

**SUMA** 30

febrero 1999, pp. 103-109

## **Trazado de curvas ilustres. Una propuesta con CABRI II**

**Agustín Carrillo de Albornoz Torres  
Inmaculada Llamas Centeno**

**D**ESDE HACE AÑOS se habla de la incorporación de las nuevas tecnologías al ámbito educativo, sin que los resultados obtenidos hayan estado en consonancia con la importancia atribuida y con las expectativas que sobre el papel ofrecían para modificar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Calculadoras, vídeo, ordenador y, ahora, también internet y multimedia han entrado en el aula de forma muy diversa y con planteamientos muy variados, encontrando excesivas dificultades, sólo superadas por las iniciativas de los docentes y por el interés que en los alumnos despertaban.

Estos desencantos también han alcanzado a las matemáticas, área que parecía estrechamente ligada con estas tecnologías, que en poco o en casi nada han modificado la metodología y los planteamientos empleados en el aula.

En la utilización de las denominadas nuevas tecnologías, de las que la escuela no puede quedar al margen, pero de las que tampoco podrá esperar que sirvan para solucionar los problemas que la Educación plantea, se deberán evaluar y aprovechar las ventajas y posibilidades que ofrecen, considerándolas como un recurso más a disposición del profesor y del alumno.

Capacidad gráfica, realización de tareas mecánicas, rapidez, facilidad para modificar y obtener nuevos resultados son cualidades a tener en cuenta para fomentar su utilización del ordenador como material de ayuda y de consulta en el trabajo de clase.

Poco a poco han aparecido programas que pueden resultar muy válidos para tratar distintos elementos del currículo y con los que es conveniente familiarizar al alumnado y al profesorado. Será necesario adaptar los contenidos y la metodología para incorporar distintos programas como los de cálculo simbólico, de estadística o de construcción

Después de una breve introducción donde se exponen algunas ideas sobre lo que han supuesto las nuevas tecnologías en la enseñanza y de cómo creen los autores que deben utilizarse en el aula, se muestra una propuesta para tratar distintos lugares geométricos con ayuda del ordenador.

Utilizando el programa CABRI II se propone el estudio y la construcción de ciertas curvas como son los óvalos de Cassini, el caracol de Pascal, la nefroide y la cicloide dibujadas a partir de su definición como lugares geométricos que se completan con otros métodos de construcción utilizando envolventes.

Se intenta ofrecer una visión de las posibilidades del ordenador para facilitar su incorporación al aula, como material a disposición del profesor y del alumno.

**IDEAS  
Y  
RECURSOS**

nes geométricas, entre otros, de la misma manera que en otras ocasiones se utilizan geoplanos, mosaicos, poliedros u otros materiales tan útiles en el aula como lo es el libro de texto.

Las actividades, que exponemos a continuación, están basadas en el empleo de un programa de trazado geométrico como recurso para el estudio y construcción de varias curvas «ilustres» como una actividad más de ayuda en el desarrollo de los contenidos de geometría, aplicables tanto en Educación Secundaria Obligatoria como en las matemáticas del Bachillerato.

La utilización de un programa de este tipo permite abordar la geometría a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, facilitando la realización de construcciones geométricas para deducir resultados a partir de la observación directa frente a la deducción abstracta empleada en numerosas ocasiones.

Para realizar las siguientes actividades hemos utilizado CABRI-GÉOMÈTRE en su versión II, aunque, evidentemente, servirá cualquier otro de características similares.

La facilidad de aprendizaje y la sencillez para diseñar y construir ayudarán en la resolución de las distintas actividades planteadas que tan sólo intentan mostrar algunas de las posibilidades que ofrecen estos programas que, utilizados de manera adecuada, serán muy útiles tanto para el profesor como para el alumno.

De cada una de las curvas estudiadas: óvalos de Cassini, caracol de Pascal, nefroide y cicloide, exponemos métodos de construcción basados en la propia definición de la curva como lugar geométrico y, en ocasiones, también a través de envolventes.

