Capítulo 1
Superficies

1 Superficies de revolución

Definición 1.1. Supongamos el espacio tridimensional $\mathbf{R}^3$ dotado del sistema de coordenadas (x,y,z). Una superficie de *revolución* en este espacio es una superficie generada al rotar una curva plana C alrededor de algún eje que está en el plano de la curva.

Un caso particular es cuando el eje de rotación es alguno de los ejes coordenados y la curva C está sobre alguno de los planos coordenados.

Ejemplo 1.1. Si el eje de rotación es el eje z y la curva plana C está sobre el plano xz con ecuación:

$$z = f(x) \tag{1}$$

tal que f es una función biyectiva definida solo para $x \geq 0$, entonces la ecuación de la superficie Σ de rotación tendrá ecuación:

$$\boxed{z = f(\sqrt{x^2+y^2})} \tag{2}$$

Para deducir la ecuación anterior, tomemos dos puntos A y B sobre la superficie Σ y un tercer punto M sobre el eje z. El punto A es un punto arbitrario de la superficie. Consideremos la circunferencia α que contiene al punto A, tiene centro en el punto M y está sobre el plano $z = z_1$. Esta circunferencia corta el plano xz en el punto B. Por lo tanto las coordenadas de los puntos son: $A(x,y,z_1)$, $B(x,0,z_1)$, $C(0,0,z_1)$. Pero el punto B pertenece a la generatriz C, por lo tanto sus coordenadas las podemos escribir como $B(f^{-1}(z_1),0,z_1)$. Ahora la distancia entre A y M es la misma que entre B y M pues son dos radios de la circunferencia.

$$\left.\begin{cases} A(x,y,z_1) \\ B(f^{-1}(z_1),0,z_1) \\ M(0,0,z_1) \end{cases}\right\} \Longrightarrow |AM| = |BM| \Longrightarrow$$

$$x^2+y^2 = [f^{-1}(z_1)]^2 \Longrightarrow z_1 = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \tag{3}$$

Pero A es arbitrario, por lo tanto $z_1 = z$. Observemos que en la deducción de la fórmula anterior las variables x, y e z se colocan cuando esto se puede en término de la variable fijada z_1, que es la que define el plano $z = z_1$ donde está la circunferencia α.

Ejemplo 1.2. Si el eje de rotación es el eje x y la curva plana C está sobre el plano xz con ecuación:

$$z = f(x) \tag{4}$$

tal que f es una función biyectiva definida solo para $x \geq 0$, entonces la ecuación de la superficie Σ de rotación tendrá ecuación:

$$\boxed{[f(x)]^2 = y^2+z^2} \tag{5}$$

Similarmente como en el ejemplo 1.1, tomamos el plano $x = x_1$, perpendicular al eje de rotación x, y tres puntos sobre este plano que pertenecen a la circunferencia α con centro en $M(x_1,0,0)$ y que contiene los puntos $A(x_1,y,z)$ y $B(x_1,0,z)$. Dado que B pertenece a la curva generatriz C, sus ordenadas son $B(x_1,0,f(x_1))$.

$$\left.\begin{cases} A(x_1,y,z) \\ B(x_1,0,f(x_1)) \\ M(x_1,0,0) \end{cases}\right\} \Longrightarrow |AM| = |BM| \Longrightarrow$$

$$y^2+z^2 = [f(x_1)]^2 \tag{6}$$

La hipótesis que A es arbitrario, completa la demostración.

El CATENOIDE es una superficie de revolución obtenida al rotar sobre el eje x la curva $z = \cosh x$, y la ecuación que la representa es: $y^2+z^2 = \cosh^2 x$. Una parametrización usada para graficarla con el software Maple es: $x = u$, $y = \cosh u \cos v$, $z = \cosh u \sin v$, con valores de los parámetros $-2 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Los ejes coordenados están colocados en forma estándar. (Ver: C.9.3).

El CATENOIDE, superficie de revolución obtenida al girar la curva catenaria $z = \cosh x$, sobre el plano xz, alrededor del eje x.

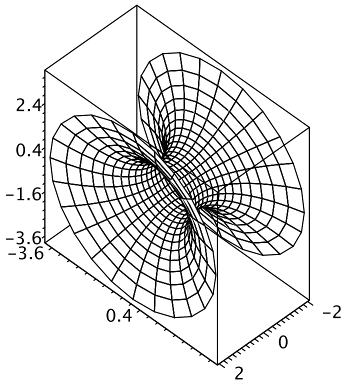

Figura 1 Catenoide

Ejemplo 1.3. Encuentre la ecuación de la superficie al rotar la recta $x = 3y$ alrededor del eje x.

