

Descripción y propiedades de los poliedros regulares y de la esfera

Javier Abia

28 de mayo de 2003

*A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.
A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de medida
que el Universo armónico origina.
A ti, mar de los sueños, angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.*

RAFAEL ALBERTI, Divina proporción

Esta unidad didáctica está pensada para los alumnos de 2º curso de E.S.O., alumnos con 13 años. Previamente al desarrollo de esta unidad los alumnos habrán, trabajado los elementos básicos de la geometría en el espacio: posiciones relativas de rectas y planos, posiciones relativas entre planos y entre rectas, perpendicularidad en el espacio, ángulos diedros y triedro.

Con esta unidad se pretende:

- Que el alumno reconozca sepa diferenciar los poliedros regulares de otros cuerpos en el espacio.
- Que el alumno sepa el porqué de sólo cinco poliedros regulares.
- El alumno ha de reconocer las propiedades de regularidad y simetría de los poliedros y de la esfera.

Para el desarrollo de esta unidad se estima necesario utilizar 5 sesiones sin embargo los alumnos han de realizar un trabajo fuera del aula que estará enfocado a afianzar los conceptos tratados.

1. Otras consideraciones didácticas

Este tema se presta al uso de material manipulativo, modelos de cuerpos geométricos: POLYDRON, GEOMATH, palillos, etc. Es más, creo necesario tal manipulación. La construcción de los diferentes cuerpos geométricos por parte del alumno es un ejercicio, a la vez que estimulante, de gran riqueza didáctica, es el momento en el que el alumno ve in situ, como a partir de planos (caras) se construyen sólidos, es el momento en el cual el alumno percibe la dificultad de «casar polígonos» para formar un vértice poliédrico.

1.1. ¿Qué ha de aportar Descartes?

Descartes ha de aportar a mi entender dos cosas fundamentales:

- Dinamismo. Con Descartes podemos visualizar aspectos que de otra manera no sería posible apreciar, como es el caso de la transformación de un cuerpo en otro.
- Perspectiva. Este es un aspecto muy importante que normalmente cuando se trabaja con modelos geométricos no se toca. Con Descartes no nos hemos de olvidar que trabajamos con sólidos pero en el plano (pantalla del ordenador), y éstos son manipulados y estamos viendo en todo momento en el plano el resultado de dicha manipulación.

1.2. Planteamiento de la unidad

Conociendo a los alumnos de 13 años, se diseñan una unidad en el que el contenido escrito sea escueto.

Las páginas por las que se navega, contienen las menos escenas posibles.

Las actividades propuestas, se muestran en pantallas secundarias e irán numeradas de forma consecutivas.

Hay una serie de actividades pensadas para el desarrollo fuera del aula. Hay actividades que consisten en la construcción de cuerpos geométricos, que se plantea para realizar fuera de la clase de matemáticas, lo ideal sería pedir colaboración a los profesores de plástica o tecnología para realizar los modelos.

A los alumnos se les ha de entregar un material adicional para que tengan una referencia escrita que las actividades que han de realizar (Guía de actividades).

1.3. Estructura

En esta sección se comenta cada una páginas que se han diseñado a lo largo de la unidad así como las actividades que se proponen, en muchas de ellas se dan orientaciones y en cualquier caso la intención del autor en las propuestas de actividades.

Índice

La estructura de la unidad, es tal que permite una navegación lineal, esto es las páginas son consecutivas al igual que las de un libro, sólo se permite pasar de la primera de la páginas, de nombre *index*, a cualquiera de las demás. Y de

cualquier página a la inicial que hace de índice. Dicha estructura, aunque en ocasiones resulte incomoda, garantiza que los alumnos no se *pierdan*.

Empezamos la página haciendo un pequeño pero significativo cambio en la frase que se supone que hizo colocar Platón en la puerta de su famosa escuela filosófica *La Academia*:

Que no entre aquí, quien no sepa geometría

El cambio supone una invitación expresa para aquellos que no saben nada de geometría.

A continuación se detallan las páginas que componen el recorrido con las actividades que se han de realizar en cada página.

Lo básico

En esta página se repasa los conceptos básicos que se utilizan para describir los cuerpos en el espacio: aristas, vértices, caras y los ángulos poliedros. Se propone

Actividad 1. ¿Cuántas aristas han de incidir en un vértice? ¿Cuántas caras han de incidir en el vértice de un poliedro?

Ángulos poliedros

En esta página se ha de concluir que la suma de los ángulos de las caras de un ángulo poliedro siempre ha de ser menor de 360° .

Actividad 2. ¿Qué hemos de hacer para que la suma de los ángulos de las caras de un vértice sea lo mayor posible?

¿Se puede conseguir que la suma de los ángulos de las caras de un vértice sea menor que un ángulo dado? Por ejemplo, ¿puede ser esa suma menor que 25° ? ¿Qué hemos de hacer?