Aunque una vez conocida la expresión de una curva, bastará con representarla con un programa adecuado como DERIVE, MATHEMATICA, etc., estudiando a continuación sus propiedades, preferimos aprovechar las posibilidades que CABRI ofrece para simular movimiento a través de la opción Animación o para dibujar directamente el lugar geométrico seleccionado la correspondiente opción, aproximando su construcción al método que, en su día, generó su estudio y descubrimiento.

Deseamos recordar que algunas de las curvas expuestas llevan el nombre o fueron estudiadas por Giovanni Cassini y por Christian Huygens, en cuyo recuerdo se ha bautizado la misión espacial que recientemente ha partido hacia Saturno.

## Óvalos de Cassini

Engloban un conjunto de curvas definidas como el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que el produc-

*... algunas  
de las curvas  
expuestas llevan  
el nombre o  
fueron estudiadas  
por Giovanni  
Cassini  
y por Christian  
Huygens,  
en cuyo recuerdo  
se ha bautizado  
la misión espacial  
que recientemente  
ha partido hacia  
Saturno.*

tos de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante.

Si representamos la constante por  $b^2$ , el lugar geométrico se puede expresar mediante la igualdad

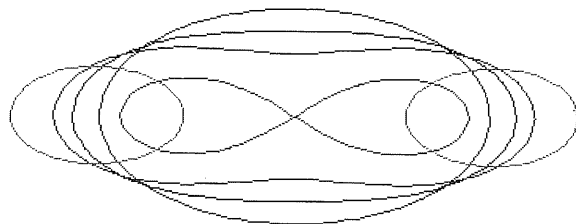
$$PF \cdot PF' = b^2$$

en la que  $F$  y  $F'$  representan a los focos, tales que  $FF' = 2a$ .

La relación entre los valores  $a$  y  $b$  determina el tipo de curva que se obtendrá.

- Si  $b > a$ , la curva será un óvalo que no se corta a sí mismo.
- Si  $b = a$ , aparecerá la lemniscata de Bernoulli.
- Si  $b < a$ , representará dos óvalos separados.

Algunos óvalos de esta familia aparecen en la figura 1.



Óvalos de Cassini

Figura 1

Para calcular la ecuación en coordenadas cartesianas de esta familia de curvas bastará con aplicar la expresión de la distancia entre dos puntos en la definición de los óvalos, obtendremos

$$\left[ (x-a)^2 + y^2 \right] \left[ (x+a)^2 + y^2 \right] = b^4$$

que, en coordenadas polares, será

$$r^4 + a^4 - 2r^2a^2 \cos 2\theta = b^4$$

Estas curvas fueron estudiadas en 1680 por el astrónomo y matemático francés Jean Dominique Cassini (1625-1712), del que cabe destacar su contribución en el descubrimiento de satélites de los planetas Júpiter y Saturno, y al que en 1672 se le nombró astrónomo real y primer director del Observatorio de París.

Los trabajos de Cassini sobre los óvalos que llevan su nombre se publicaron en 1749 por su hijo en el libro *Elements d'astronomie*.

Para construir los óvalos de Cassini utilizando CABRI, se deben realizar los pasos siguientes:

- Dibujar una circunferencia cuyo diámetro sea la distancia focal  $FF'$ .
- Una vez fijado el eje mayor  $AB$ , señalar un punto  $P$  en la circunferencia.
- Trazar desde el vértice  $A$  la semirrecta que pasa por  $P$  y que cortará a la circunferencia en el punto  $Q$ .
- Con centros en el foco  $F$  y en  $F'$  dibujar dos circunferencias de radios  $AQ$  y  $AP$ , respectivamente.

Los puntos de intersección  $M$  y  $N$  de estas dos circunferencias serán puntos de la curva.

Una vez activada la traza de los puntos  $M$  y  $N$ , aplicamos movimiento al punto  $P$  a través de la opción *Animación* para obtener la representación de la curva, que podemos observar en la figura 2.

Recordemos que, como alternativa a las opciones *Traza* y *Animación*, se podrá utilizar la opción *Lugar Geométrico* para obtener el lugar representado por los puntos  $M$  y  $N$  cuando el punto  $P$  recorre la circunferencia.

Cuando se utiliza esta última opción, una vez dibujada la curva, podremos desplazar un foco sobre el eje para obtener los distintos tipos de óvalos.