SOLUCIÓN.
Debido a la rotación sobre el eje x las trazas sobre el plano xy (intersecciones de la superficie que debemos hallar con el plano xy ($z = 0$)), deben ser el par de rectas $y = \pm 3x$. Este par de ecuaciones se pueden escribir como una sola ecuación $y^2 = \left(\frac{1}{3}x\right)^2$. Lo cual es equivalente a decir

$$\text{Trazas sobre el plano} xy \Longrightarrow y^2 - \left(\frac{1}{3}x\right)^2 = 0 \tag{7}$$

Esto mismo debe ocurrir sobre el plano xz. Por lo tanto,

$$\text{Trazas sobre el plano} xz \Longrightarrow z^2 - \left(\frac{1}{3}x\right)^2 = 0 \tag{8}$$

Las trazas sobre los planos paralelos al plano yz, es decir intersecciones de la superficie con el plano $x = a = const.$, deben ser circunferencias con radio $y = f(a) = 3a$. Por lo tanto, la superficie es un cono cuya ecuación es:

$$y^2 + z^2 - \left(\frac{1}{3}x\right)^2 = 0 \Longrightarrow 9y^2 + 9z^2 = x^2 \tag{9}$$

$\boxed{\text{R/:} \quad 9y^2 + 9z^2 = x^2}$

2 Superficies Cilíndricas

Definición 1.2. Supongamos el espacio tridimensional $\mathbf{R}^3$ dotado del sistema de coordenadas (x,y,z). Dada una recta ℓ y una curva plana C, una superficie *cilíndrica* en este espacio es una superficie generada por una familia de rectas paralelas a ℓ y que tienen un punto en C.

Un caso particular es cuando la recta ℓ es alguno de los ejes coordenados y la curva C está sobre alguno de los planos coordenados.

Ejemplo 1.4. Consideremos como recta generatriz cualquier recta paralela al eje z y que pasa por la curva $f(x,y)=k$, $k=$ `const.` en el plano xy. El cilindro obtenido no necesariamente es una superficie de revolución, por ejemplo si la curva C es la elipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

La ecuación de la superficie cilíndrica en $\mathbf{R}^3$ en este caso es:

$$\boxed{f(x,y)=k} \tag{10}$$

Un CILINDRO ELÍPTICO RECTO, es una superficie cilíndrica generada por una familia de rectas paralelas a una recta (en este caso eje z) y que pasan por una curva plana C (en este caso la elipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$), ubicada sobre un plano xy. La ecuación que define esta superficie cilíndrica es : $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Observemos que no aparece la variable z, precisamente es el eje paralelo a la recta generatriz.

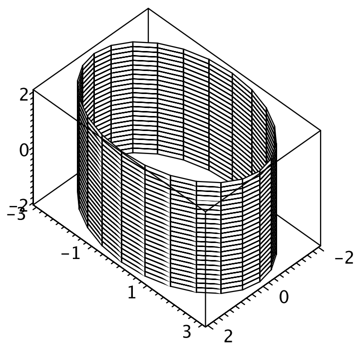

Figura 2 Superficie cilíndrica

Ejemplo 1.5. Consideremos la curva C sobre el plano xz, $z=\sin x$. La superficie cilíndrica generada por la familia de recta paralelas al eje y tiene como ecuación que la representa:

$$z=\sin x \tag{11}$$

Nota 1.1. Si la familia de rectas que generan una superficie cilíndrica son paralelas a uno de los ejes coordenados y la curva plana C está sobre el plano coordenado perpendicular a la familia de rectas, entonces la ecuación de la superficie cilíndrica no tiene la variable del eje. Esto no significa que en general las ecuaciones de las superficies cilíndricas no tengan una o dos variables. Un plano podría ser considerado como una superficie cilíndrica.

Un CILINDRO SINUSOIDAL, es una superficie cilíndrica generada por una familia de rectas paralelas a una recta (en este caso eje y) y que pasan por una curva plana C (en este caso la elipse $z = \sin x$), ubicada sobre un plano xz. La ecuación que define esta superficie cilíndrica es : $z = \sin x$. Observemos que no aparece la variable x, precisamente es el eje paralelo a la recta generatriz.

