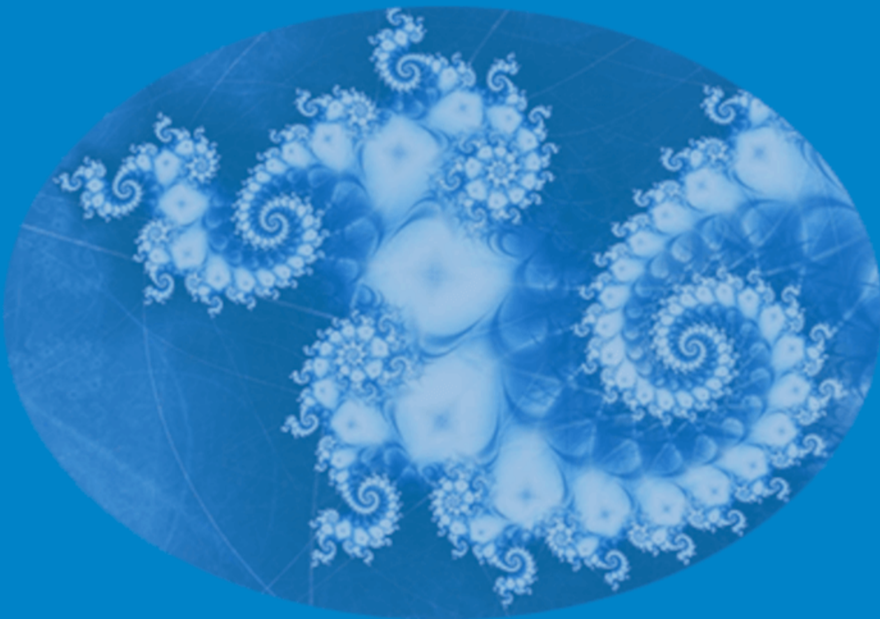


Os números complexos

María José García Cebrian

Tradução: Lindberg Barbosa Lira de Almeida

RED educativa digital Descartes

DESCARTES
matemáticas interactivas

Os números complexos

María José García Cebrian
Rede Educativa Digital Descartes, Espanha

Tradução para o portugues: Lindberg Barbosa Lira de Almeida

Fundo Editorial
Córdoba (España)
2023

Título da obra:
Os números complexos

Autora:
María José García Cebrian

Tradução:
Lindberg Barbosa Lira de Almeida

Design da capa: Diana María Velásquez García
Código JavaScript para o livro: Joel Espinosa Longi, IMATE, UNAM.
Recursos interativos: DescartesJS
Fonte: Lato
Fórmulas matemáticas: $\KaTeX$
Núcleo do livro interativo: julho 2022

Red Educativa Digital Descartes
Córdoba (España)
descartes@proyectodescartes.org
https://proyectodescartes.org

Proyecto iCartesiLibri
https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/index.htm

ISBN: 978-84-18834-68-4

Tabela de conteúdo

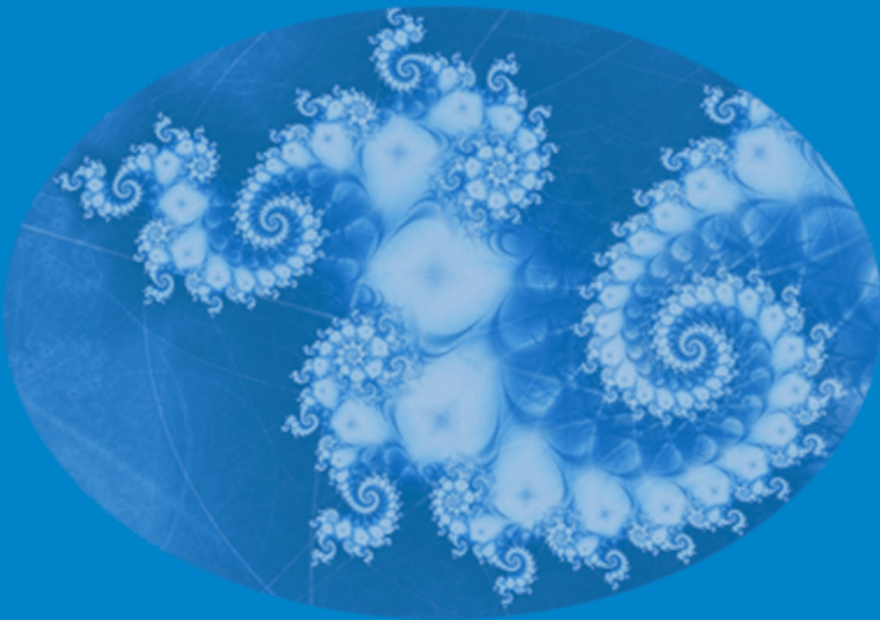
Introdução

Os Números complexos foram introduzidos para dar sentido à raiz quadrada de números negativos. Desta forma, equações como $x^2 + 1 = 0$ passam a poder ser resolvidas e abre-se então, a partir daí, uma porta para um mundo incrível no qual todas as operações (exceto a divisão por 0) são possíveis.

Aqui os conteúdos são abordados a nível do Bacharelado em Ciências espanhol, mas pode ser válido para qualquer aluno que queira mergulhar no estudo desses fascinantes números.

No vídeo a seguir[1] podes ver uma interessante introdução aos números complexos e suas aplicações.