## Caracol de Pascal

Se puede definir como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a los puntos de una circunferencia es una constante, estando la distancia medida en las cuerdas trazadas desde un punto fijo de la propia circunferencia.

Al trazar una cuerda con origen en el punto  $A$  de una circunferencia, la cortará en otro punto que representamos

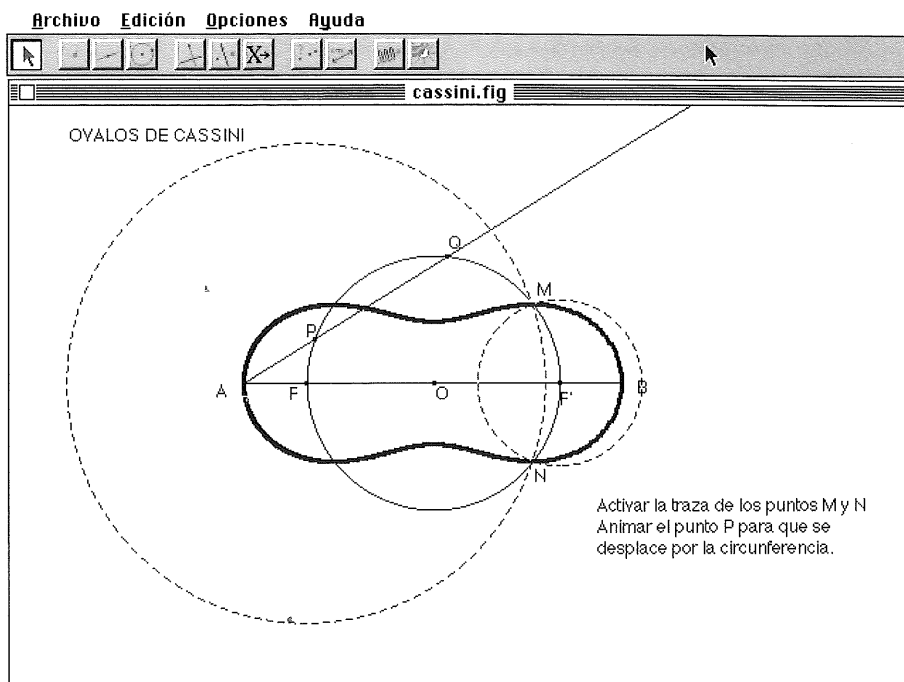


Figura 2

*El caracol recibe  
su nombre  
de Etienne Pascal  
(1588-1651)  
padre  
de Blaise Pascal,  
aunque también  
fue estudiada por  
Gilles Personne  
de Roberval  
(1602-1675).*

por  $M$ . Los puntos  $P$  y  $Q$  de la semirrecta  $AM$  que cumplen la condición

$$PM = QM = b$$

pertenecen al caracol de Pascal, siendo  $b$  la constante.

La expresión en coordenadas cartesianas de esta curva es

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$$

siendo  $a$  el radio de la circunferencia y  $b$  la constante que determina la distancia de los puntos.

En coordenadas polares el caracol se expresa por la igualdad:

$$r = b + a \cos \theta$$

Al igual que ocurre con los óvalos de Cassini, las expresiones anteriores determinan una familia de curvas, ya que según la relación existente entre los valores  $a$  y  $b$  obtendremos distintas curvas, algunas con denominación propia.

Así cuando  $b = 2a$ , aparece una *cardioide* y para  $b = a$  se obtiene la curva denominada *trisectriz*.

El caracol recibe su nombre de Etienne Pascal (1588-1651) padre de Blaise Pascal, aunque también fue estudiada por Gilles Personne de Roberval (1602-1675).

Para realizar la construcción, según la propia definición, realizaremos las operaciones siguientes:

- Sobre una circunferencia fijar el punto A y un punto M que se desplazará sobre ella.
- Trazar la semirrecta AM.
- Una vez fijado el valor de b, dibujar una circunferencia con centro en M y radio b.
- Señalar los puntos P y Q de intersección de esta circunferencia con la semirrecta AM, que determinan el caracol de Pascal.

Al activar la traza de los puntos P y Q representados en la figura 3, y aplicar a continuación animación sobre el punto M obtendremos la representación de la curva.

