



# Transformaciones geométricas

## **Autores**

FERNANDEZ PEREZ-RENDON, ANTONIO LUIS  
NECULA, IOANA GABRIELA  
MARIN SANCHEZ, JUAN MANUEL  
GARRIDO VIZUETE, MARIA DE LOS ANGELES  
NAVARRO DOMINGUEZ, MARIA DE LOS ANGELES  
CHAVEZ DE DIEGO, MARIA JOSEFA  
DELGADO GARRIDO, OLVIDO  
FALCON GANFORNINA, RAUL MANUEL  
ARRIOLA HERNANDEZ, ROSARIO  
RIVA MORENO, YOLANDA DE LA  
SANZ DOMINGUEZ, MARIA ISABEL  
DIAZ PERNIL, DANIEL

## INSTRUCCIONES:

### “CÓMO USAR LA REALIDAD AUMENTADA”


1. Descargue **JUNAIO**  en su dispositivo móvil con el



siguiente código  o búsquelo en el Play Store o en Itunes.

2. Conéctese ahora al canal:



3. La presencia del recurso de RA será indicada con el logo  AUGMENTED REALITY

Encuadre el marcador  con su dispositivo móvil.

Recurso de REALIDAD AUMENTADA creado por:



<http://ra.sav.us.es>

# Transformaciones en el plano y en el espacio

## Introducción. Conceptos básicos

### Definición

Se llama **transformación geométrica en el plano (espacio)** a toda aplicación biyectiva  $t$  del plano (espacio) en sí mismo. El punto  $P' = t(P)$  se denomina **transformado**, **homólogo** o **imagen** del punto  $P$ .

### Definición

Se llaman **ecuaciones** de una transformación en el plano a las ecuaciones que permiten calcular las coordenadas del transformado  $P'(x',y')$  de un punto  $P(x,y)$  dado del plano.

En este curso sólo consideramos transformaciones lineales, cuyas ecuaciones son de la forma:

$$\begin{cases} x' = a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \\ y' = a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \end{cases}$$

o bien, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

### Definición

Se llaman **ecuaciones** de una transformación en el espacio a las ecuaciones que permiten calcular las coordenadas del transformado  $P'(x',y',z')$  de un punto  $P(x,y,z)$  dado del espacio.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

## Definición

Se llama **transformación directa**, **par** o **positiva** a toda transformación geométrica que conserva la orientación de los ángulos.

Se llama **transformación inversa**, **impar** o **negativa** a toda transformación geométrica que cambia la orientación de los ángulos.

## Definición

Se llama **isometría** o **movimiento** a toda transformación geométrica que conserva las distancias. Diremos que una transformación geométrica  $M$  es un movimiento si para cualesquiera puntos del plano o del espacio  $P$  y  $Q$  se verifica que  $d(M(P), M(Q)) = d(P, Q)$ .

Propiedades de las isometrías:

- Toda isometría transforma rectas en rectas.
- Toda isometría directa conserva el valor y la orientación de los ángulos.
- Toda isometría inversa conserva el valor de los ángulos pero cambia su orientación.

## Definición

Se llama **elemento doble** de una transformación geométrica a todo elemento geométrico (punto, recta, circunferencia, etc.) que permanece invariante mediante dicha transformación. A los puntos que verifican esta propiedad (se transforman en ellos mismos, es decir coinciden con su imagen) se les llaman **puntos fijos** o **puntos dobles** de dicha transformación geométrica.

## **Transformaciones en el plano y en el espacio**

### **Transformaciones geométricas en el plano**

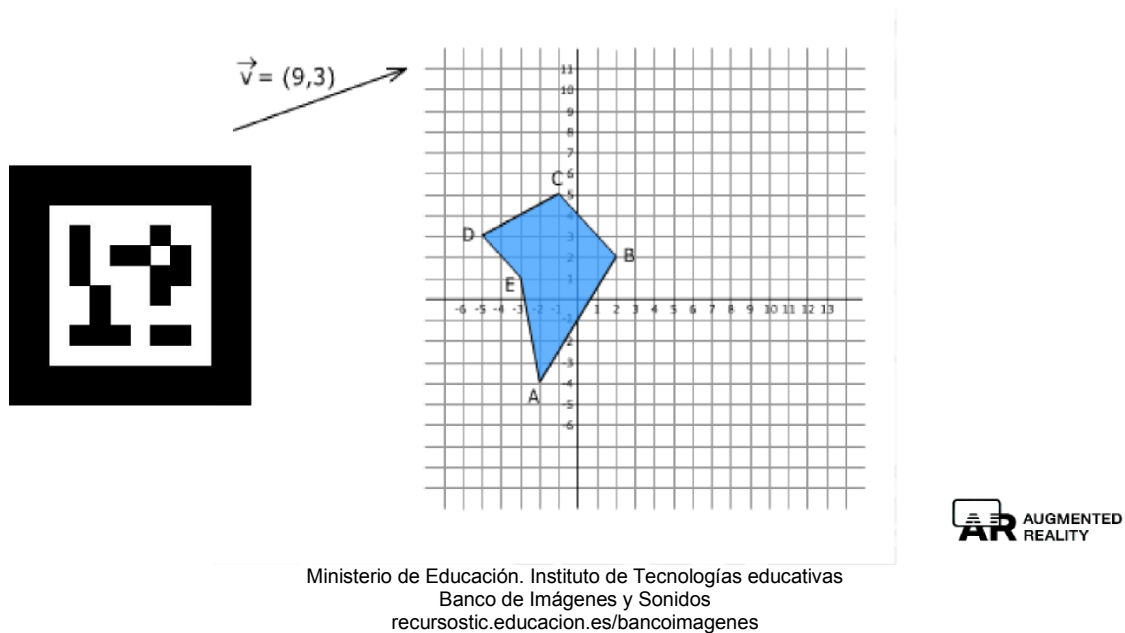
Estudiamos en este apartado las principales transformaciones geométricas en el plano, como son la traslación, el giro, la simetría axial y la homotecia, así como sus distintas composiciones.

# Transformaciones en el plano y en el espacio

## Traslación

### Definición

Dado un vector  $\vec{v}$ , se llama traslación de vector  $\vec{v}$ , y se denota por  $t_{\vec{v}}$ , a la transformación geométrica que asocia a cada punto  $P$  del plano otro punto  $P' = t_{\vec{v}}(P)$  de forma que se verifique  $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$ .



Propiedades de la traslación:

- Toda traslación es una isometría directa.
- Toda traslación transforma rectas en rectas paralelas a ellas.
- Los elementos dobles de la traslación  $t_{\vec{v}}$  son las rectas paralelas al vector  $\vec{v}$
- Una traslación queda determinada si conocemos un punto del plano y su imagen.