[1] Capítulo 5 do vídeo "DIMENSÕES, um passeio pela matemática", www.dimensions-math.org/Dim_ES.htm

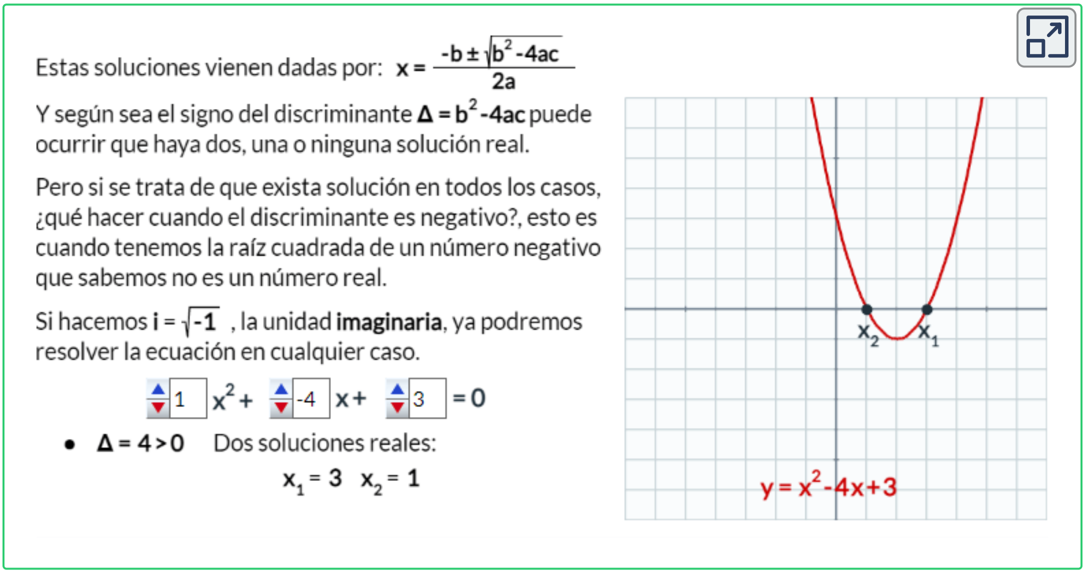


Capítulo I

A forma algébrica

1.1 Por que números complexos?

As soluções[2] da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são os pontos de interseção da função $y = ax^2 + bx + c$ com o eixo das abscisas.



Um pouco de história[3]

Embora a primeira referência conhecida a raízes quadradas de números negativos venha de matemáticos gregos, foi somente no século XVI que Girolamo Cardano propôs esses números. Mais tarde, Descartes, em 1637, deu-lhes o nome de imaginários.

Foi Wessel em 1799 e Argand em 1806, com a proposta do plano complexo, quem lançou as bases dos números complexos, até que, finalmente, Gauss (1777-1855) lhes deu um nome e os definiu rigorosamente.

---

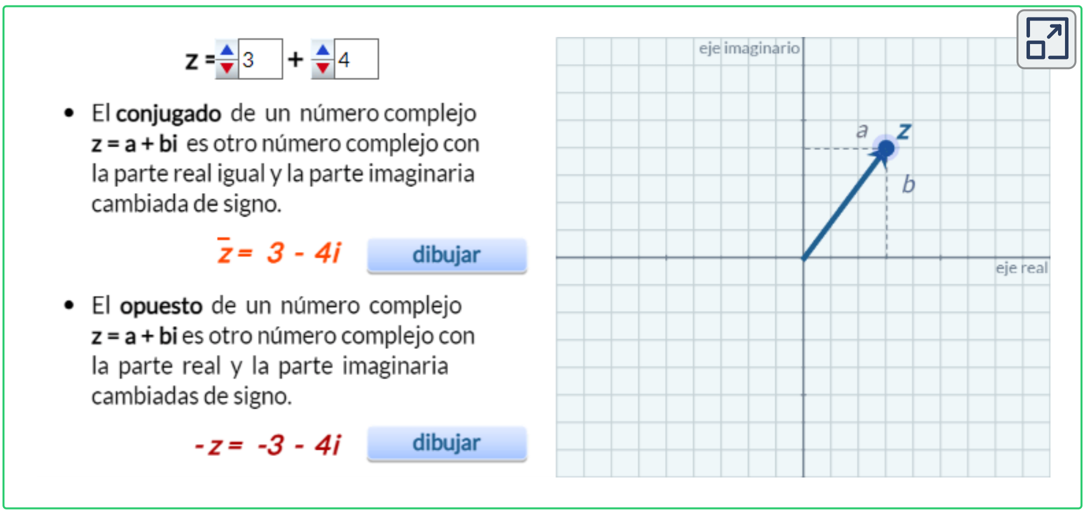
[2] Com base em uma página da unidade [Números Complexos]() de Ángela Núñez Castaín para Red Educativa Digital Descartes.

[3] Da Wikipedia [pt.wikipedia.org/wiki/Número_complexo]().

1.2 Parte real e parte imaginária

Se considerarmos a unidade imaginária $i=\sqrt{-1}$ e representá-la no ponto $(0,1)$ do plano, podemos localizar os números $2i, 3i, \ldots, -i$ da mesma forma , $-2i$, ... no eixo vertical, ou seja, os números bi que chamaremos de imaginários. Então qualquer ponto no plano (a,b), com a e b números reais, pode ser escrito como $(a,0)+(0,b)$, isto é como a soma de a número real e um número imaginário.

- Os números complexos são da forma $a+bi$, onde a é a parte real e b é a parte imaginária. Cada número complexo z pode ser representado no plano pelo ponto $Z(a,b)$ chamado **afixo** ou pelo vetor OZ.
- Dois números complexos são iguais se as partes reais e as partes imaginárias forem respectivamente iguais em ambos.