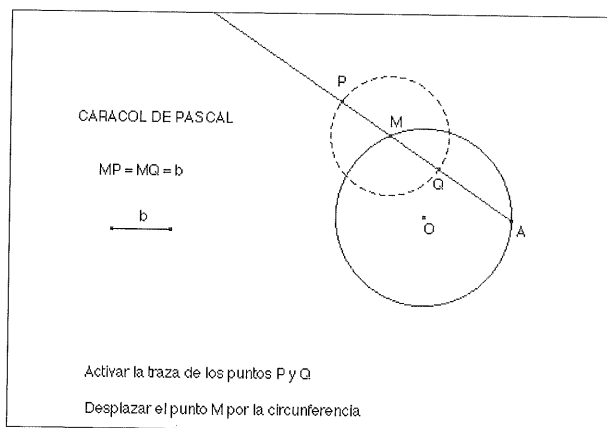


Figura 3

Otro procedimiento para obtener esta curva consiste en fijar un punto A en el plano y un punto M en una circunferencia, trazar la circunferencia con centro en M y radio AM y construir el lugar geométrico descrito por esta circunferencia cuando M recorre la circunferencia inicial (Figura 4).

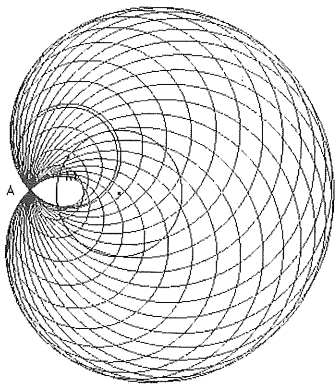


Figura 4

Cambiando la posición del punto A, observaremos los efectos que produce en el lugar geométrico, obteniendo como caso particular la cardioide cuando el punto A está en la circunferencia.

El caracol de Pascal también se puede obtener como la curva podaria de una circunferencia con respecto a un punto del plano.

Partiendo de una situación análoga a la anterior, un punto M de una circunferencia y un punto exterior A, trazamos la perpendicular por el punto A a la recta tangente a la circunferencia en el punto M. El punto P, intersección de las dos rectas, es un punto de la curva que se completará al mover el punto M en la circunferencia. (Figura 5).

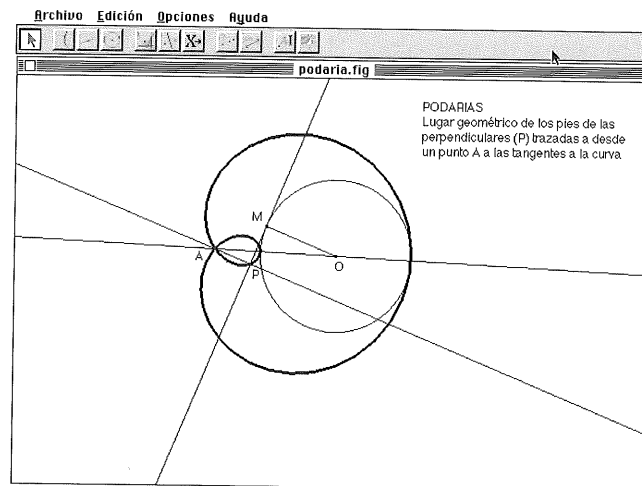


Figura 5

Evidentemente, cuando el punto A también es de la circunferencia, aparecerá la cardioide representada en la figura 6.

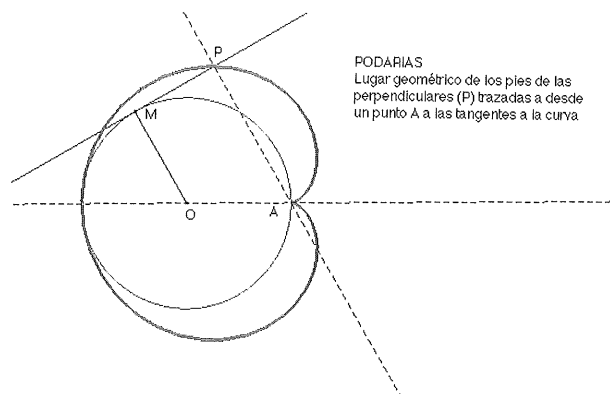


Figura 6

## Nefroide

Definida como el lugar geométrico descrito por un punto fijo de una circunferencia de radio  $a$  (circunferencia generatriz) que se desplaza, sin resbalar, sobre el exterior de una circunferencia de radio  $2a$  (circunferencia directriz).