### Teorema

La **ecuación matricial** de la traslación de vector  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

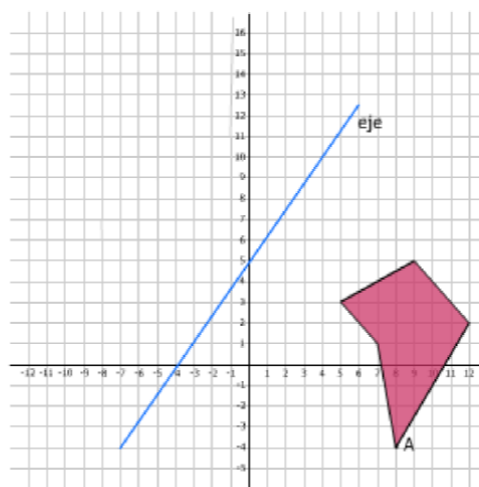
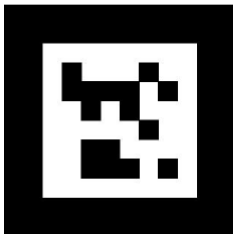
dónde  $P(x,y)$  y  $P'(x',y')$ .

# Transformaciones en el plano y en el espacio

## Simetría axial

### Definición

Dada una recta  $e$  en el plano, se llama simetría respecto del eje  $e$  o simetría axial de eje  $e$ , y se denota por  $S_e$ , a la transformación geométrica que asocia a cada punto  $P$  del plano otro punto  $P' = S_e(P)$  de forma que la recta  $e$  es la mediatriz del segmento  $PP'$ .



Ministerio de Educación. Instituto de Tecnologías educativas  
Banco de Imágenes y Sonidos  
[recursostic.educacion.es/bancoimagenes](http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes)

Propiedades de la simetría axial:

- Toda simetría axial es una isometría inversa.
- Los únicos puntos dobles de una simetría axial son los puntos del eje. Las rectas perpendiculares a dicho eje son rectas dobles.
- Una simetría axial queda determinada si conocemos un punto del plano y su imagen.

### Teorema

La ecuación matricial de la simetría axial cuyo eje  $e$  forma un ángulo  $\alpha$  con el semieje positivo  $OX$ , medido desde éste, es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ M & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ N & \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$



Dónde los parámetros  $M$  y  $N$  se obtienen imponiendo que un punto cualquiera del eje,  $A(a_1, a_2)$ , sea un punto doble:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ M & \cos 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha \\ N & \operatorname{sen} 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

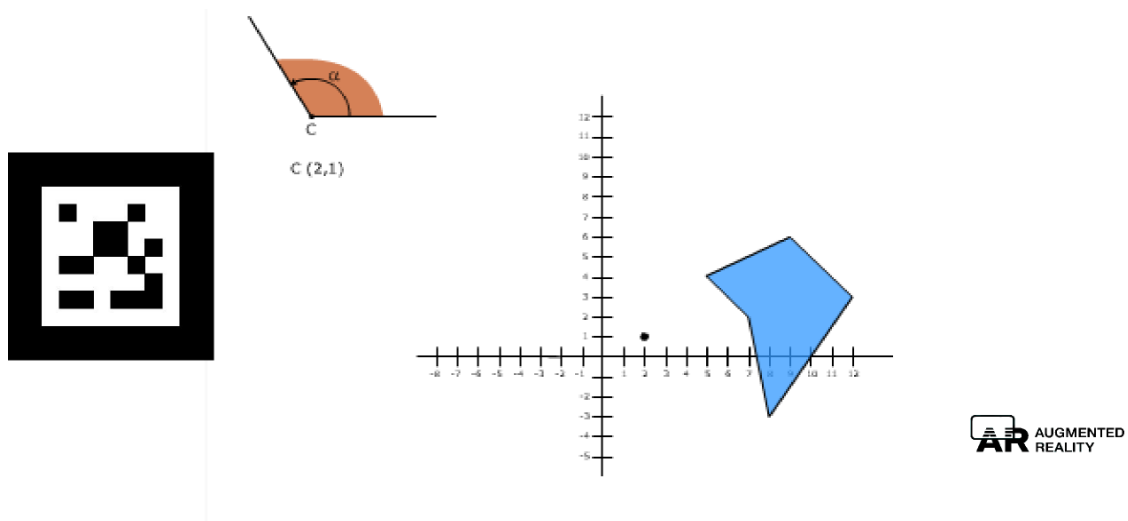
# Transformaciones en el plano y en el espacio

## Giro

### Definición

Dado un punto  $C$  del plano y un ángulo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se llama **giro** de centro  $C$  y amplitud  $\alpha$ , y se denota por  $G_{(C,\alpha)}$ , a la transformación que asocia a cada punto  $P$  del plano otro punto  $P' = G_{(C,\alpha)}(P)$  de forma que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

- $d(C, P) = d(C, P')$
- $\widehat{PCP'} = \alpha$



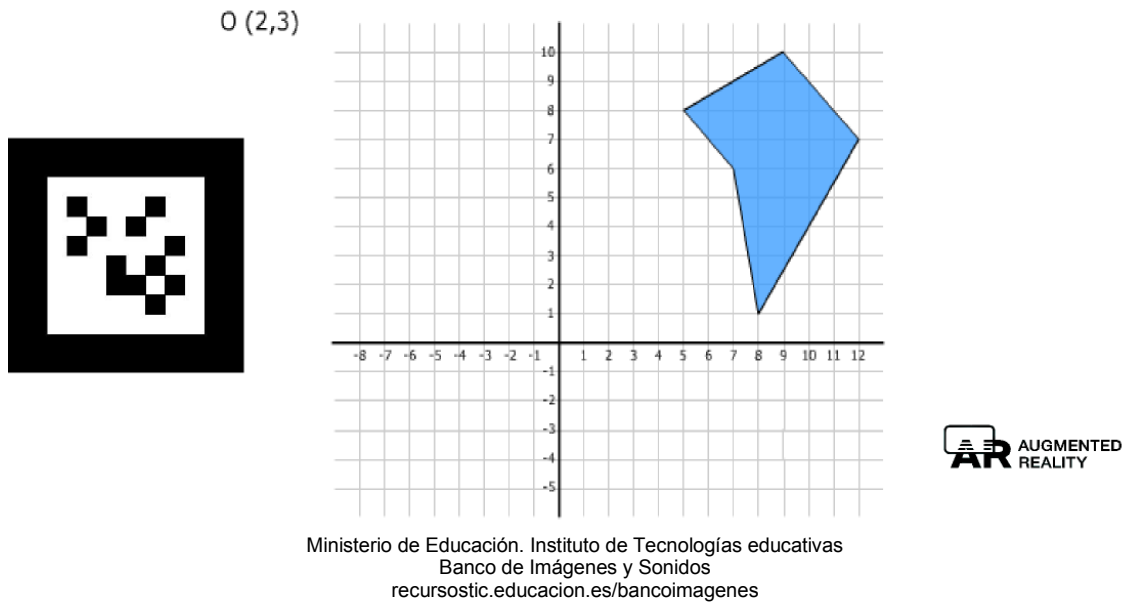
Ministerio de Educación. Instituto de Tecnologías educativas  
Banco de Imágenes y Sonidos  
[recursostic.educacion.es/bancoimagenes](http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes)

Propiedades del giro:

- Todo giro es una isometría directa.
- El único punto doble de un giro es su centro.
- Un giro queda determinado si conocemos el centro, un punto y su homólogo o bien dos puntos y sus respectivos homólogos.

