CURVATURA DE UNA CURVA PLANA EN COORDENADAS CARTESIANAS

G. SERRANO SOTELO

1. Introducción

Se adapta la teoría clásica del triedro de Frenet al caso de una curva plana y se calcula explícitamente la curvatura de la curva plana en cartesianas, $y = f(x)$, comprobando que tanto su interpretación como la fórmula de cálculo obtenida coincide con la de Newton.

Newton basa su definición y cálculo de la curvatura de una curva plana en cartesianas en las siguientes afirmaciones:

- Un círculo tiene curvatura constante que es inversamente proporcional a su radio.
- El "círculo más grande" que es tangente a la curva (por su lado cóncavo) en un punto tiene la misma curvatura que la curva en el punto.

Newton define el centro de este círculo como el punto de intersección de las rectas normales a la curva en puntos de ella arbitrariamente próximos. Ello le permite calcular el centro y el radio del círculo y por tanto el centro y el radio de curvatura de la curva. Veremos que el "círculo más grande" de Newton es el círculo osculador.

2. Curvatura de una curva plana en coordenadas cartesianas

Consideremos una curva plana en coordenadas cartesianas parametrizada por su longitud de arco s

$$\sigma(s) = (x(s), y(s))$$

El *vector tangente unitario* a la curva en un punto genérico P es

$$\frac{d\sigma}{ds} = (x'(s), y'(s))$$

Intuitivamente podemos imaginar que la curvatura de la curva mide la variación de su vector tangente en su traslado a lo largo de ella, lo que conduce a las siguientes definiciones:

Se llama *vector de curvatura* en P al vector

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} = (x''(s), y''(s))$$

Se define la curvatura κ en el punto P como el módulo del vector de curvatura en P.

Demostremos que *el vector de curvatura es ortogonal al vector tangente*:

Como $\frac{d\sigma}{ds}$ es unitario, derivando en la expresión $\frac{d\sigma}{ds} \cdot \frac{d\sigma}{ds} = 1$ se obtiene que $\frac{d^2\sigma}{ds^2} \cdot \frac{d\sigma}{ds} = 0$, es decir ambos vectores son ortogonales.

Se deduce que $\dfrac{d^2\sigma}{ds^2} = \kappa N$ siendo N el vector normal unitario en P.

Date: January 25, 2005.

Por tanto, el *centro de curvatura de la curva en P* es el punto C situado sobre la normal en P a una distancia $\frac{1}{\kappa}$ de P, esto es

$$OC = OP + \frac{1}{\kappa}N$$

Además, el círculo de centro C y radio $\frac{1}{\kappa}$ está contenido en *plano osculador* π de la curva, que es el plano que pasa por tres puntos próximos de la curva cuando dos de ellos tienden a confundirse con el tercero (P en este caso), esto es

$$\pi \equiv OX = OP + \langle \frac{d\sigma}{ds}, \frac{d^2\sigma}{ds^2} \rangle$$

Así pues, el centro de curvatura C es el punto de intersección de las rectas normales a la curva en puntos arbitrariamente próximos de ella (Newton).

Por razones claras, el círculo de centro C y radio $\frac{1}{\kappa}$ se llama *círculo osculador*.

Remark 2.1. N es la normal principal a la curva y $\frac{d^2\sigma}{ds^2} = \kappa N$ es la primera fórmula de Frenet, que para una curva no necesariamente plana y en coordenadas arbitrarias se escribe $D^{\nabla}D = \kappa N$, siendo D y N los vectores tangente unitario y normal principal y ∇ la conexión del espacio en el que vive la curva. El plano osculador en un punto viene determinado por los vectores D y N.

En el caso de las coordenadas cartesianas $D^{\nabla}D$ consiste en derivar respecto del parámetro s de la curva, pues los coeficientes de la conexión ∇ en cartesianas son nulos.

3. Cálculo de la curvatura de la curva $y = f(x)$

Una parametrización de la curva es $\sigma(x) = (x, f(x))$.

La métrica sobre la curva se escribe $ds^2 = dx^2 + f'(x)^2dx^2 = (1 + f'(x)^2)dx^2$, esto es, la diferencial de arco se expresa como $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$.

El vector tangente es $\frac{d\sigma}{dx} = (1, f'(x))$ y *el vector tangente unitario* es

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}(1, f'(x)) = ((1 + y'^2)^{-1/2}, y'(1 + y'^2)^{-1/2})$$

Se obtiene la siguiente expresión para *el vector de curvatura*

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} = (\frac{d(1 + y'^2)^{-1/2}}{dx}\frac{dx}{ds}, \frac{d(y'(1 + y'^2)^{-1/2})}{dx}\frac{dx}{ds}) = y''(1 + y'^2)^{-2}(-y', 1)$$

Calculando el módulo de este vector se obtiene la expresión de *la curvatura*

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{-3/2}}$$

E-mail address: laina@usal.es

Departamento de Matemáticas, Universidad de Salamanca, Plaza de la Merced 1-4, 37008 Salamanca, Spain