Para praticar

Ejercicio 1

Averigua el valor de a y de b para que $a + 6i$ sea el conjugado de $-10 + bi$

$a =$ ☐ $b =$ ☐

comprobar

Ejercicio 2

Halla las soluciones de la ecuación: $z^2 - 14z + 85 = 0$

☐ $\pm$ ☐ i

comprobar

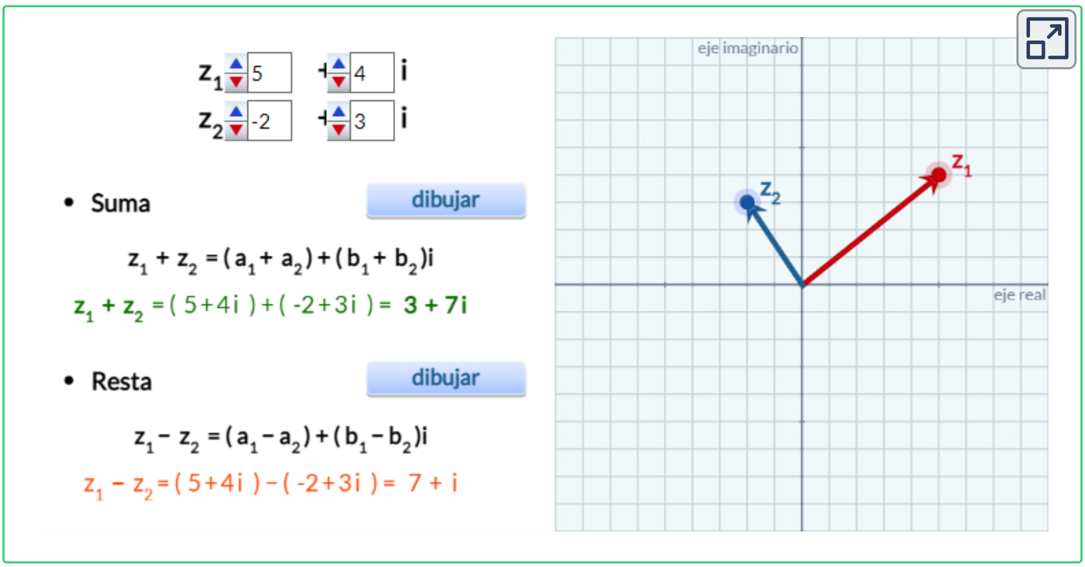
1.3 Operações com complexos: adição e subtração

Números complexos podem ser adicionados ou subtraídos seguindo as regras de operações com números reais.

- Para **somar** dois números complexos soma-se as partes reais e as partes imaginárias, respectivamente. Assim, dados $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, sua soma é:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

- Tal como acontece com os números reais, para **subtrair** dois complexos, o **oposto** do subtraendo deve ser adicionado ao minuendo.



Para praticar

Ejercicio 3

Efectúa las siguientes operaciones: $(-7-6i)+\frac{1}{3}(6-9i)-(-4+6i)$

$\square + \square i$

comprobar

Ejercicio 4

Calcula los números complejos z_1 y z_2 que cumplen $z_1+z_2 = 4+5i$ y $z_1-z_2 = -6-7i$

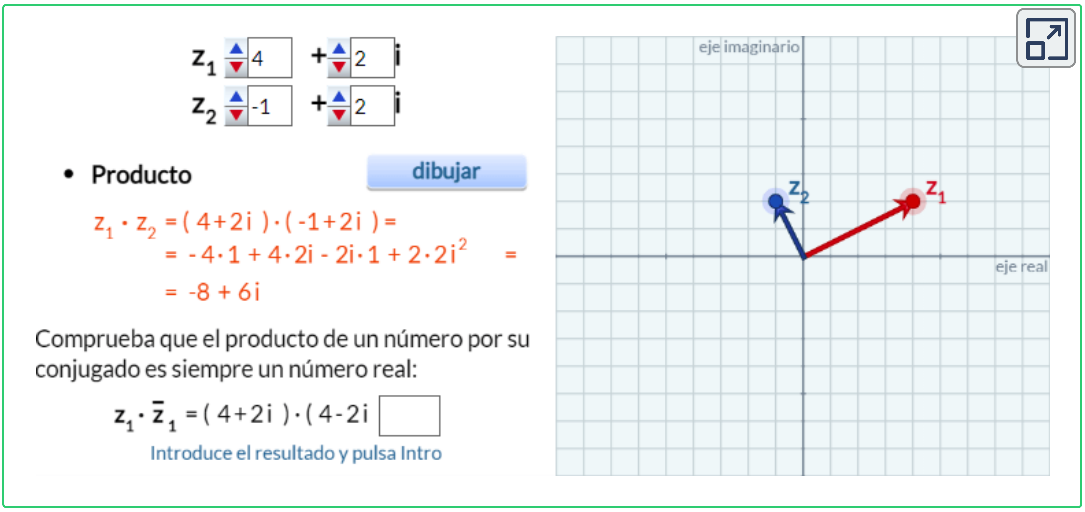
$z_1 = \square \; \square$ $\quad z_2 = \square \; \square$

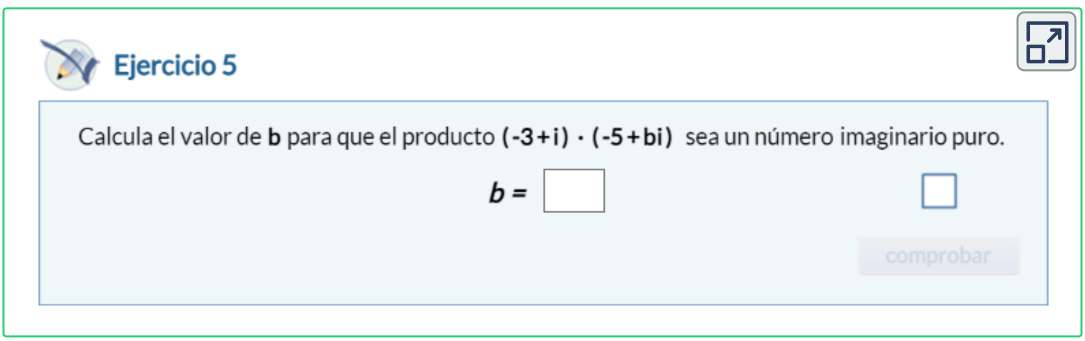
comprobar

1.4 Operações com complexos: multiplicação e divisão

Os números complexos podem ser multiplicados seguindo as regras da operações com números reais e levando em conta que $i \cdot i = i^2 = -1$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + b_1 \cdot a_2 i + b_1 \cdot b_2 i^2 \\ &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) i \end{aligned}$$