## Definición

Se llama **simetría central** de centro  $C$  al giro de centro  $C$  y amplitud  $180^\circ$ .



## Teorema

La ecuación matricial del giro de centro  $C$  y amplitud  $\alpha$  es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ M & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ N & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

dónde los parámetros  $M$  y  $N$  se obtienen imponiendo que el centro  $C(c_1, c_2)$  del giro sea un punto doble:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ M & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ N & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

# Transformaciones en el plano y en el espacio

## Producto de transformaciones

### Definición

Dadas dos transformaciones geométricas  $t_1$  y  $t_2$ , se llama **producto de** ambas **transformaciones**, y se denota por  $t_2 \circ t_1$ , a la composición de ambas transformaciones, es decir, al resultado de aplicar primero la transformación  $t_1$  y a continuación la transformación  $t_2$ , de forma que si  $P' = t_1(P)$  y  $P'' = t_2(P')$  entonces  $(t_2 \circ t_1)(P) = P''$ .

### Teorema

Si  $T_1$  es la matriz asociada a la transformación  $t_1$  y  $T_2$  es la matriz asociada a la transformación  $t_2$ , entonces la matriz asociada al producto  $t_2 \circ t_1$  es  $T_2 \cdot T_1$ .

### Teorema

#### Producto de traslaciones

El producto de dos traslaciones es otra traslación cuyo vector es la suma de los vectores de las traslaciones dadas. Es decir:

$$T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a} + \vec{b}}$$

El producto de traslaciones es conmutativo, es decir, el resultado no depende del orden en que se apliquen ambas traslaciones.

### Teorema

#### Producto de giros concéntricos

El producto de dos giros concéntricos es otro giro del mismo centro y cuya amplitud es la suma de las amplitudes de los giros dados. Es decir:

$$G_{(C, \alpha')} \circ G_{(C, \alpha)} = G_{(C, \alpha + \alpha')}$$

El producto de giros concéntricos es conmutativo, es decir, el resultado no depende del orden en que se apliquen ambos giros.

### Teorema

#### Producto de giros no concéntricos

El producto de dos giros no concéntricos  $G_{(C', \alpha')} \circ G_{(C, \alpha)}$  es:

- Otro giro  $G_{(C'', \alpha + \alpha')}$  de distinto centro y amplitud  $\alpha + \alpha'$  si  $\alpha + \alpha' \neq 2k\pi$ .
- Una traslación si  $\alpha + \alpha' = 2k\pi$ .

El producto de giros no concéntricos no es conmutativo, es decir, el resultado sí depende del orden en que se apliquen ambos giros.

## Teorema

### Producto de giro por traslación

El producto de un giro por una traslación es otro giro de distinto centro y la misma amplitud. Es decir:

$$G_{(C, \alpha)} \circ T_{\vec{a}} = G_{(C', \alpha)}$$

$$T_{\vec{a}} \circ G_{(C, \alpha)} = G_{(C'', \alpha)}$$

El producto de un giro por una traslación no es conmutativo, es decir, el centro del giro producto depende del orden en que se apliquen ambas transformaciones.

## Teorema

### Producto de simetrías axiales de ejes concurrentes

El producto de dos simetrías axiales de ejes concurrentes,  $S_{e_2} \circ S_{e_1}$ , es un giro de centro el punto de intersección de ambos ejes,  $C = e_1 \cap e_2$ , y de amplitud el doble del ángulo que va del eje de la primera simetría que se aplica hacia el eje de la segunda simetría que se aplica,  $\alpha = 2 \cdot \widehat{e_1 C e_2}$ .

## Teorema

### Producto de simetrías axiales de ejes paralelos

El producto de dos simetrías axiales de ejes paralelos,  $S_{e_2} \circ S_{e_1}$ , es una traslación cuyo vector es perpendicular a ambos ejes, su módulo es el doble de la distancia entre ambos ejes y su sentido es el que va desde el eje de la primera simetría que se aplica hacia el eje de la segunda simetría que se aplica.

## Transformaciones en el plano y en el espacio

### Homotecia

#### Definición

Dado un punto  $C$  del plano y un número real  $k \neq 0$ , se llama **homotecia** de centro  $C$  y razón  $k$ , y se denota por  $H_{(C,k)}$ , a la transformación geométrica que asocia a cada punto  $P$  del plano otro punto  $P' = H_{(C,k)}(P)$  de forma que  $\overrightarrow{CP'} = k \cdot \overrightarrow{CP}$ .

Propiedades de la homotecia:

- Ninguna homotecia (con  $k \neq 1$ ) es una isometría.
- Toda homotecia transforma puntos alineados en puntos alineados.
- Toda homotecia conserva el valor absoluto y la orientación de los ángulos.
- El único punto doble de una homotecia de razón  $k \neq 1$  es su centro. Las rectas que pasan por el centro son rectas dobles.
- Una homotecia queda determinada si conocemos el centro, un punto y su imagen, o bien si conocemos dos puntos y sus respectivos transformados.

#### Teorema

La ecuación matricial de la homotecia de centro  $C$  y razón  $k$  es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ M & k & 0 \\ N & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

dónde los parámetros  $M$  y  $N$  se obtienen imponiendo que el centro  $C(c_1, c_2)$  de la homotecia sea un punto doble:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ M & k & 0 \\ N & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

### Teorema

El **producto de dos homotecias** del mismo centro  $H_{(C,k')} \circ H_{(C,k)}$  es otra homotecia del mismo centro y de razón  $k \cdot k'$ .

### Teorema

El **producto de dos homotecias** de distinto centro  $H_{(C',k')} \circ H_{(C,k)}$  es:

- Otra homotecia de distinto centro y razón  $k \cdot k'$  si  $k \cdot k' \neq 1$ .
- Una traslación si  $k \cdot k' = 1$ .

En ambos casos, los parámetros que definen la transformación producto deberán ser calculados de forma matricial.

### Definición

Se llama **semejanza** al producto de un movimiento por una homotecia o de una homotecia por un movimiento.

## **Transformaciones en el plano y en el espacio**

### **Transformaciones geométricas en el espacio**

Estudiamos en este apartado las principales transformaciones geométricas en el espacio, como son la traslación, el giro, las simetrías y la homotecia, así como sus distintas composiciones.



## Transformaciones en el plano y en el espacio

### Traslación

#### Definición

Dado un vector  $\vec{v}$ , se llama **traslación** de vector  $\vec{v}$ , y se denota por  $t_{\vec{v}}$ , a la transformación geométrica que asocia a cada punto  $P$  del espacio otro punto  $P' = t_{\vec{v}}(P)$  de forma que se verifique  $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$ .