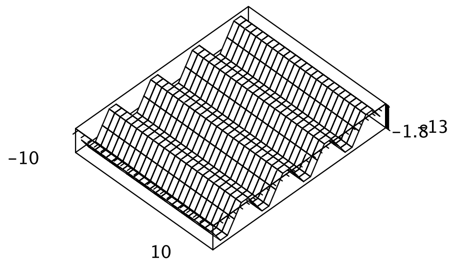

Figura 3 Superficie cilíndrica

3 Superficies Cuádricas

Definición 1.3. Supongamos el espacio tridimensional $\mathbf{R}^3$ dotado del sistema de coordenadas (x,y,z). Una superficie *cuádrica* en este espacio es una superficie asociada a una ecuación de segundo grado en las variables x, y, y z, es decir una superficie cuádrica tiene como ecuación que la representa una ecuación del tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \qquad (12)$$

Las formas canónicas de las cuádricas es la simplificación al máximo de la ecuación 12 usando rotaciones y traslaciones apropiadas para llevarlas a uno de los siguientes seis tipos:

Un *paraboloide elíptico* es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{13}$$

donde a, b, c son números reales diferentes de cero. En el caso que $a = b$ se llama un paraboloide circular y es además una superficie de revolución. La orientación del paraboloide elíptico depende del valor de c, si $c > 0$ es orientada hacia arriba, y si $c < 0$ hacia abajo.

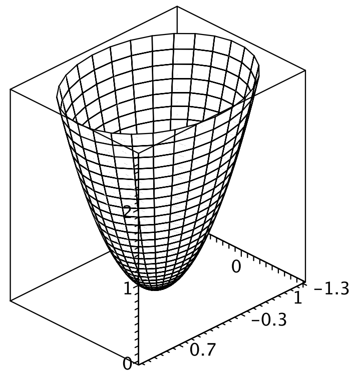

Figura 4 Paraboloide elíptico
$a \neq b, \quad c = 1$

Un *paraboloide hiperbólico*, o comúnmente llamada una *silla de montar*, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{14}$$

donde a, b, c son números reales diferentes de cero.

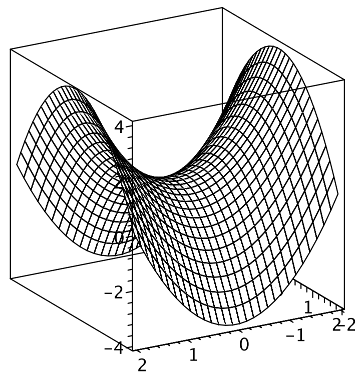

Figura 5 Paraboloide hiperbólico
$a = b, c = 1$

Un *hiperboloide elíptico de un solo manto*, o comúnmente llamada un *hiperboloide de una hoja*, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{15}$$

donde a,b,c son números reales diferentes de cero.

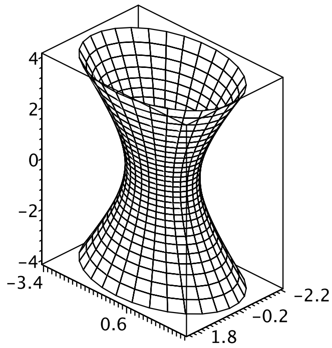

Figura 6 Hiperboloide elíptico de un manto

Un *hiperboloide elíptico de dos mantos*, o comúnmente llamada un *hiperboloide de dos hojas*, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{16}$$

donde a,b,c son números reales diferentes de cero.

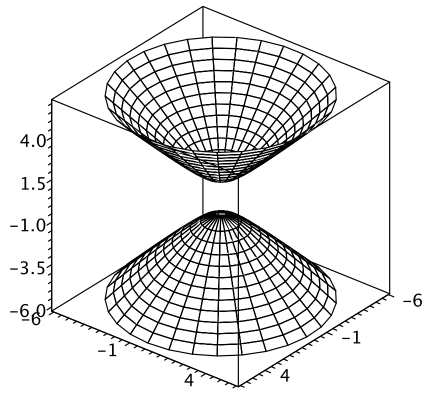

Figura 7 Hiperboloide elíptico de dos mantos

Un *elipsoide*, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{17}$$

donde a, b, c son números reales diferentes de cero. En el caso que $a = b$ es una superficie de revolución y si $a = b = c = R$, entonces tendremos una esfera de radio R.

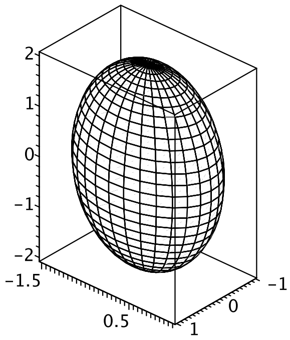

Figura 8 Elipsoide

Un *cono*, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{18}$$

donde a, b, c son números reales diferentes de cero. En el caso que $a = b$ es una superficie de revolución.