Inverso de un número complejo

El inverso de un número complejo **z = a + bi** es otro complejo $\frac{1}{z}$ que debe cumplir $\mathbf{z \cdot \frac{1}{z} = 1}$

Para calcularlo observa que el producto de **z = a + bi** por su conjugado $\bar{\mathbf{z}}$ **= a - bi** resulta:

$$(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2$$

Y si se dividen los dos miembros de esta igualdad por a^2+b^2 se obtiene:

$$\frac{(a+bi)\cdot(a-bi)}{a^2+b^2} = (a+bi)\cdot\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right) = (a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) = 1$$

Con lo que el inverso de **z = a + bi** es: $\boxed{\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i}$

Cociente de complejos

Para dividir dos números complejos, al igual que con los números reales, se multiplica el numerador por el inverso del denominador. Como regla práctica multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado de este último.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

z_1 = -8, 6

z_2 = -1, 2

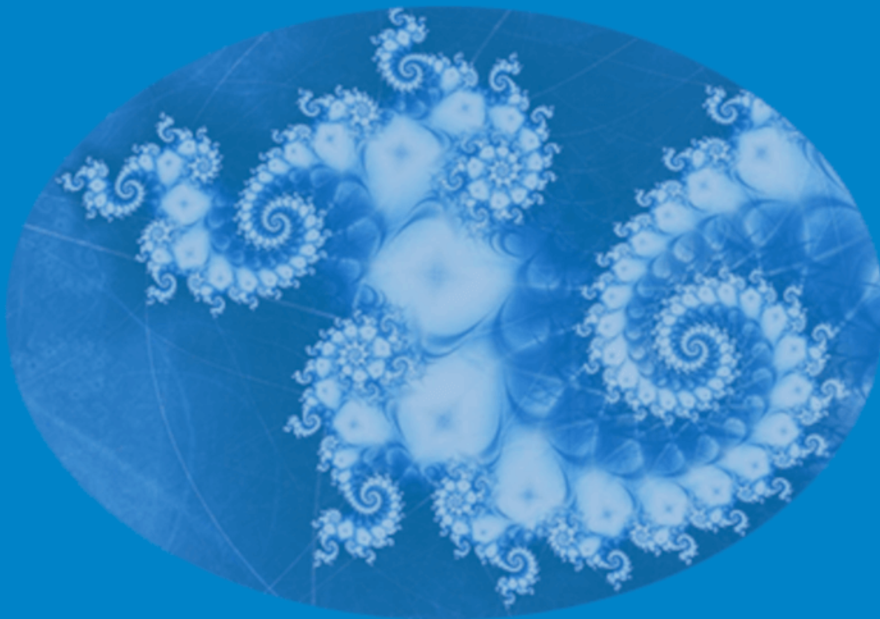
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-8+6i}{-1+2i} = \frac{(-8+6i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{8\cdot1+8\cdot2i-6i\cdot1-6\cdot2i^2}{1-4i^2} = \frac{20+10i}{5} = 4+2i$$

Ejercicio 6

Calcula el valor de **b** para que el afijo del cociente $\frac{-3+bi}{4+3i}$ esté en la bisectriz del primer cuadrante.

b =

comprobar



Capítulo II

A forma trigonométrica

2.1 Módulo e argumento de um número complexo

Sea el número complejo $z = 4 + 3i$

- El **módulo** de **z** es la distancia del afijo al origen de coordenadas.

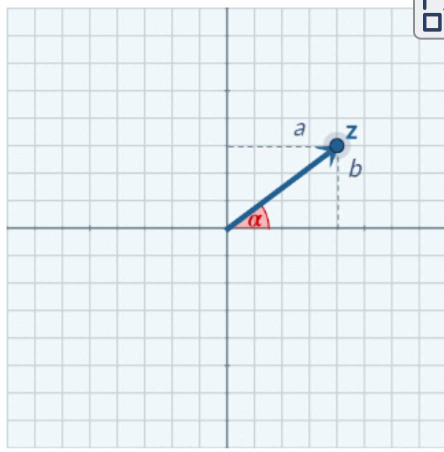
$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

- El **argumento** es el ángulo que forma el segmento $\overline{OZ}$ con el semieje positivo real medido en sentido contrario a las agujas del reloj entre 0° y 360°.

$$\alpha = \arg(z) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = 36{,}9^\circ$$

Se puede expresar el número complejo **z** mediante su módulo y su argumento en **forma polar**:

$$r_\alpha = 5_{36{,}9^\circ}$$



Observa que: $\mathbf{a = r \cdot \cos\alpha}$ y $\mathbf{b = r \cdot sen\,\alpha}$, así se puede expresar **z** en forma **trigonométrica**, a la vez que sirve para pasar de la forma polar a la forma binómica.

$$z = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) = 5(\cos 36{,}9^\circ + i\ \mathrm{sen}\ 36{,}9^\circ)$$

Ejercicio 7

a) Pasa a forma binómica: $7_{45^\circ} =$ ___ + ___

Introduce los valores con su signo redondeados a centésimas

comprobar

b) El conjugado del número complejo 2_{75° *es:* ___ ___ °

comprobar

2.2 Multiplicação e divisão de complexos na forma trigonométrica

A relação entre a forma trigonométrica de dois números complexos e a de seu produto e quociente permite-nos multiplicar e dividir com muita facilidade.