Propiedades de la traslación:

- Toda traslación es una isometría directa.
- Toda traslación transforma puntos alineados en puntos alineados, rectas en rectas paralelas a ellas y planos en planos paralelos a ellos.
- Toda traslación carece de puntos dobles.
- Las únicas rectas dobles de la traslación  $t_{\vec{v}}$  son las rectas paralelas al vector  $\vec{v}$ .
- La inversa de una traslación de vector  $\vec{u}$  es otra traslación de vector  $-\vec{u}$ , es decir,  $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$ .
- El producto (composición) de dos traslaciones de vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es otra traslación de vector  $\vec{u} + \vec{v}$ .
- El conjunto de las traslaciones es un grupo conmutativo.

#### Teorema

La **ecuación matricial** de la traslación de vector  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dónde  $P(x,y,z)$  y  $P'(x',y',z')$  representan un punto y su transformado.

## Transformaciones en el plano y en el espacio

### Simetría especular

#### Definición

Dado un plano  $\pi$  en el espacio, se llama **simetría especular** respecto del plano  $\pi$ , y se denota por  $S_\pi$ , a la transformación geométrica que asocia a cada punto  $P$  del espacio otro punto  $P' = S_\pi(P)$  de forma que el plano  $\pi$  es perpendicular a la recta que une los puntos  $P$  y  $P'$  y pasa por el punto medio del segmento  $PP'$ .

Propiedades de la simetría especular:

- Toda simetría especular es una isometría inversa.
- Toda simetría especular transforma puntos alineados en puntos alineados, rectas en rectas y planos en planos.
- Los únicos puntos dobles de una simetría especular son los puntos del plano de simetría  $\pi$ .
- Las rectas y planos perpendiculares al plano de simetría  $\pi$  son elementos dobles.

#### Teorema

La **ecuación matricial** de la simetría especular respecto del plano  $\pi$  cuyo vector normal unitario es  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  viene dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ P & & & \\ Q & I - 2N & & \\ R & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$N = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} (n_1 \ n_2 \ n_3)$$

Dónde  $I$  es la matriz identidad de orden 3, y los parámetros  $P$ ,  $Q$  y  $R$  se obtienen imponiendo que un punto cualquiera del plano de simetría  $\pi$  sea un punto doble.

# Transformaciones en el plano y en el espacio

## Giro

### Definición

Se llama **giro** o **rotación** de eje la recta  $e$  y ángulo  $\alpha$ , y se denota por  $G_{(e,\alpha)}$ , a la transformación geométrica que asocia a cada punto  $P$  del espacio otro punto  $P' = G_{(e,\alpha)}(P)$  de forma que se verifiquen las condiciones siguientes:

- $P'$  pertenece al plano  $\pi$  perpendicular al eje  $e$  trazado por el punto  $P$ .
- El ángulo  $\widehat{PCP'}$  es  $\alpha$ , donde  $C$  es el punto de corte del plano  $\pi$  con el eje  $e$ .
- $d(P,e) = d(P',e)$ .

Para definir unívocamente el giro al que se hace referencia hay que fijar un sentido en el eje  $e$  de giro o dar un punto y su transformado.

Propiedades de los giros:

- Todo giro es una isometría directa.
- Todo giro transforma puntos alineados en puntos alineados, rectas en rectas y planos en planos.
- Los únicos puntos dobles de un giro son los puntos del eje  $e$  de giro.
- Los planos perpendiculares al eje de giro y las esferas centradas en un punto del eje de giro son elementos dobles.
- El conjunto de todos los giros del mismo eje constituyen un grupo conmutativo.

Debido a la dificultad de expresar las ecuaciones de un giro de eje una recta  $e$  cualquiera, vamos a ver sólo estas ecuaciones cuando el eje de giro coincide con alguno de los ejes coordenados.

### Teorema

Giro de eje  $OX$  y ángulo  $\alpha$

La ecuación matricial de un giro de eje  $OX$  y ángulo  $\alpha$ , cuando tomamos el **sentido creciente** de dicho eje, es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

## Teorema

### Giro de eje $OY$ y ángulo $\alpha$

La ecuación matricial de un giro de eje  $OY$  y ángulo  $\alpha$ , cuando tomamos el **sentido creciente** de dicho eje, es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & \operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

## Teorema

### Giro de eje $OZ$ y ángulo $\alpha$

La **ecuación matricial** de un giro de eje  $OZ$  y ángulo  $\alpha$ , cuando tomamos el **sentido creciente** de dicho eje, es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

# Transformaciones en el plano y en el espacio

## Simetría axial

### Definición

Dado una recta  $e$ , se llama **simetría axial** de eje  $e$ , y se denota por  $S_e$ , a la transformación geométrica que asocia a cada punto  $P$  del espacio otro punto  $P' = S_e(P)$  de forma que se verifiquen las condiciones siguientes:

- $P$  y  $P'$  están en un plano perpendicular al eje  $e$  de la simetría.
- La recta definida por  $P$  y  $P'$  es perpendicular al eje de la simetría.
- Si  $M$  es el punto de corte del eje  $e$  de simetría con la recta  $PP'$ , ambos puntos,  $P$  y  $P'$ , distan lo mismo de  $M$ .

Propiedades de las simetrías axiales:

- Toda simetría axial es una isometría directa.
- Toda simetría axial transforma puntos alineados en puntos alineados, rectas en rectas y planos en planos.
- Los únicos puntos dobles de una simetría axial son los puntos del eje de simetría  $e$ .
- Las rectas normales al eje de simetría son rectas dobles. Los planos normales al eje de simetría y los que contienen a éste son planos dobles.

### Teorema

Una simetría axial de eje  $e$  es un giro de eje  $e$  y amplitud  $180^\circ$ .

### Teorema

La **ecuación matricial** de la simetría axial de eje  $e$  cuyo vector director unitario es  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , viene dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -I + 2N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}$$

dónde  $I$  es la matriz identidad de orden 3, y los parámetros  $P$ ,  $Q$  y  $R$  se obtienen imponiendo que un punto cualquiera del eje de simetría sea un punto doble.

# Transformaciones en el plano y en el espacio

## Simetría central

### Definición

Dado un punto  $C$  del espacio, se llama **simetría central** de centro  $C$ , y se denota por  $S_C$ , a la transformación geométrica que asocia a cada punto  $P$  del espacio otro punto  $P' = S_C(P)$  de forma que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

- Los puntos  $P$ ,  $C$  y  $P'$  son colineales.
- $C$  es el punto medio del segmento  $PP'$ .

Propiedades de las simetrías centrales:

- Toda simetría central es una isometría inversa.
- Toda simetría central transforma puntos alineados en puntos alineados, rectas en rectas paralelas y planos en planos paralelos.
- El único punto doble de una simetría central es su centro  $C$ .
- Las rectas y los planos que pasan por el centro  $C$  de la simetría son elementos dobles. Las esferas centradas en el centro de la simetría son elementos dobles.

