{p} \int_0^p f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) cos \frac{n\pi}{p} x dx$$

2. La serie de Fourier de una función impar en el intervalo $[-p, p]$ es la serie de senos.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen \frac{n\pi}{p} x$$

Donde

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) sen \frac{n\pi}{p} x dx$$

Funciones pares e imparares.

$f(x) = x^2$ es par, ya que $f(-x) = \left(-x^2\right) = x^2 = f(x)$

$f(x) = x^3$ es impar, ya que $f(-x) = \left(-x^3\right) = -x^3 = -f(x)$

Propiedades de funciones pares e impares

a) El producto de dos funciones pares es par

b) El producto de dos funciones impares es par

c) El producto de una función par y una impar es impar

d) La suma (diferencia) de dos funciones pares es par

e) La suma (diferencia) de dos funciones impares es impar

f) Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

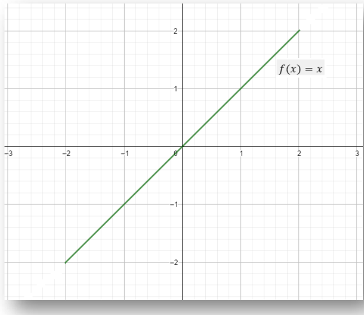
g) Si f es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Ejemplo 1

Desarrolle la función $f(x) = x \qquad -2 < x < 2$

Solución

Para desarrollar la serie de Fourier es importante graficar para saber si la función es par o impar.



La gráfica nos muestra que es una función impar, entonces es una serie de senos, sólo se debe hallar b_n

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x sen\frac{n\pi}{2}xdx = \int_0^2 x sen\frac{n\pi}{2}xdx$$

Es una integral por partes

$$u = x \qquad\qquad dv = sen\frac{n\pi}{2}xdx$$

$$du = dx \qquad\qquad v = -\frac{2}{n\pi}cos\frac{n\pi}{2}x$$

$$\int_0^2 x sen\frac{n\pi}{2}xdx = -\frac{2x}{n\pi}cos\frac{n\pi}{2}x + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 cos\frac{n\pi}{2}xdx$$

$$b_n = \int_0^2 x sen\frac{n\pi}{2}xdx = \left.\frac{-2x}{n\pi}cos\frac{n\pi}{2}x + \frac{4}{n^2\pi^2}sen\frac{n\pi}{2}x\right|_0^2$$

$$b_n = \left(\frac{-4}{n\pi}cosn\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}senn\pi\right) - \left(\frac{0}{n\pi}cos0 + \frac{4}{n^2\pi^2}sen0\right)$$

$$b_n = \frac{-4\left(-1\right)^n}{n\pi} = \frac{4\left(-1\right)^{n+1}}{n\pi}$$

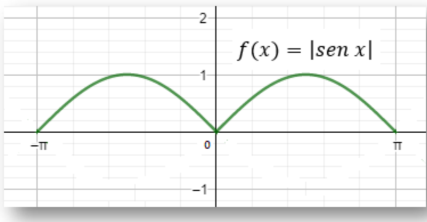
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}sen\frac{n\pi}{2}x$$

Ejemplo 2

Desarrolle la función $f(x) = |sen\ x| \qquad -\pi < x < \pi$

Solución

Para desarrollar la serie de Fourier es importante graficar para saber si la función es par o impar.



La gráfica nos muestra que es una función par, entonces es una serie de cosenos, se debe hallar $a_0, \quad a_n$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sen\ x\ dx = -\frac{2}{\pi}cosx\Big|_0^{\pi}$$

$$a_0 = -\frac{2}{\pi}\left[(cos\pi) - (cos0)\right] = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sen\ x\ cos\frac{n\pi}{\pi}xdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sen\ x\ cos(nx)dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(sen[(1+n)\,x] + sen[(1-n)\,x]\right)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{cos\,(1+n)\,x}{1+n} - \frac{cos\,(1-n)\,x}{1-n}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{cos\,(1+n)\,\pi}{1+n} - \frac{cos\,(1-n)\,\pi}{1-n}\right) - \left(-\frac{cos\,(0)}{1+n} - \frac{cos\,(0)}{1-n}\right)\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{(-1)^n}{1+n} + \frac{(-1)^n}{1-n}\right) + \left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\right)\right]$$

$$a_n = \frac{2\,((-1)^n + 1)}{\pi\,(1-n^2)}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,((-1)^n + 1)}{\pi\,(1-n^2)} cos(nx)$$

En la siguiente escena interactiva, diseñada por phet.colorado.edu, podrás crear las ondas de una serie de Fourier.

5.3.1 Ejercicios y respuestas de la sección 5.3

Ejercicios de repaso sección 5.3

Desarrolle cada función dada en una serie adecuada de cosenos o de senos.

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

5. $f(x) = x + \pi, \qquad -\pi < x < \pi$

Respuestas

5.3.2 Ejercicios y respuestas del capítulo 5

Ejercicios de repaso Capítulo 5

Encuentre la serie de Fourier de f o la serie de senos y de cosenos en el intervalo dado

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & -5 < x < 0 \\ 1 + x, & 0 \leq x < 5 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 2 + x, & -2 < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ e^x - 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

4. $f(x) = 3 - 2x, \qquad -\pi < x < \pi$

5. $f(x) = e^x, \qquad -\pi < x < \pi$

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1 \\ -2, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

Lista de escenas interactivas.

Lista de videos.