Se expressarmos os complexos na forma trigonométrica e operarmos:

$$r_\alpha = r(cos\ \alpha + isen\ \alpha) \qquad r'_\beta = r'(cos\ \beta + isen\ \beta)$$

O **produto**:

$$\begin{gathered} r(cos\ \alpha + isen\ \alpha) \cdot r'(cos\ \beta + isen\ \beta) = \\ r \cdot r' \cdot [(cos\ \alpha \cdot cos\ \beta - sen\ \alpha \cdot sen\ \beta) + (cos\ \alpha \cdot sen\ \beta + sen\ \alpha \cdot cos\ \beta)i] = \\ r \cdot r' \cdot (cos(\alpha + \beta) + isen(\alpha + \beta)) \end{gathered}$$

Observamos que o módulo do número complexo resultante é o produto dos módulos dos fatores e o argumento **a soma dos argumentos**.

O **quociente**:

$$\begin{gathered} \frac{r(cos\ \alpha + isen\ \alpha)}{r'(cos\ \beta + isen\ \beta)} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{(cos\ \alpha + isen\ \alpha) \cdot (cos\ \beta - isen\ \beta)}{(cos\ \beta + isen\ \beta) \cdot (cos\ \beta - isen\ \beta)} = \\ \frac{r}{r'} \cdot \frac{(cos\ \alpha \cdot cos\ \beta + sen\ \alpha \cdot cos\ \beta) + (sen\ \alpha \cdot cos\ \beta - cos\ \alpha \cdot sen\ \beta)i}{cos^2\ \alpha + sen^2\ \beta} = \\ \frac{r}{r'} \cdot (cos(\alpha - \beta) + isen(\alpha - \beta)) \end{gathered}$$

E o resultado do quociente é um número complexo cujo módulo é o quociente dos módulos e o argumento **a diferença dos argumentos.**.

$$r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

$$\frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha+\beta}$$

Sean los números complejos **z = r_α** y **z' = r'_β**

z = 5 $_{120}$ º z' = 2 $_{90}$ º

- **Producto** dibujar

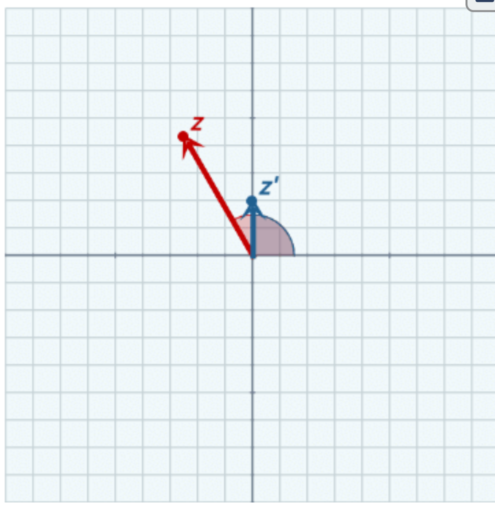
  Para multiplicar dos números complejos en forma polar se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

  $$z \cdot z' = 5_{120^\circ} \cdot 2_{90^\circ} = 10_{210^\circ}$$

- **Cociente** dibujar

  Para dividir dos números complejos en forma polar se dividen los módulos y se restan los argumentos.

  $$\frac{z}{z'} = \frac{5_{120^\circ}}{2_{90^\circ}} = 2{,}5_{30^\circ}$$



Ejercicio 8

a) Dado el número complejo **z = 5_{55°** calcula $z \cdot \bar{z}$ y $z/\bar{z}$

$z \cdot \bar{z} =$ ☐ $_{☐}$ º $z/\bar{z} =$ ☐ $_{☐}$ º ☐

comprobar

b) Averigua dos números complejos tales que su producto sea **75_{205°** y su cociente **3_{35°**

$z_1 =$ ☐ $_{☐}$ º $z_2 =$ ☐ $_{☐}$ º ☐

comprobar

2.3 Potências de complexos na forma trigonométrica

Para calcular una potencia de exponente natural, **n**, de un número complejo expresado en forma polar, basta elevar el módulo a **n** y multiplicar el argumento por **n**.

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\cdot\alpha}$$

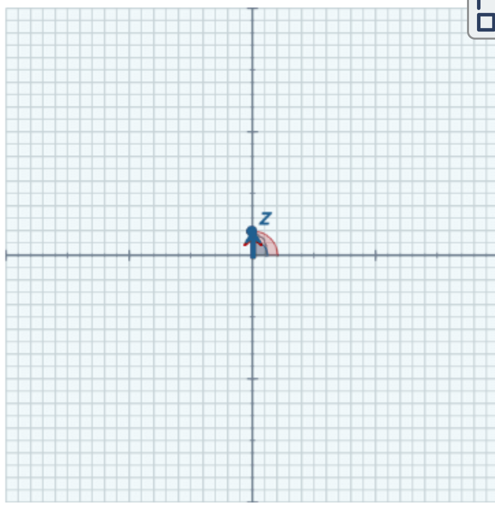
Sea el número complejo: $\mathbf{z} = \mathbf{r}_\alpha$ = 2 90 º

n = 1 $(2_{90})^1 = 2^1{}_{1\cdot 90^\circ} = 2_{90^\circ}$

Se puede expresar $\mathbf{z}^n$ en forma trigonométrica:

$$[r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$$

y haciendo en esta expresión $r = 1$ obtenemos la **fórmula de Moivre**, útil en trigonometría para calcular **sen nα** y **cos nα** a partir de sen α y cos α.