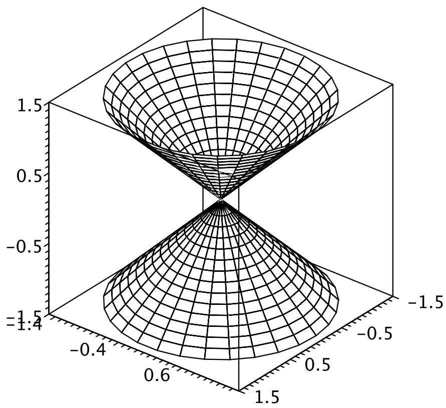

Figura 9 Cono

4 Planos

Definición 1.4. Supongamos el espacio tridimensional $\mathbf{R}^3$ dotado del sistema de coordenadas (x, y, z). Un *plano* en este espacio es una superficie asociada a una ecuación de primer grado en las variables x, y, y z, es decir un plano tiene como ecuación que lo representa una ecuación del tipo:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{19}$$

donde A, B y C son números reales no simultáneamente iguales a cero.

Nota 1.2. Un vector normal al plano (19) es $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$.

Expresiones equivalentes

La ecuación dada en la definición 4 se le conoce con el nombre de ecuación lineal del plano. Otra expresión para un plano llamada ecuación vectorial. Necesitamos solamente un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ por donde pasa el plano α y un vector normal (perpendicular) al plano $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$. Si tomamos cualquier otro punto $M(x, y, z)$ sobre el plano α se satisface la siguiente ecuación vectorial:

$$\mathbf{PM} \cdot \mathbf{n} = 0 \Longrightarrow (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (A, B, C) = 0 \tag{20}$$

Haciendo las operaciones indicadas en esta ecuación y simplificando tenemos,

$$Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0 \tag{21}$$

Pero $P \in \alpha$, es decir $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$, lo cual muestra, bajo la hipótesis que $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es un vector normal, que las expresiones dadas en la ecuación lineal (19) y la ecuación vectorial (20) son equivalentes.

Ejemplo 1.6. Graficar en el primer octante (Ver (A.2.1) en la página 8) el plano cuya ecuación es,

$$x + y + z = 1 \tag{22}$$

Encuentre tres puntos no colineales sobre él y muestre que efectivamente el vector $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ es un vector normal al plano dado.

Dada una ecuación lineal en tres variables, tenemos dos grados de libertad, por lo tanto encontrar tres puntos no colineales es dar valores por ejemplo a x e y y encontrar z que satisfagan la ecuación. Luego verificar que los dos vectores formados con estos tres puntos no son uno múltiplo del otro. Por ejemplo $P_1(0,0,1)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(1,0,0)$. Ahora el producto vectorial

$$\mathbf{P_3P_1} \times \mathbf{P_3P_2} = (-1,-1,-1) \tag{23}$$

Efectivamente $\mathbf{n}$ y $\mathbf{P_3P_1} \times \mathbf{P_3P_2}$ son paralelos y por tanto $\mathbf{n}$ es un vector normal.

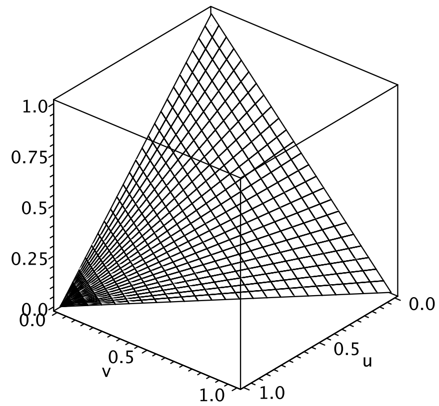

Figura 10 Plano $x+y+z=1$

Ejemplo 1.7. Dados los puntos $A(-1,2,0)$, $B(6,0,1)$ y $C(0,3,1)$. Encuentre la ecuación del plano α que los contiene.

SOLUCIÓN.

$$\mathbf{u} = \mathbf{AB} = (7,-2,1); \mathbf{v} = \mathbf{AC} = (1,1,1) \tag{24}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-3,-6,9) \Longrightarrow x+2y-3z=3 \tag{25}$$

$\boxed{\text{R/:} \quad x+2y-3z=3}$

5 Parametrización

Definición 1.5. Una superficie en el espacio tridimensional $\mathbf{R}^3$ dotado de un sistema coordenado ortogonal es un objeto geométrico de dos dimensiones. Dar una *parametrización* a una superficie Σ es definir una función Φ que la represente. En otras palabras es expresar las variables x, y y z que definen cada punto sobre la superficie en términos de dos nuevas variables u y v llamadas parámetros.