### Teorema

La **ecuación matricial** de la simetría central de centro  $C(C_1, C_2, C_3)$  es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2C_1 & -1 & 0 & 0 \\ 2C_2 & 0 & -1 & 0 \\ 2C_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

# Transformaciones en el plano y en el espacio

## Producto de transformaciones

### Teorema

#### Producto de simetrías axiales

- El producto de dos simetrías axiales cuyos ejes son paralelos es una traslación de vector perpendicular a ambos cuyo módulo es el doble de la distancia entre ambas rectas.
- El producto de dos simetrías axiales cuyos ejes se cortan en un punto  $M$  es un giro de eje la recta  $r$  perpendicular a ambos ejes por el punto  $M$  y ángulo el doble del que forman ambas rectas.
- El producto de dos simetrías axiales cuyos ejes se cruzan es el producto de una traslación por un giro (o de un giro por una traslación).

### Teorema

#### Producto de giros

- El producto de dos giros de ejes paralelos es:
  - Otro giro respecto a un eje paralelo a ambos si la suma de los dos ángulos de giro no es múltiplo de  $2k\pi$ .
  - Una traslación si la suma de los dos ángulos de giro es múltiplo de  $2k\pi$ , en cuyo caso el vector de la traslación es perpendicular a ambos ejes y su módulo es el doble de la distancia entre ambos.
- El producto de dos giros cuyos ejes se cortan es otro giro cuyo eje pasa por la intersección de los ejes dados.
- El producto de dos giros cuyos ejes se cruzan es igual al producto de dos simetrías axiales cuyos ejes se cruzan.

### Definición

Se llama **movimiento helicoidal** al producto de un giro por una traslación de vector paralelo al eje del giro.

### Teorema

#### Propiedades de los movimientos helicoidales

- Una transformación es un movimiento helicoidal si y sólo si es producto de dos simetrías axiales.
- Todo producto de traslación por giro, o de giro por traslación, es un movimiento helicoidal, cualquiera que sea la dirección del vector de la traslación.
- El conjunto de los movimientos helicoidales es un grupo que coincide con el



grupo de los movimientos directos.

## Teorema

### Descomposición de una traslación

Toda traslación de vector  $\vec{v}$  se puede descomponer en el producto de dos simetrías especulares cuyos planos son perpendiculares a la dirección del vector  $\vec{v}$ , separados una distancia  $|\vec{v}|/2$  y tales que el sentido desde el primer plano hacia el segundo coincide con el sentido del vector  $\vec{v}$ .

## Teorema

### Descomposición de un giro

Todo giro en el espacio de eje  $e$  y de amplitud  $\alpha$  se puede descomponer en el producto de dos simetrías especulares de planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  tales que  $\pi_1 \cap \pi_2 = e$  y el diedro  $\widehat{\pi_1 e \pi_2}$  es igual en magnitud y sentido a  $\alpha/2$ .

## Teorema

### Descomposición de una simetría axial

Toda simetría axial de eje  $e$  se puede descomponer en el producto de dos simetrías especulares de planos perpendiculares entre sí y que se cortan en  $e$ .

## Teorema

### Descomposición de una simetría central

Toda simetría central de centro  $C$  se puede descomponer en el producto de una simetría especular de un plano que pase por  $C$  y de una simetría axial cuyo eje sea perpendicular al plano anterior y que pase por  $C$ .

# Transformaciones en el plano y en el espacio

## Homotecia

### Definición

Dados un punto  $C$  del espacio y un número real  $k \neq 0$ , se llama **homotecia** de centro  $C$  y razón  $k$ , y se representa por  $H_{(C,k)}$ , a la transformación geométrica que asocia a cada punto  $P$  del espacio otro punto  $P' = H_{(C,k)}(P)$  que verifica  $\overrightarrow{CP'} = k \cdot \overrightarrow{CP}$ .

### Definición

Una homotecia se llama **directa** si la razón es positiva; en caso contrario, diremos que la homotecia es **inversa**.

### Teorema

Toda homotecia de razón  $k \neq 1$  **no es** un movimiento.

### Teorema

La **ecuación matricial** de la homotecia de centro  $C(C_1, C_2, C_3)$  y razón  $k$  es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ C'_1 & k & 0 & 0 \\ C'_2 & 0 & k & 0 \\ C'_3 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dónde  $C'_j = C_j(1 - k)$  para  $j = 1, 2, 3$ .

### Teorema

#### Producto de homotecias

- El producto de dos homotecias del mismo centro  $C$  es otra homotecia de centro  $C$  y razón igual al producto de las razones, es decir,  $H'_{(C,k')} \circ H_{(C,k)} = H''_{(C,k \cdot k')}$
- El producto de dos homotecias de distinto centro es:
  - **$k \cdot k' \neq 1$**  Otra homotecia, cuyo centro está alineado con los centros de las homotecias dadas y de razón el producto de las razones de dichas homotecias, es decir,  $H'_{(C',k')} \circ H_{(C,k)} = H''_{(C'',k \cdot k')}$ .
  - **$k \cdot k' = 1$**  Una traslación cuyo vector es paralelo a la línea que une los centros

de las dos homotecias, es decir,  $H'_{(C',k')} \circ H_{(C,k)} = T_{\vec{u}}$ .

### Definición

Se llama **semejanza** de razón  $k$  a la aplicación compuesta de una homotecia de razón  $k$  y de un movimiento.

La semejanza se llama **directa** si la razón de la homotecia es positiva; en caso contrario, diremos que la semejanza es **inversa**.

# Transformaciones en el plano y en el espacio

## Problemas propuestos

### ● Problema 1

Hallar los puntos dobles e identificar los movimientos dados por las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: A:  $T_{a=(2,3)}$ , B:  $G_{(C^{9/2}, -1/2), -90^\circ}$ , C:  $S_{x-y+1=0}$

### ● Problema 2

- Calcular la matriz de la simetría  $S$  que transforma el punto  $(1, -1)$  en el punto  $(-3, 3)$ .

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

- Calcular el centro del giro  $G$ , de amplitud  $\pi/2$ , que transforma el punto  $(2, 2)$  en el punto  $(0, 4)$ .

Solución:  $C(0, 2)$

- Determinar el movimiento que resulta de componer  $S \circ G \circ S_{y=1}$ , donde  $S$  y  $G$  son la simetría y el giro de los dos apartados anteriores.

Solución:  $S \circ G \circ S_{y=1} = T_{v=(0,2)}$

### ● Problema 3

- Descomponer la traslación de vector  $v = (1, -1)$  como producto de simetrías axiales. Demostrar que la recta  $2x + 2y - 1 = 0$  es doble.

Solución:  $T_{v=(1, -1)} = S_{y=x-1} \circ S_{y=x}$

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 Identificar la transformación de matriz y descomponerla

como producto de simetrías axiales.

Solución: Giro  $G_{(C(0,2),90^\circ)} = S_{y=x+2} \circ S_{y=2}$

#### ● Problema 4

- Obtener las ecuaciones de una simetría que transforma el punto  $P(1, -1)$  en el punto  $P'(4, 2)$ .