La fórmula de Moivre

$$(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i \operatorname{sen} 2\alpha$$

Desarrollando la potencia por el binomio de Newton resulta:

$$(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, i + \operatorname{sen}^2\alpha\, i^2 =$$
$$= \cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, i - \operatorname{sen}^2\alpha$$

Agrupando términos e igualando la parte real y la parte imaginaria tenemos que:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

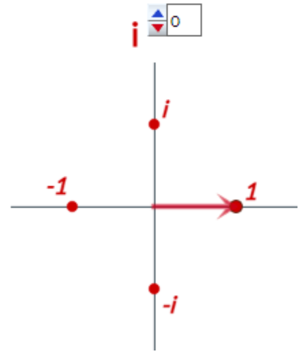
Potências de i

Un caso particular lo encontramos al calcular las potencias sucesivas de i.
Teniendo en cuenta que $i^2 = -1$, será:

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$
$i^4 = i^3 \cdot i = 1$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^5 \cdot i = -1$	$i^7 = i^6 \cdot i = -i$

y asi sucesivamente, con lo que observamos que se repiten de cuatro en cuatro. Luego para hallar una potencia de i, se divide el exponente entre 4 y se calcula la potencia de exponente el resto de la división.

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$



Ejercicio 9

a) Averigua el valor de **n** y de **a** (a>0) para que $(-a\sqrt{3} + ai)^n = 1296_{240°}$

$n =$ ☐ $a =$ ☐

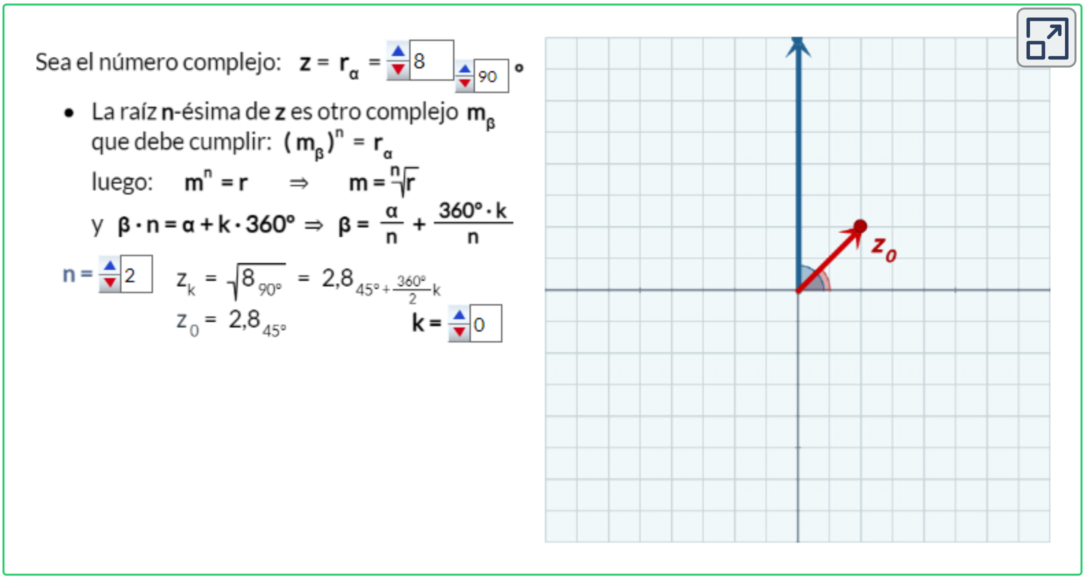
comprobar

b) Selecciona el valor de la potencia de i.

$i^{100} =$ ☐

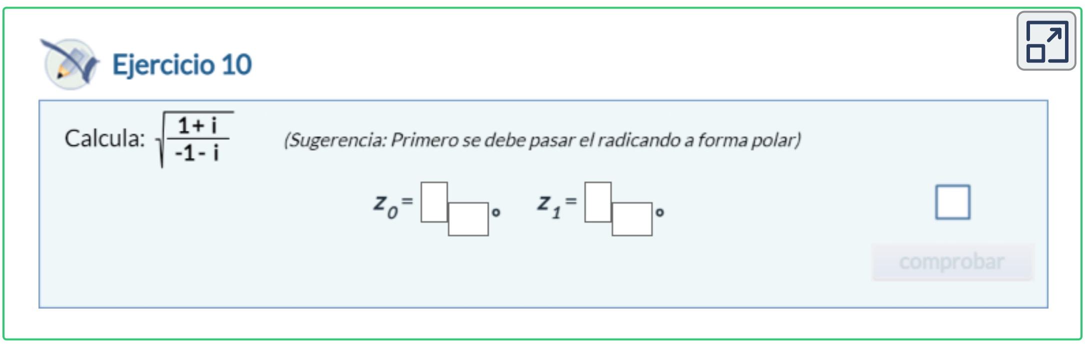
comprobar

2.4 Raízes de números complexos



Observe que:

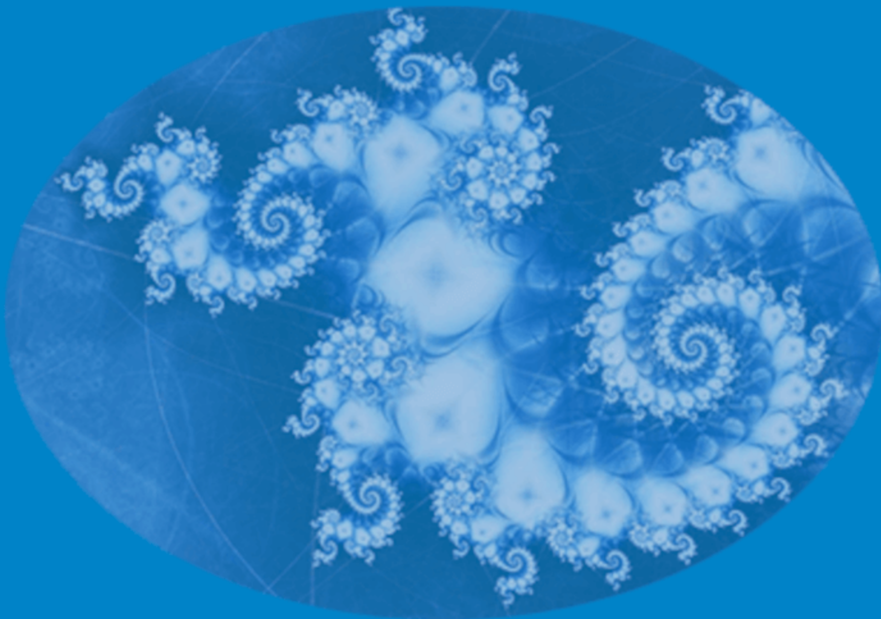
> Todo número complexo tem n-ésimas raízes. Os afixos dessas n raízes estão localizados em um círculo e são os vértices de um polígono regular com n lados.