La nefroide pertenece a una familia de curvas denominada *epicicloides*, generadas como los lugares geométricos descritos cuando la circunferencias generatriz y directriz tienen radios  $a$  y  $b$ , respectivamente.

La cardioide, citada en el apartado anterior, pertenece a esta familia ya que se puede obtener cuando los radios de las dos circunferencias son iguales.

Para representar en forma paramétrica una nefroide, escribiremos

$$x = a(3\cos t - \cos 3t)$$

$$y = a(3\sin t - \sin 3t)$$

que en coordenadas cartesianas se expresa por

$$(x^2 + y^2 - 4a^2)^3 = 108a^4y^2$$

El nombre de nefroide se lo dio en 1878 el matemático inglés Richard A. Proctor (1837-1888), aunque, su estudio se realizó en 1679 por Christian Huygens (1629-1695), científico holandés cuyos trabajos sobre lentes le sirvieron para descubrir los anillos y un satélite de Saturno. Inventó el reloj de péndulo en 1656 y en 1673 publicó las leyes del péndulo y varios teoremas sobre la fuerza centrífuga.

Para obtener su trazado realizamos los siguientes pasos:

- Trazar una circunferencia  $c$  y marcar un punto  $H$  en  $c$ .
- Dibujar el segmento  $AB$  y un punto  $S$  en él.
- Definir utilizando *Transferencia de medidas*, el punto  $M$  en la circunferencia tal que la distancia del arco  $HM$  sea igual a la del segmento  $AS$ .
- Dibujar la circunferencia tangente a la anterior en el punto  $M$  cuyo radio sea la mitad del radio de la circunferencia  $c$ .

- Señalar en esta nueva circunferencia el punto  $P$  que describirá el lugar geométrico.
- Activar la traza del punto  $P$  y animar el punto  $S$  que se desplazará por el segmento.

Como alternativa al último paso, se podrá utilizar la opción *Lugar Geométrico* para obtener el lugar descrito por el punto  $P$  cuando  $S$  recorre el segmento.

NEFROIDE

Es el lugar descrito por un punto fijo  $P$  de una circunferencia de radio  $r$  que se desliza por el exterior de una circunferencia de radio  $2r$ .

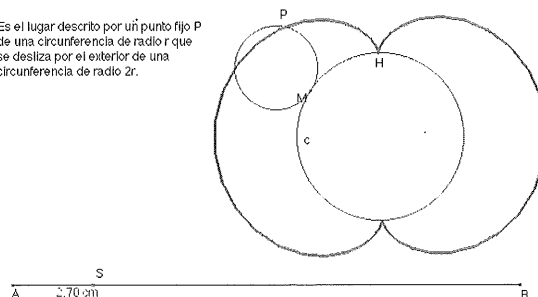


Figura 7

También se puede obtener una nefroide como envolvente de un conjunto de círculos ( $c_1$  y  $c_2$  en la figura 8) tangentes al diámetro  $MN$  de una circunferencia.

NEFROIDE  
Como envolvente de  
circunferencias

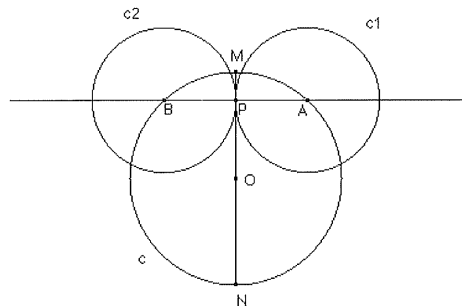


Figura 8

NEFROIDE  
Como envolvente de  
circunferencias

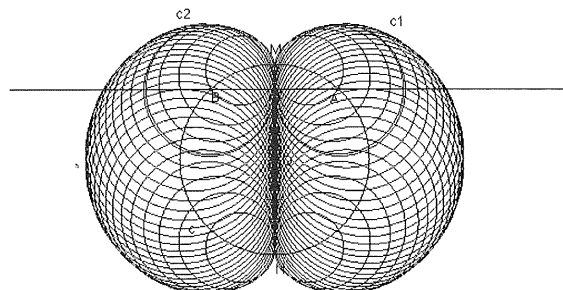


Figura 9

Además, podrá trazarse como envolvente de un diámetro (AB en la figura 10), de una circunferencia que se desliza, sin resbalar, por el exterior de otra circunferencia de igual radio.