Sólo cinco

En esta página el alumno ha de investigar la imposibilidad de construir ciertos ángulos poliedros con caras polígonos regulares.

Actividad 3. En esta actividad se ha de recoger las posibles combinaciones de números de caras y tipo de polígono que forman ángulos poliedros.

Los poliedros regulares

En esta página se construye los poliedros regulares con las cinco posibilidades que se veían en la anterior página.

Como conclusión: *Sólo hay cinco poliedros regulares.*

Actividad 4. En esta actividad se propone que el alumno investigue sobre la etimología de los nombres de los poliedros.

Actividad 5. Se pide al alumno que recopile en una tabla diferentes datos sobre cada uno de los poliedros. La idea es que se familiaricen con las características de los poliedros regulares.

Actividad 6. Con la ayuda de la tabla anterior, se pide que el alumno compruebe diferentes relaciones entre los elementos de los poliedros.

El cubo

En las siguientes páginas se pasa a estudiar pormenorizadamente cada uno de los poliedros regulares.

Empezamos con la cita de uno de los *Dialogos* más significativos de Platón, el *Timeo*, en el que se explica la construcción del universo, estableciendo una asociación entre los poliedros regulares y los elementos básicos para formar el Universo, según entendía Platón: «...la tierra debe tener la forma del cubo, el sólido más estable de los cinco...»

La escena en la que aparece el cubo puede ser vista de tres formas: caras, aristas y vértices.

Actividad 7. En esta actividad se propone al alumno la construcción de un cubo a partir del desarrollo. Esta actividad puede ser modificada para realizar la construcción mediante otros medios. Se proporciona una plantilla con el desarrollo en formato *PDF*, que puede ser fotocopiada en cartulina para la construcción del poliedro.

Actividad 8. En esta actividad a partir de la proyección de los vértices del cubo en una hoja, se pide al alumno que construya un cubo uniendo los vértices de éste y teniendo en cuenta las aristas no visibles.

La idea es trabajar un aspecto en el que los alumnos presentan grandes dificultades, que son las representaciones en el plano de objetos en tres dimensiones.

Actividad 9. Trabajando la dificultad comentada en la actividad anterior, se propone que a partir de diferentes cubos, el alumno dibuje éstos y sus desarrollos.

En esta actividad el alumno dispone de una plantilla en formato *PDF*.

El tetraedro

Empezamos la página con el elemento básico que corresponde al tetraedro: «El fuego tiene la forma del tetraedro, pues el fuego es el elemento más pequeño, ligero, móvil y agudo.»

Actividad 10. Construcción del tetraedro a partir del desarrollo. Se proporciona una plantilla con el desarrollo en formato *PDF*, que puede ser fotocopiada en cartulina para la construcción del poliedro.

Actividad 11. En esta actividad a partir de la proyección de los vértices del tetraedro en una hoja, se pide al alumno que construya el tetraedro uniendo los vértices de éste y teniendo en cuenta las aristas no visibles.

Actividad 12. Se ha de investigar los posibles desarrollos de un tetraedro. En esta actividad se trabaja el paso del *plano al espacio*.

En esta actividad el alumno dispone de una plantilla en formato *PDF*.

El octaedro

Como en los anteriores poliedros empezamos con el correspondiente extracto del Timeo:

«...el aire, de tamaño, peso y fluidez, en cierto modo, intermedios, se compone de tetraedros...»

Actividad 13. Construcción del octaedro a partir del desarrollo. Se proporciona una plantilla con el **desarrollo** en formato *PDF*, que puede ser fotocopiada en cartulina para la construcción del poliedro.

Actividad 14. Como en la actividad 11, se ha de dibujar el octaedro a partir del conocimiento que se tiene de los vértices.

Actividad 15. Otra vez del *plano al espacio*, se ha de conseguir diferentes desarrollos del octaedro. En esta actividad el alumno dispone de una plantilla en formato *PDF*.

El icosaedro

Nuevamente Platón nos dice: «...el agua, el más móvil y fluido de los elementos, debe tener como forma propia, o semilla, el icosaedro, el sólido más cercano a la esfera y, por tanto, el que, con mayor probabilidad, puede rodar fácilmente.»

Actividad 16. Construcción del icosaedro a partir del desarrollo. Se proporciona una plantilla con el **desarrollo** en formato *PDF*.

Actividad 17. Dibujo del icosaedro a partir de los vértices.

Actividad 18. Otra vez del *plano al espacio*, se ha de conseguir diferentes desarrollos del icosaedro. En esta actividad el alumno dispone de una plantilla en formato *PDF*.

El dodecaedro

Por último, Platón nos sugiere: «...es la forma que los dioses emplean para disponer las constelaciones en los cielos»

Actividad 19. Construcción del dodecaedro a partir del desarrollo. Se proporciona una plantilla con el **desarrollo** en formato *PDF*.

Actividad 20. Dibujo del dodecaedro a partir de los vértices.