2.5 Exercícios para praticar

A seguir mais exercícios[4] para praticar as operações com complexos. Podes escolher o tipo no menu. Podes ver depois a solução de cada um.

[4] Adaptação de uma cena de Consolação Ruiz Gil para Red Educativa Digital Descartes.



Capítulo III

Algumas aplicações

3.1 Operações com complexos e transformações geométricas

Translação

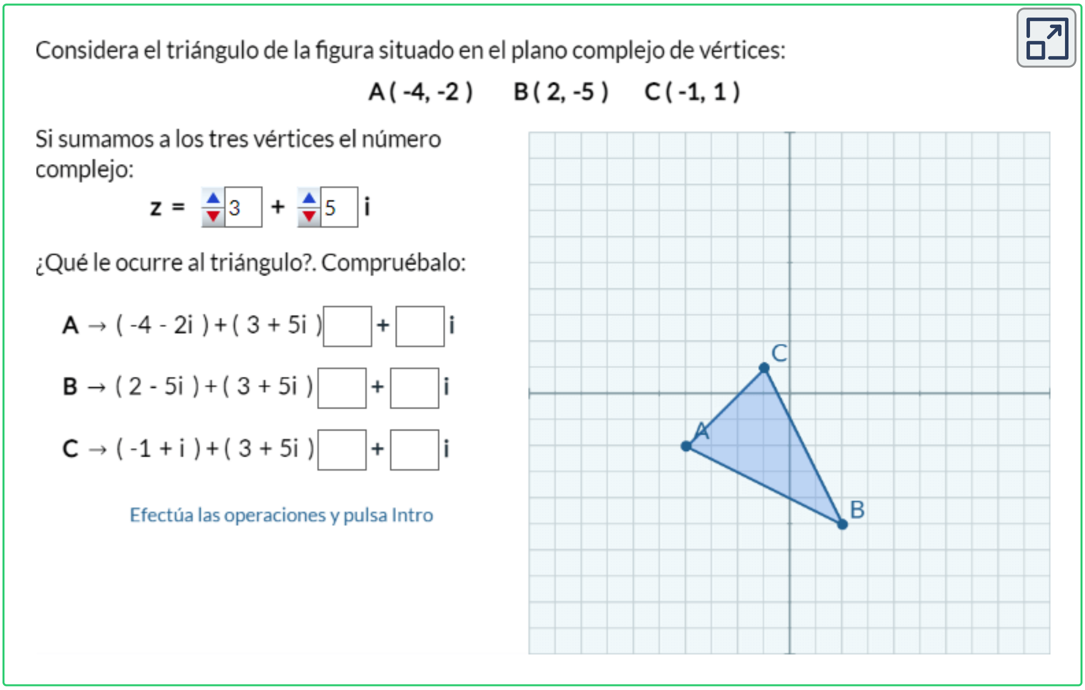
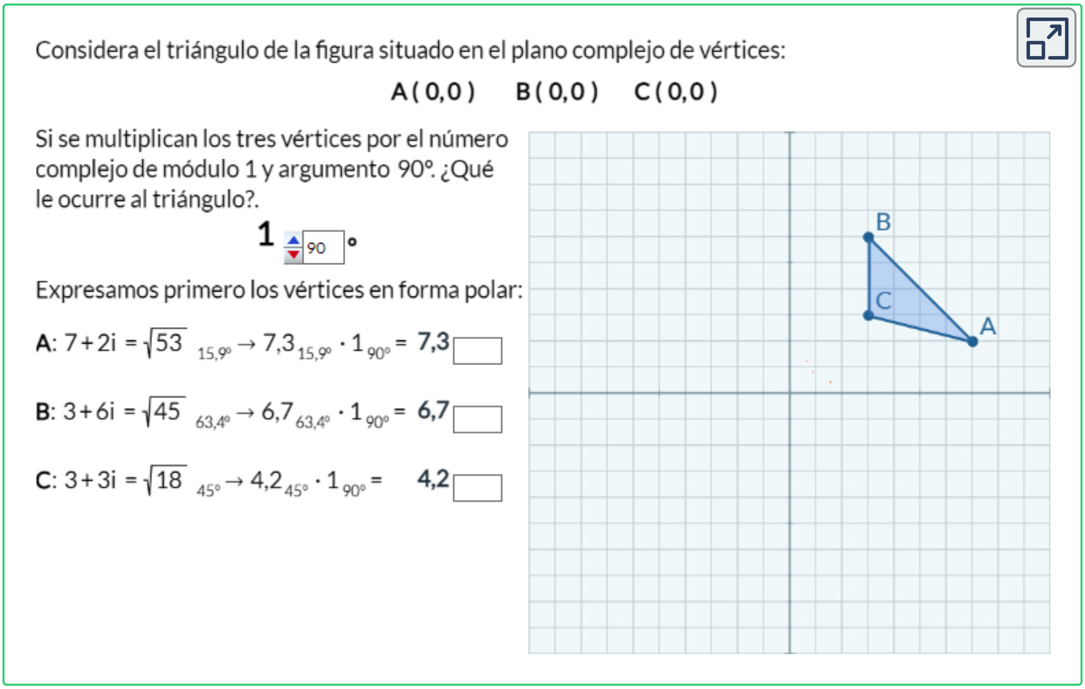


Figura 3.1. Detalhe da obra de M. C. Escher "Bird/Fish", tirado de mcescher.com.