NEFROIDE  
como envolvente del  
diámetro AB

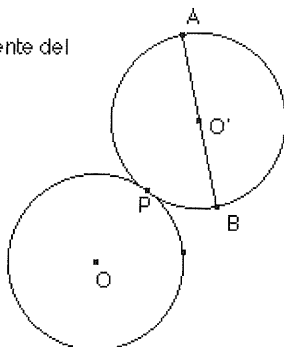


Figura 10

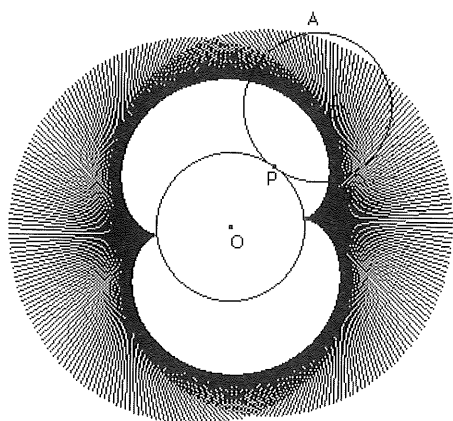


Figura 11

Con similares construcciones dibujaremos circunferencias de radios distintos para obtener nuevas curvas de la familia de epicicloides, así como para determinar que lugar geométrico se dibujará cuando una circunferencia se desliza sobre el interior de otra circunferencia.

## Cicloide

A esta curva se le llamó la «Helena de los geómetras» por las continuas disputas que su estudio ocasionó en el siglo XVII.

Definida por Mersenne (1588-1648) en 1615, aunque conocida anteriormente, como el lugar geométrico que describe un punto fijo de una circunferencia (rueda) que gira sobre una recta (suelo).

*A esta curva [cicloide] se le llamó la «Helena de los geómetras» por las continuas disputas que su estudio ocasionó en el siglo XVII. Definida por Mersenne (1588-1648) en 1615, aunque conocida anteriormente, como el lugar geométrico que describe un punto fijo de una circunferencia (rueda) que gira sobre una recta (suelo).*

El interés por esta curva está basado en una paradoja de Aristóteles: «¿Por qué dos circunferencias concéntricas, recorren una distancia igual si se les hace girar según una circunferencia y recorren distancias proporcionales cuando se les hace girar separadas?»

Si el radio de la circunferencia es  $a$ , las ecuaciones paramétricas de la cicloide se expresan por las igualdades

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

Denominada cicloide por Roberval, fue estudiada por Galileo (1564-1642) que intentó calcular el área encerrada por un arco de curva utilizando para ello procedimientos mecánicos, obteniendo una buena aproximación del resultado que establece que el área encerrada bajo un arco de curva es tres veces el área del círculo que la genera.

Sin lugar a dudas, podemos afirmar que esta curva despertó pasiones entre los matemáticos del siglo XVII, como lo prueba que en su estudio, además de los ya citados, intervinieron Torricelli (1608-1647), Fermat (1601-1665), Descartes (1629-1695), Huygens e, incluso, Pascal (1623-1662), que llegó a proponer un concurso sobre esta curva, planteando una serie de cuestiones sobre propiedades que él ya había descubierto. El concurso se declaró desierto y Pascal publicó sus trabajos.

Para dibujar la cicloide y simular el movimiento de la circunferencia sobre una recta, realizaremos los pasos siguientes:

- Trazar una semirrecta cuyo origen será un punto A.
- Sea P un punto en la semirrecta.
- Fijado el radio  $r$ , trazar la circunferencia generatriz tangente en el punto P a la semirrecta.
- Utilizar la opción Transferencia de medidas para obtener un punto M en la circunferencia, tal que el arco PM sea igual al segmento AP.
- Dibujar el punto N simétrico de M con respecto a la perpendicular a la semirrecta en P.