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

- Completar los huecos en las siguientes igualdades:

$$S_{y=3x} \circ S_{y=3x-2} = T_{\underline{\hspace{1cm}}}$$

Solución:  $S_{y=3x} \circ S_{y=3x-2} = T_{a=(-6/5, 2/5)}$

$$G_{((2, -2), 180^\circ)} \circ T_{(4,4)} = S_{\underline{\hspace{1cm}}} \circ S_{y=-x} \circ S_{y=-x} \circ S_{\underline{\hspace{1cm}}} = S_{\underline{\hspace{1cm}}} \circ S_{\underline{\hspace{1cm}}} = G_{(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})}$$

Solución:  $G_{((2, -2), 180^\circ)} \circ T_{(4,4)} = S_{y=x-4} \circ S_{y=-x} \circ S_{y=-x} \circ S_{y=-x-4} = S_{y=x-4} \circ S_{y=-x-4} = G_{(C(0, -4), 180^\circ)}$

#### ● Problema 5

- Obtener la matriz de la traslación de vector perpendicular a  $v = (1, 2)$  que transforma el punto  $A(3, 1)$  en un punto de la recta  $x - y + 1 = 0$ .

$$T: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

- Identificar, descomponiendo previamente en producto de simetrías, el movimiento  $G_{(A(3,1), -90^\circ)} \circ T_{(-2,0)}$  y obtener sus ecuaciones.

$$\text{Solución: } G_{(C(4,2), -90^\circ)}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

## ● Problema 6



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Identificar la transformación geométrica de matriz

Solución:  $S_{y=x-1}$



Hallar la ecuación matricial del giro que transforma el punto  $P(0, -1)$  en  $P'(0, 1)$  y el punto  $Q(3, 1)$  en  $Q'(2, -2)$ .

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:



Obtener las ecuaciones de  $e_1$  y de  $e_2$  para que se verifique:

$$S_{y=x-1} \circ G_{(C(1,0), 270^\circ)} \circ S_{e_1} = S_{y=x-1} \circ S_{e_2} \circ S_{x=1} \circ S_{e_1} = T_{\vec{a}=(2,0)}$$

Solución:  $e_1: x = 0$ ,  $e_2: y = x - 1$

## ● Problema 7



Hallar las ecuaciones de las siguientes transformaciones geométricas:



Una traslación  $T_v$  que transforma la circunferencia de centro  $(2, 0)$  y radio 5 en la circunferencia de ecuación  $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$ .

$$T: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:



Un giro  $G_{(C,\alpha)}$  que transforma la recta  $y = x + 2$  en  $y = -x + 4$ , siendo  $C$  el punto de corte de ambas rectas y  $\alpha > 0$ .

$$G: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:



Una simetría  $S_e$  cuyo eje es paralelo a la recta  $y = 2x + 3$  y que transforma en sí misma a la cónica  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ .

Solución:  $S: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12/5 & -3/5 & 4/5 \\ -6/5 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 4/5 & 3/5 \\ -4/5 & 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

Sea  $M$  el movimiento de matriz  $U(0, a)$ .  
Calcular  $a$  para que la transformación  $T_U \circ M$  sea una simetría axial y obtener su eje.

Solución:  $a = 2$ , eje:  $x - 3y + 2 = 0$

### ● Problema 8

- Obtener las ecuaciones de las rectas  $A$ ,  $B$  y  $C$  y las coordenadas del punto  $(a, b)$  para que se cumpla la siguiente expresión:

$$t_{(2,0)} \circ g_{((1,0), 90^\circ)} = S_A \circ S_{x=1} \circ S_B \circ S_C = g_{((a,b), 90^\circ)}$$

Solución:  $A: x = 2$ ,  $B: x = 1$ ,  $C: y = x - 1$ ,  $(a, b) = (2, 1)$

- Sea  $S_e$  una simetría de eje paralelo a la recta  $y = 2x$  que transforma el origen de coordenadas en un punto de la recta  $x + y - 3 = 0$ . Se pide:

- Obtener la ecuación del eje  $e$ .

Solución: eje:  $y = 2x - 15/2$

- Obtener las ecuaciones de  $S_e$ .

Solución:  $S_e: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -3/5 & 4/5 \\ -3 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

- Hallar la ecuación de la imagen de la cónica  $x^2 - 4x + y^2 - 25 = 0$  mediante la transformación  $S_e$ .

Solución:  $(x - 26/5)^2 + (y + 7/5)^2 = 29$

### ● Problema 9

- Hallar la ecuación de una homotecia de centro  $C(2, 0)$  que transforma el

punto  $A(4, 2)$  en el punto  $A'(-2, -4)$ .

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

- Completar los espacios en las siguientes igualdades:

$$T_{(-3,3)} = S_{y=x+1} \circ S_{\text{_____}}$$

$$\text{Solución: } T_{(-3,3)} = S_{y=x+1} \circ S_y = x - 2$$

$$G_{((1,1),90^\circ)} = S_{\text{_____}} \circ S_{y=x}$$

$$\text{Solución: } G_{((1,1),90^\circ)} = S_x = 1 \circ S_{y=x}$$

## ● Problema 10

Hallar las ecuaciones de las siguientes transformaciones geométricas:

- Giro de centro  $C(1, 0)$  que transforma  $P(2, 1)$  en  $P'(2, -1)$ .

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Simetría axial de eje paralelo a la recta  $y = x$  tal que el transformado de  $Q(1, 1)$  está en la recta  $x + 2y = 2$ .

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Homotecia de centro  $C(1, 0)$  que transforma la recta  $x + 2y = 0$  en la recta  $x + 2y + 1 = 0$ .

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## ● Problema 11



Calcular las ecuaciones de las siguientes transformaciones geométricas en el plano:

- Simetría que transforma la circunferencia  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$  en  $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ .

Solución: 
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Homotecia de centro  $C(-1, -1)$  que transforma la recta  $y = -x + 2$  en la recta  $y = -x + 6$ .

Solución: 
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Giro de ángulo  $45^\circ$  que tiene como elemento doble la circunferencia  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$ .

Solución: 
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2}-1 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 3-\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

- Semejanza que se obtiene al aplicar primero una traslación de vector  $v = (-1, 2)$  y luego una homotecia de centro  $C(1, 3)$  que transforma el punto  $P(-1, 0)$  en el punto  $P'(-3, -3)$ .

Solución: 
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(Examen de febrero, curso 2009–2010)

## • Problema 12

- Hallar las ecuaciones del giro de centro  $C(-1, -1)$  que transforma  $B(0, -2)$  en  $B'(-2, 0)$ .

Solución: 
$$G: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Obtener la razón de una homotecia de centro  $C(2, 2)$  tal que el transformado del origen esté en la recta  $x + y = -8$ .

Solución:  $k = 3$

- Hallar las ecuaciones de una homotecia que tiene por centro el origen de coordenadas y el homólogo del punto  $A(2, 1)$  está sobre la recta  $x + 3y = 10$ .