La función Φ tiene como dominio algún subconjunto A del plano y su imagen estará en el espacio tridimensional.

$$\begin{aligned} \Phi : A \subset \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{aligned} \tag{26}$$

También se pueden dar las expresiones de las funciones coordenadas de la función Φ sin necesidad de expresar ésta, es decir,

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \tag{27}$$

Existen superficies para las cuales es fácil encontrar una parametrización, mientras que hay otras para las cuales esta tarea más trabajo. Daremos algunas pautas y algunos ejemplos que pueden seguirse para parametrizar una superficie.

Parametrización de Monge

Si de antemano conocemos la ecuación cartesiana de la superficie y está está dada en forma explícita por,

$$z = f(x,y) \tag{28}$$

podemos definir la siguiente parametrización conocida como *parametrizaci ón* de *Monge* mediante la siguiente función,

$$\Phi(u,v) = (u,v,f(u,v)), \quad \text{es decir,} \quad \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases} \tag{29}$$

Ejemplo 1.8. Consideremos el paraboloide elíptico definido por

$$z = x^2 + y^2 \tag{30}$$

El paraboloide elíptico dado que a su vez es una superficie cuádrica y una superficie de revolución se puede parametrizar, usando la parametrización de Monge por,

$$\Phi(u,v) = (u,v,u^2 + v^2) \tag{31}$$

Otra parametrización, la cual ya no es de tipo Monge, es

$$\begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = v^2 \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbf{R}^2 \tag{32}$$

Por qué las ecuaciones (32) son también una parametrización de la superficie (30)?.

Las ecuaciones paramétricas (32) son tres mientras que la ecuación cartesiana (30) es solo una. Las ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana que definen una misma superficie están relacionadas de la siguiente manera: Al sustituir las ecuaciones paramétricas (32)(funciones x y y z en términos de los parámetros) en la ecuación cartesiana (30) y simplificar la expresión obtenida se deben eliminar los dos parámetros u y v.

Ejemplo 1.9. Consideremos ahora el hemisferio superior de una esfera de radio 2 con centro en el origen. La ecuación cartesiana que la define es:

$$x^2+y^2+z^2=4, \quad z\geq 0 \tag{33}$$

Demos dos parametrizaciones diferentes de esta superficie.

1. Usando parametrizaciones tipo Monge, podemos parametrizarlo como,

$$\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=\sqrt{4-u^2-v^2} \quad (u,v)\in A \end{cases} \tag{34}$$

   El dominio de la parametrización, el cual <u>no podemos olvidar</u>, se puede definir como,

$$A=\left\{(u,v)\in \mathbf{R}^2 \mid -2\leq u\leq 2, -\sqrt{4-u^2}\leq v\sqrt{4-u^2}\right\} \tag{35}$$

$$A=\left\{(u,v)\in \mathbf{R}^2 \mid u^2+v^2\leq 4\right\} \tag{36}$$

2. Usando coordenadas es esféricas (Ver Apéndice A.2.3, página 11)

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \tag{37}$$

   podemos parametrizar una esfera de radio 2 como,

$$\begin{cases} x=2\sin v\cos u \\ y=2\sin v\sin u \\ z=2\cos v \end{cases} \tag{38}$$

   Donde hemos sustituido la variable ρ de las coordenadas esféricas por el radio de la esfera, el cual es constante $\rho=2$. La variable θ la hemos tomado como el parámetro u. La variable φ la hemos tomado como el otro parámetro $\varphi=v$. Si u es constante y v variable, la línea sobre la esfera será un "meridiano". , y representará la "longitud". Si $\varphi=v$ es constante y u es variable, la línea sobre la esfera representará la "latitud". El conjunto A, dominio de la parametrización, es,

$$A = \left\{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\right\} \tag{39}$$

Nota 1.3. 1. En general una parametrización no es más que una deformación de una parte del plano, del dominio A, en el espacio tridimensional. La superficie es el resultado de esta deformación. En el ejemplo (1.9) el primer caso tenemos que la parametrización (34) es una deformación del disco (35) en el plano en el hemisferio y en el segundo caso la parametrización (38) es la deformación del rectángulo (39) en el mismo hemisferio norte de la esfera.