La cicloide, representada en la figura 12, es el lugar geométrico del punto N cuando P recorre la semirrecta.

Indicaremos que el punto N es necesario ya que, por la forma en la que CABRI realiza la transferencia de medidas, el punto M se genera midiendo a la derecha de P, por lo que, si dibujamos el lugar geométrico de M, obtendríamos una cicloide invertida.

La cicloide puede considerarse dentro de una familia de curvas a la que pertenecen la cicloide prolongada generada por un punto de una circunferencia concéntrica con la circunferencia generatriz y la cardioide acortada obtenida cuando el punto pertenece a una circunferencia concéntrica interior con la generatriz.

## Bibliografía

BOYER, C. B. (1987): *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

**Agustín Carrillo**  
Centro de Profesorado  
de Linares-Andújar.  
**Inmaculada Llamas**  
IES Jándula de Andújar.  
Sociedad Andaluza  
de Educación Matemática  
«Thales»

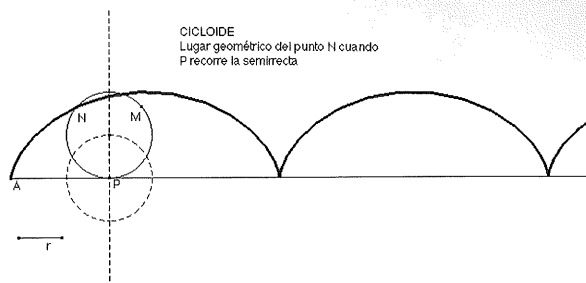


Figura 12

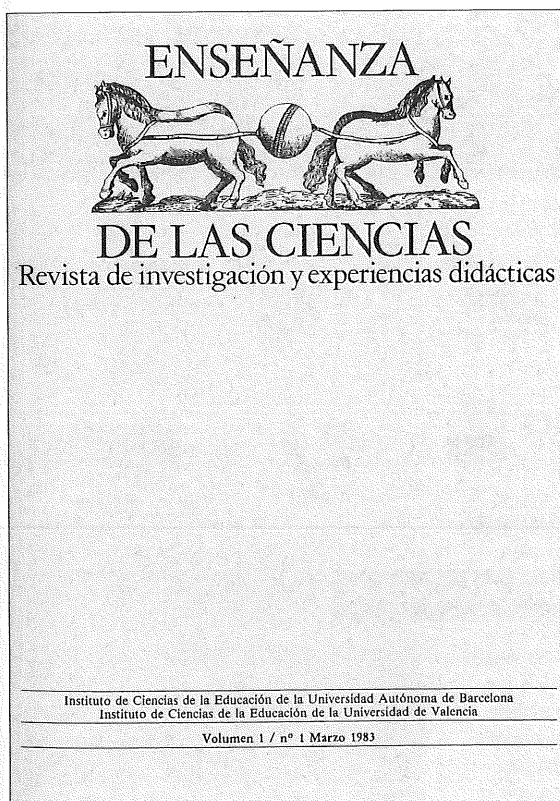
CARRILLO DE ALBORNOZ, A. e I. LLAMAS (1997): *Geometría con CABRI II*, Centro de Profesores, Andújar (Jaén).

DURÁN, A. J. (1996): *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Universidad, Madrid.

KLINE, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. I y II*, Alianza Editorial, Madrid.

RÍO SÁNCHEZ, J. del (1994): *Lugares geométricos. Cónicas*, Síntesis, Madrid.

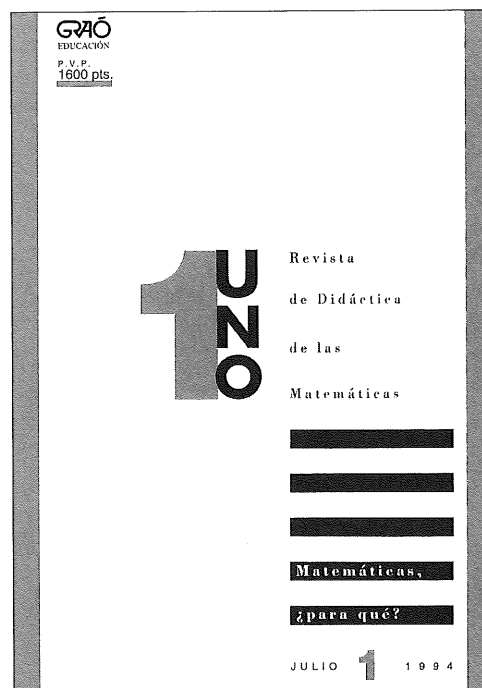
WUSSING, H. y W. ARNOLD, (1989): *Biografías de grandes matemáticos*, Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza.