Solución:  $H: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Calcular las ecuaciones de una semejanza que resulta al aplicar una simetría de eje  $e: y = x + 1$  y a continuación una homotecia de razón  $k = 2$  que transforma el punto  $A(2, 3)$  en el punto  $A'(3, 5)$ .

Solución:  $S: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

### ● Problema 13

- Dar las ecuaciones e identificar la figura transformada de  $(x - 4)^2 + y^2 = 4$  mediante las siguientes transformaciones geométricas:

●  $S_{y=2x+1}$

Solución:  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 4/5 \\ 2/5 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}, (x + 16/5)^2 + (y - 18/5)^2 = 4$

●  $H_{(C(0,0), -2)}$

Solución:  $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, (x + 8)^2 + y^2 = 16$

●  $T_{a=(1,2)}$

Solución:  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 4$

- Completar los espacios, según corresponda, en las siguientes igualdades:

•  $T_{(2,3)} \circ T_{\_\_\_\_\_\_} = T_{(-5,5)}$

Solución:  $T_{(2,3)} \circ T_{(-7,2)} = T_{(-5,5)}$

•  $S_{y=x-2} \circ S_{y=-x+1} = \_\_\_\_\_\_$

Solución:  $S_{y=x-2} \circ S_{y=-x+1} = G_{(C(3/2, -1/2), 180^\circ)}$

•  $G_{(\_\_\_, \_\_\_)} \circ G_{((3,4), 90^\circ)} = S_{y=1} \circ S_{x=3} \circ S_{\_\_\_} \circ S_{y=x+1} = G_{(\_\_\_, \_\_\_)}$

Solución:  $G_{(C(3,1), 180^\circ)} \circ G_{((3,4), 90^\circ)} = S_{y=1} \circ S_{x=3} \circ S_{x=3} \circ S_{y=x+1} = G_{(C'(0,1), -90^\circ)}$

•  $H_{(\_\_\_, -2)} \circ H_{((4,1), \_\_\_)} = H_{((4,1), -6)}$

Solución:  $H_{((4,1), -2)} \circ H_{((4,1), 3)} = H_{((4,1), -6)}$

#### • Problema 14

• 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Identificar la transformación geométrica de matriz

Solución:  $G_{(P(1,-1), 180^\circ)}$

• Calcular el eje y las ecuaciones de una simetría de eje paralelo a la recta  $x + y - 4 = 0$  que deja invariante la circunferencia  $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$ .

Solución: Eje:  $x + y = 3$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Obtener las ecuaciones de las rectas  $e_1$  y  $e_2$  para que se verifique:

$$S_{y=x} \circ G_{(C(1,1), 90^\circ)} \circ S_{e_1} = S_{y=x} \circ S_{e_2} \circ S_{y=1} \circ S_{e_1} = T_{\vec{a}=(0,2)}$$

Solución:  $e_1: y = 2$

$e_2: y = x$

(Examen de junio, curso 2010–2011)

### ● Problema 15

Obtener los transformados de los siguientes puntos mediante las transformaciones geométricas en el espacio indicadas:

- $P(4, 5, 2)$  mediante la traslación de vector  $v = (-3, 0, 6)$ .

Solución:  $P'(1, 5, 8)$

- $P(0, 3, 6)$  mediante la simetría especular de plano  $\pi: -x + y + z + 3 = 0$ .

Solución:  $P'(8, 5, -2)$

- $P(7, -1, 3)$  mediante el giro de eje  $OY$  de ángulo  $90^\circ$  y sentido creciente.

Solución:  $P'(3, -1, -7)$

- $P(-1, 9, -3)$  mediante la simetría central de centro el punto  $M(1, 0, -3)$ .

Solución:  $P'(3, -9, -3)$

- $P(3, 5, 2)$  mediante la homotecia de centro  $C(6, 2, -1)$  y razón 2.

Solución:  $P'(0, 8, 5)$

- $P(0, 8, -3)$  mediante la simetría axial de eje  $e$  cuya ecuación vectorial es  $(x, y, z) = (2, 1, 2) + \lambda(1, 0, 0)$ .

Solución:  $P'(0, -6, 7)$

### ● Problema 16

Calcular las ecuaciones de las siguientes transformaciones geométricas en el espacio:

- Simetría especular respecto del plano que pasa por el punto  $P(1, 0, 0)$  y cuyo vector normal es  $n = (1, -1, 2)$ .

Solución: 
$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Giro de eje  $OZ$ , ángulo  $45^\circ$  y en sentido creciente.

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Traslación que transforma el punto  $P(1, 3, 6)$  en el punto  $P'(1, 5, 4)$ .

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Movimiento helicoidal resultante de la composición de la traslación y el giro (en ese orden) anteriores.

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

### ● Problema 17

- Dados los planos de ecuaciones  $\pi_1: x + y = 1$  y  $\pi_2: x + y = 4$ , encontrar las ecuaciones del movimiento  $M = S_{\pi_2} \circ S_{\pi_1}$ .

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Dados los planos de ecuaciones  $\pi_1: z = 1$  y  $\pi_2: x + y - z = 2$ , encontrar las ecuaciones del movimiento  $M = S_{\pi_2} \circ S_{\pi_1}$ . ¿De qué movimiento se trata?

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8/3 & 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 8/3 & -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ Giro de eje } \pi_1 \cap \pi_2$$

### ● Problema 18

Calcular las ecuaciones de la transformación geométrica en el espacio resultante de efectuar primero un giro de eje  $OY$  y ángulo  $90^\circ$  en sentido creciente y a continuación una traslación de vector  $v = (0, 3, 0)$ . ¿Qué transformación resulta?

Solución: 
$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ Movimiento helicoidal}$$

### ● Problema 19

Calcular las ecuaciones de la simetría axial de eje la bisectriz del plano  $OYZ$ . ¿Cuál es el transformado del punto  $P(1, 1, 1)$  mediante dicha simetría axial?

Solución: 
$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, P'(-1, 1, 1)$$

### ● Problema 20

- Obtener la matriz de una traslación de vector paralelo a  $v = (1, 2)$  que transforma la recta de ecuación  $x - y + 1 = 0$  en  $x - y + 4 = 0$ .

Solución: 
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Identificar, descomponiendo en producto de simetrías, el movimiento  $M = T_{(-2,0)} \circ G_{((3,1), -90^\circ)}$  y hallar sus ecuaciones.

Solución:  $G_{((2,2), -90^\circ)}$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sea  $S$  la simetría especular de plano  $3x + 4y = 0$ .

- Calcular la ecuación matricial de  $S$ .

Solución: 
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7/25 & -24/25 & 0 \\ 0 & -24/25 & -7/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hallar la ecuación del transformado del eje  $OY$ .

Solución:  $r: \begin{cases} z = 0 \\ 7x - 24y = 0 \end{cases}$

(Examen de junio, curso 2009–2010)

### ● Problema 21

- Hallar la ecuación de la homotecia  $H$  de razón  $k > 0$  que transforma la circunferencia  $x^2 + y^2 - 2y = 0$  en la circunferencia  $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ .

Solución:  $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Obtener la ecuación de la simetría axial  $S$  respecto de la cual son invariantes el punto  $P(2, 1)$  y la recta  $x + y + 3 = 0$ .

Solución:  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Dar la matriz del giro en el espacio de eje  $OY$  y amplitud  $\pi/4$  en sentido creciente. Hallar también el punto  $Q$  del espacio cuyo transformado mediante dicho giro es el punto  $Q'(1, 2, -1)$ .

Solución:  $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ ,  $Q(\sqrt{2}, 2, 0)$

(Examen de diciembre, curso 2010–2011)

### ● Problema 22

- Para un estudio gráfico plano hay que aplicar, en primer lugar, la simetría de eje  $r: x - y + 2 = 0$  y posteriormente el giro de centro el punto  $C(-2, 1)$  y amplitud  $\alpha = -90^\circ$ , obteniéndose un movimiento que denotaremos por  $M$ .
- Calcular la matriz asociada a la transformación  $M$ .

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

- ¿Presenta  $M$  puntos dobles? Justificar la respuesta.

Solución: No

- Expresar  $M$  como  $M = S_e \circ T_v$ , descomponiendo para ello el giro dado en el enunciado en producto de simetrías axiales.

Solución:  $M = S_{y=1} \circ T_{\vec{v}=(-1,1)}$

- Hallar la ecuación matricial de la simetría axial de eje  $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ .

Solución:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 8 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

(Examen de febrero, curso 2010–2011)

### ● Problema 23

- A la circunferencia  $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$  se le aplica un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud  $60^\circ$ , transformándose en  $C'$ . Esta circunferencia, mediante la traslación de vector  $v = (2, 2)$ , se transforma en  $C''$ . Hallar la ecuación de  $C''$ .

Solución:  $x^2 + y^2 - 8x - 4(1 + \sqrt{3})y + 28 + 8\sqrt{3} = 0$

- Si a la parábola de ecuación  $y^2 = x$  se le aplican los mismos movimientos que a la circunferencia anterior, ¿cuál será la ecuación de la parábola resultante?

Solución:  $3x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}xy + (4\sqrt{3} - 14)x + (2\sqrt{3} - 4)y + 20 - 4\sqrt{3}$

### ● Problema 24

Consideramos el giro de amplitud  $\pi/4$  que transforma el punto  $(1, 1)$  en el  $(-3, 0)$ :



- ¿Cuál es su matriz?

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 - \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

- ¿Qué punto es su centro?

$$\square \left( \sqrt{2}/2 - 1/2, -2\sqrt{2} - 3/2 \right) \quad \square \left( -3 - \sqrt{2}, 2, 0 \right) \quad \square \left( -\sqrt{2}, -3/2 \right) \quad \square \left( \sqrt{2}/2 - 1, 1/2 - \sqrt{2} \right)$$

- La imagen del punto  $(0, -\sqrt{2})$  es:

$$\square (-\sqrt{2} - 1, -2) \quad \square (0, -\sqrt{2}) \quad \square (-2, 0) \quad \square (-2, -\sqrt{2} - 1)$$

## Problema 25

Se necesita aplicar la simetría cuyo eje es paralelo a la recta  $y = -3x$  y que transforma el origen de coordenadas en un punto de la recta  $x - y + 2 = 0$ .

- La ecuación de su eje es:

$$\square 3x + y + 10 = 0$$

$$\square y = -3x$$

$$\square 3x + y + 5 = 0$$

$$\square \text{ No tenemos información suficiente sobre la simetría como para calcular su eje.}$$

- La ecuación matricial de la simetría es:

$$\square \text{ No es posible obtener la ecuación matricial de esta simetría porque la pendiente de la recta que determina su eje es } -3.$$

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4/5 & -3/5 \\ -1 & -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -3/5 & 4/5 \\ -1 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4/5 & -3/5 \\ -1 & -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$

- La ecuación de la imagen de la circunferencia  $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$  mediante la simetría es:

☐ No se pueden aplicar transformaciones geométricas a objetos que no sean puntos.

☐  $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

☐  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

☐  $x^2 + y^2 = 2$

• **Problema 26**

De las siguientes matrices, señala la que representa a la transformación  $S_{y=2x} \circ S_{y=2x+1}$ :

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/5 & 1 & 0 \\ -2/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ☐ Ninguna de las anteriores.

• **Problema 27**

Consideramos la homotecia que tiene como imágenes de  $(0, 3)$  y  $(3, -\frac{3}{2})$  a los puntos  $(4, -2)$  y  $(3, -\frac{1}{2})$ , respectivamente.

• El centro de la homotecia es:

☐ Para las homotecias, no se define ningún punto como centro

☐  $(4, -1)$     ☐  $(12, -3)$     ☐  $(3, -\frac{3}{4})$

• El vector de la homotecia es:

☐ Para las homotecias, no se define ningún vector

☐  $(4, -5)$     ☐  $(0, 1)$     ☐  $(4, -1)$

• La razón de la homotecia es:

☐  $\frac{1}{3}$     ☐  $-\frac{1}{3}$     ☐  $3$     ☐  $-3$

• La matriz de la homotecia es:

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{1}{3} & 0 \\ -3 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$     ☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -11 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$     ☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

## • Problema 28

Marca la opción correcta para que se verifiquen las siguientes igualdades:

•  $G_{((1,1),90^\circ)} = S_{y=x} \circ S_{\quad}$

☐  $x = 1$       ☐  $y = 1$

☐  $y = -x + 2$       ☐ Ninguna de las anteriores

•  $H_{(\_,8)} = H_{((2,0),-4)} \circ H_{((2,0),\_)}$

☐  $(2, 0)$  y  $2$       ☐  $(0, 2)$  y  $-2$

☐  $(2, 0)$  y  $-3$       ☐ Ninguna de las anteriores

### • Problema 29

En un estudio conjunto se consideran las siguientes transformaciones geométricas en el espacio:

- Simetría especular respecto del plano que contiene al punto  $(2, 1, 0)$  y es paralelo a  $x - y + 3 = 0$ .

- Giro de eje  $OX$ , ángulo  $3\pi/4$  y en sentido creciente.

- Traslación que transforma el punto  $(-1, 3, 4)$  en  $(1, 4, 3)$ .

- Simetría axial de eje  $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases}$ .

- Simetría central de centro  $(-2, 6, 1)$ .

- Homotecia de razón 3 que transforma el punto  $(1, 0, -2)$  en el  $(2, 5, -1)$ .

- Movimiento helicoidal  $G_{(OZ \uparrow, 30^\circ)} \circ T_{(0, 0, -3)}$

- Semejanza  $S_{x-y-1=0} \circ H_{((-1,1,0),3)}$ .

Se necesita indicar, para cada transformación, si alguna de las matrices dadas a continuación es su matriz y en caso afirmativo escribir cuál de ellas.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$