2. Las superficies en general se pueden clasificar dependiendo de alguna restricción que coloquemos, según lo que queremos estudiar. Las parametrizaciones nos sirva para encontrar objetos geométricos propios de la superficie tales como su vector normal, vectores tangentes, planos tangentes, curvatura etc., que definiremos más adelante.
3. Existen casos en los cuales una superficie a pesar que satisface las condiciones para serlo no lo es. En tal caso diremos que la superficie es una superficie *degenerada*. Por ejemplo, la superficie de revolución que se obtiene al girar una recta al rededor de ella misma no es na superficie como tal, es la misma recta. La superficie cuádrica cuya ecuación es $x^2+y^2+z^2=0$ es el punto situado en el origen del sistema. La superficie cuádrica cuya ecuación es $x^2+y^2+z^2+1=0$ no tiene representación real. Como estos hay otros más.
4. Finalmente para graficar una superficie debemos tener más herramientas que las tratadas en este capítulo. Podemos recordar las superficies tratadas aquí y en caso de ser necesario y tener el software Maple disponible se puede consultar el apéndice C de la página 21.

6 Ejercicios Capítulo 1

1.1. Halle la ecuación que representa la superficie que se obtiene al rotar $z=x^2$, en el primer cuadrante del plano xz, alrededor del eje z.

1.2. Halle la ecuación que representa la superficie que se obtiene al rotar $z=y+1$, en el segundo octante del plano yz, alrededor el eje z.

1.3. Halle la ecuación que representa la superficie que se obtiene al rotar $z=1-x^2$, en el tercer octante del plano xz, alrededor el eje x.

1.4. Halle la ecuación que representa la superficie que se obtiene al rotar $z=\sinh y$, en el segundo octante del plano yz, alrededor el eje y.

1.5. La circunferencia $(x-3)^2+y^2=1$ sobre el plano xy, gira alrededor del eje z. Halle la ecuación que representa la superficie de revolución resultante y haga un bosquejo del dibujo.

1.6. Considere el prisma on vértices en los puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,2,0)$, y $D(1,1,3)$. Halle

1. La ecuación del plano que contiene los puntos A, B, y D.
2. El área del triángulo $\triangle ABD$.
3. La distancia del punto C al plano que contiene los puntos A, B, y D.
4. El volumen del prisma usando el triple producto mixto.
5. El volumen del prisma usando la fórmula de volumen de un prisma.

1.7. Considere un tetraedro regular (figura de 4 caras, cada una de ellas un triángulo equilátero) con su centro en el origen, inscrito en la esfera $x^2+y^2+z^2=1$, con uno de sus vértices sobre el eje x y con un lado sobre el plano xy (primer cuadrante). Halle:

1. La ecuación del plano que contiene la cara ubicada en el primer octante.
2. El ángulo entre dos de su lados consecutivos con vértice común.
3. El área de una de sus caras.
4. El volumen.
5. El volumen fuera del prisma que está dentro de la esfera.

1.8. Considere la parábola $y = 4 - x^2$ sobre el plano xy y la recta ℓ tangente a ella en el punto cuya abscisa es $x = 1$. Halle:

1. La ecuación del paraboloide al girar la parábola alrededor del eje y.
2. La ecuación del cono al girar la recta ℓ alrededor del eje y.
3. El volumen acotado por el cono y el plano xy en el primer octante.

1.9. Para cada una de las seis superfices cuádricas en su forma estándar encuentre una parametrización. No olvide el dominio de la parametrización.

1.10. Muestre que el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ se puede escribir como $z = axy$. Escriba todos los detalles de su demostración y halle el valor se a.

1.11. Hallar la ecuación cartesiana del plano generado por $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, y $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

1.12. En la figura dada el círculo está fijo y tiene radio a, y para cada θ, el punto P es el punto medio del segmento QR, $0 < \theta < \pi$. Hallar las ecuaciones paramétricas de la curva.

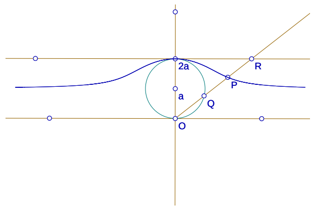

Figura 11 Bruja de Agnesi

1.13. La parábola $z = 4y^2$, se rota alrededor del eje z. Escribir la ecuación de la superficie resultante en coordenadas cilíndricas.

1.14. Describir la superficie que en coordenadas esféricas está dada por $\rho = \cos(2\theta)$.