Enseñanza  
de las Ciencias

Volumen 1/n.º 1

Marzo  
1983



UNO

n.º 1

julio  
1994



9as

J

A

E

M

LUGO

**9<sup>AS</sup> JAEM**  
*Jornadas para el Aprendizaje  
y la Enseñanza de las Matemáticas*

**LUGO**  
**9 10 11**  
**SEPTIEMBRE 1999**

**FESPM**  
ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

**SECCION DE MATEMATICAS DE LUGO**

CONSELLERIA DE EDUCACION E ENSINANZA UNIVERSITARIA

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

**EXCMO AYUNTAMIENTO DE LUGO**

**DIPUTACION PROVINCIAL LUGO**

**MUSEO provincial de lugo**

**ediciones sm**

**TEXAS INSTRUMENTS**

**XACOBEO'99**  
Galicia

**FUNDACION CAIXAGALICIA**

**XUNTA DE GALICIA**  
CONSELLERÍA DE CULTURA, COMUNICACIÓN SOCIAL E TURISMO



## Mosaicos. Movimientos en el plano

**Antonio Bermejo Fuertes**

## IDEAS Y RECURSOS

En el artículo se muestran unos materiales con los que se invita al profesorado a compartir, en el departamento de Matemáticas, el estudio y resolución de algunos problemas concretos del currículo del 2.º ciclo de la ESO, que hacen referencia a formas poligonales y a movimientos en el plano. Se trata de aportar ideas concretas que puedan ser de inmediata aplicación en la práctica. Además, el análisis de materiales, llevado a cabo por un grupo de profesores, es la mejor garantía de investigación y de reflexión sobre su uso, pudiendo servir, por una parte, como referencia para una posterior elaboración propia y, por otra, más importante, para posibilitar una reflexión sobre la práctica diaria en el aula.

**E**N LA LOGSE se insiste una y otra vez en que disponemos de un currículo abierto; es decir, un proyecto, un plan de acción en el que no todo está decidido, sino que hay muchas decisiones que deberán ser tomadas por el equipo de profesores de cada centro, en primer lugar, y después y, como consecuencia de ello, por el profesor en cada aula. Estas decisiones, como es lógico, se irán viendo reflejadas en la práctica diaria; de lo que se deriva la importancia de organizarla coherentemente y, en consecuencia, también los materiales que vayamos a utilizar.

Los profesores tenemos que ser conscientes de que establecer la labor diaria del aula (lo que quiere decir, determinar claramente qué queremos que nuestros alumnos aprendan y mediante qué actividades intentaremos que se consiga este aprendizaje) no se puede dejar a la intuición ni a la simple imitación del libro de texto; y aunque el uso de este material sigue siendo prioritario en las aulas, es importante que no sea el único referente curricular.

Por materiales curriculares podemos entender todos aquellos recursos que ayudan al profesorado a adoptar decisiones en el proceso de enseñanza/aprendizaje. Su utilización, como ya se ha indicado anteriormente, necesita de unos acuerdos previos, primero en el claustro, y después en el seminario o departamento, que permitan dar coherencia a la actividad educativa del centro. Su función no es, por tanto, definir para el profesorado las intenciones educativas (ya que éstas tienen que fijarse previamente mediante los Proyectos del Centro), sino ayudarle a llevarlas a la práctica. Por este motivo no se deberían aplicar sin más materiales ya elaborados por otras personas, siendo fundamental que, previamente a su utilización, los profesores de cada centro reflexionen sobre la posible validez de cara a su centro y a sus alumnos, estudien los fundamentos de cada propuesta, los valoren y,