Simetrías

Una de las características más importantes de los poliedros regulares es su simetría. En esta actividad se trabaja con los planos de simetría de los poliedros, se deja un poco al margen los ejes de simetría de los poliedros, no porque no carezcan de importancia, si no por la dificultad que los alumnos tienen para su visualización.

En esta página se da un primer paso de acercamiento a la esfera.

Actividad 21. Se han de localizar los diferentes planos de simetría de los poliedros regulares.

Medidas

Un paso más hacia la esfera. Aunque no se mencione, se trata que los alumnos se pregunten cómo a de ser el cuerpo que abarque más volumen con economía de la superficie empleada.

Por otra parte, merece la pena fijarse en los valores que nos da el volumen y la superficie de cada uno de los poliedros, hay sorpresas.

Actividad 22. Consideramos los poliedros con un radio fijo, ¿cuál es el que tiene mayor volumen? ¿Cuál es el que tiene mayor superficie?

Cuando fijamos un radio y realizamos para cada uno de los poliedros el cociente $\frac{V}{S}$, calculamos el volumen de un poliedro por cada unidad de superficie empleada en la construcción del poliedro. Es interesante saber que poliedro abarca más volumen en la relación a la superficie empleada.

Realiza para cada uno de los poliedros el anterior cociente y ordena los poliedros de menor a mayor según el valor obtenido.

Dualidad

La dualidad que se da entre los poliedros regulares, incide en la propiedad de regularidad que hay entre ellos.

Actividad 23. Se ha de localizar para cada uno de los poliedros regulares, su dual.

Hacia la esfera

*La naturaleza es una esfera infinita,
cuyo centro está en todas partes y la
circunferencia en ninguna.*

BLAISE PASCAL, Pensees

Se trata de enlazar lo visto para los poliedros regulares con la esfera. Lo que *emparenta* a poliedros regulares y esfera es su simetría y la existencia de un punto *centro*, desde el equidistan los vértices del poliedro y los puntos de la esfera.

En la escena se revisan algunas de las superficies que se generan a partir de la esfera.

Actividad 24. ¿Qué sección produce un plano en una esfera? ¿Cómo ha de ser el plano para qué la sección sea lo mayor posible?

Fórmulas

En la escena de esta página, para con cada uno de los cuerpos estudiados aparecen las fórmulas que sirven para calcular su superficie y su volumen en función de lo que mide el lado, se da igualmente la relación entre el radio de la esfera que circunscribe al cuerpo y la arista de éste.

La escena se puede aprovechar para generar actividades parecidas a las que se presentan.

Actividad 25. Copia en tu cuaderno para cada uno de los cuerpos que se dan las fórmulas que aparecen.

Para $R = 1$, copia en tu cuaderno la superficie (S) y el volumen (V) de cada uno de los cuerpos. Indica los cuerpos con menor y mayor área y volumen.

Haz una tabla con la superficie y el volumen de los diferentes cuerpos para $L = 2$ (utiliza la calculadora).

Haz una tabla con la superficie y el volumen de los diferentes cuerpos para $R = 5$ (utiliza la calculadora).

Busca aproximadamente cuánto ha de medir los radios de los diferentes cuerpos para que el volumen de éstos sea igual a 20.

2. Recursos

A continuación se han seleccionado diferentes fuentes de consulta que merece la pena revisar. Los sitios web sobre poliedros y cuerpos en el espacio es muy amplia, se muestra una mínima selección para que a partir de ahí, los interesados pueden investigar otros aspectos. Los libros consultados son interesantes, en particular los *Elementos de Geometría* de Rey Pastor y Puig Adam.

2.1. En la web

Poly. Pedagogy Software: Programa para visualizar poliedros. Se puede ver los desarrollos de los poliedros y exportar las imágenes.

The Uniform Polyhedra: Guía visual de poliedros.

El mundo de las matemáticas, de Eric Weisstein: Lugar de consulta obligado de todo lo referente a las matemáticas y en particular a los sólidos.

George W. Hart: Relación de enlaces muy completa sobre poliedros a parte las páginas de George W. Hart esconden bonitas sorpresas.

Math Archives. Contiene mucha información sobre diversos tópicos de geometría y numerosos enlaces.

2.2. Bibliografía

- J. Rey Pastor, P. Puig Adam. *Elementos de Geometría*. (Colección elemental intuitiva).
- Puig Adam. *Curso de Geometría métrica*. (Tomo I). Editorial Euler.
- Emma Castellnuovo. *Geometría intuitiva*. Editorial Labor.
- Clemens/O'Daffer/Cooney. *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Addison-Wesley Iberoamericana.
- J. Arenas, C. Bertrán. *Geometría y experiencias*. Biblioteca de Recursos Didácticos Alhambra.
- J. Achón, C. Azcárate, J. Deulofeu y otros. *Eureka*. Editorial Onda. (La Llave de Rosa Sensat).

- C. Azcárate, J. Deulofeu y otros. *Estrategia*. Editorial Onda. (La Llave de Rosa Sensat).