Rotação do centro a origem



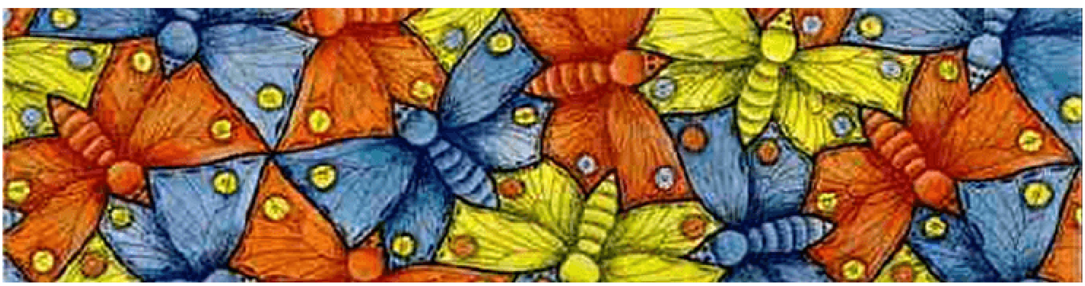


Figura 3.2. Detalhe da obra de M. C. Escher "Butterfly", tirado de mcescher.com.

Homotetia e giro

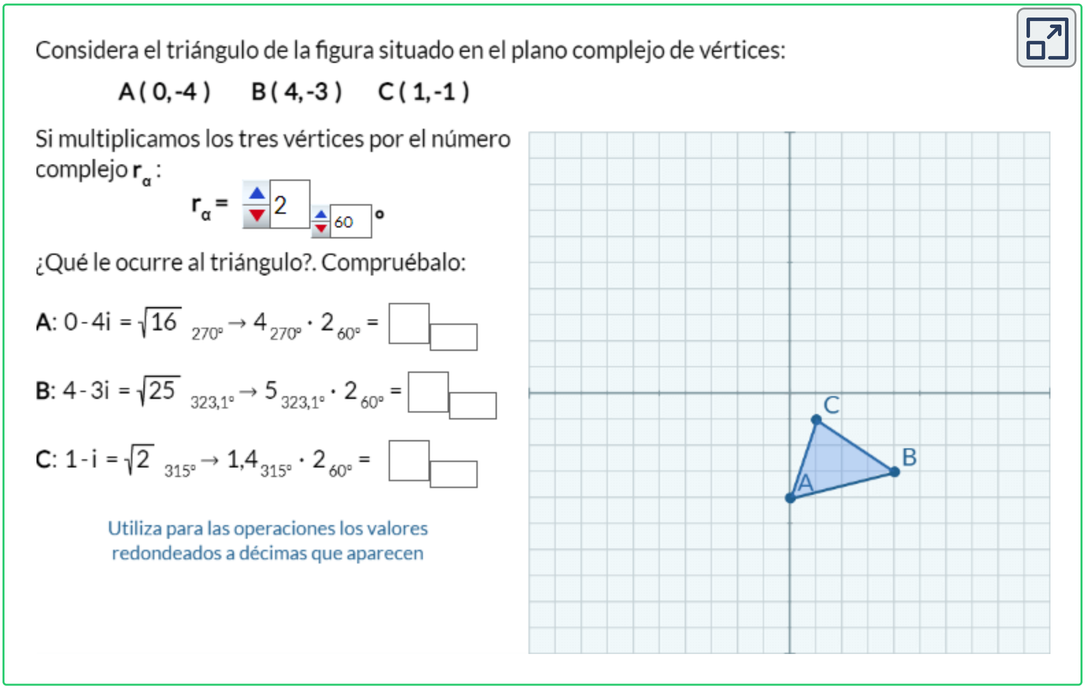
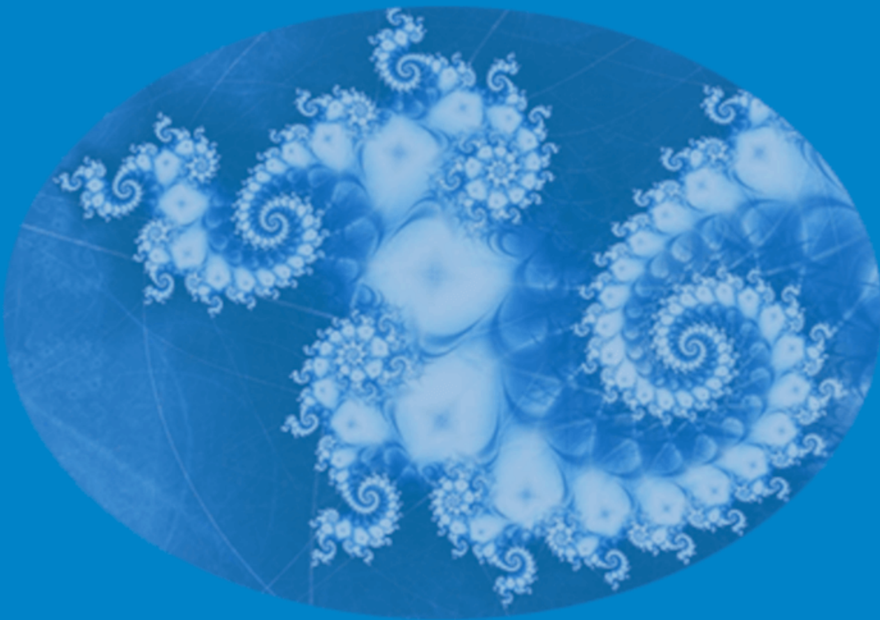


Figura 3.3. Detalhe da obra de M. C. Escher "Smaller and smaller", tirado de mcescher.com.



Autoavaliação

Autoavaliação

DESCARTES
matemáticas interactivas